C.
55095/B
Vol. 1



CHRISTIANUS WOLFIUS,
Mathematum Profeſsor Publicus et Ordinarius,
Societatum Regiarum Britannicæ et Boruſsicæ Sodalis.

ELEMENTA

MATHESEOS UNIVERSÆ.

TOMUS I.

QUI

COMMENTATIONEM DE METHODO MATHEMATICA, ARITHMETICAM, GEOMETRIAM, TRIGONOMETRIAM, ANALYSIN TAM FINITORUM, QUAM INFINITORUM, STATICAM ET MECHANICAM, HYDROSTATICAM, AEROMETRIAM, HYDRAULICAM COMPLECTITUR.

AUTORE

CHRISTIANO WOLFIO,

IN ACADEMIA REGIA FRIDERICIANA MATHEMATUM PROFESSORE PUBLICO ET ORDINARIO, SOCIETATUM REGIARUM BRITANNICAE ATQUE BORUSSICAE SODALI.

CUM PRIVILEGIO POLONIARUM REGIS ET SAXONIÆ ELECTORIS.

HALAE MAGDEBURGICAE A. MDCCXIII.

PROSTAT IN OFFICINA LIBRARIA RENGERIANA

WELLCOME HISTORICAL MEDICAL LIBRARY

VIRIS

*ILLUSTRISSIMIS ET EXCEL-
LENTISSIMIS,*

DOMINO

MARQUARDO LUDOV. DE PRINTZEN,

REGIÆ MAJESTATIS BORUSSICÆ
SUPREMO AULÆ MARESCHALLO

ET

MINISTRO STATUS INTIMO,

ORDINIS REGII AQUILÆ NIGRÆ EQUITI,

CONSISTORII PRÆSIDI,

RERUM ECCLESIASTICARUM ET FEUDALIUM
DIRECTORI,

COMITATUS RUPINENSIS ET TERRÆ BELLI-
NENSIS PRÆFECTO CÆTERA.

DOMINO

JOHANNI MAURITIO

LIB. BAR.

DE BLASPIL,

REGIÆ MAIESTATIS BORVSSICÆ
MINISTRO STATVS INTIMO

RERVMQVE BELLICARVM DIRECTORI
ET COMMISSARIO GENERALI CETERA

SVPREMIS ACADEMIARVM REGIARVM
CVRATORIBVS

DOMINIS SVIS GRATIOSIS,

FELICITATEM PERPETVAM.

VIRI
ILLUSTRISSIMI ATQUE EX-
CELLENTISSIMI.

TUm demum de humano genere bene ac præclare merentur, qui ad erudiendam juventutem Academiis præficiuntur, ſi eam ad veritatis amorem, diligentiam & moderationem inſti-

ſtituant; minime vero, ſi proprio commodo unice intenti nonniſi talia docent, qua deſidi placeant juventuti & vanitati ac petulantiæ velificentur. Quemadmodum enim illi bonos efficiunt viros atque Reip. utiles; ita ex horum diſciplina homines evadunt leves atque inconſiderati, ſuperbi atque protervi, inſolentes, invidi ac maledici, qui honeſtatem utilitate metiuntur & bruto affectuum impetu loco rationis utuntur. Solida nimirum ac pura doctrina mores emollit; ſuperficiaria vero & ad pompam compoſita feros eſſe ſinit. Intereſt autem Reip. ut juvenes in Academiis diſcant olim profutura & felicitatis ac tranquillitatis publicæ fiant amantes, utque ex iis redeant & mentis acumine pollentes & virtute non minus quam doctrina præſtantes. Ex quo igitur tempore publici Doctoris munus in hac Academia mihi fuit demandatum; omnes

mnes ingenii nervos intendi, ut juventuti proponerem & ſolida, & utilia, operamque dedi, ut ex ore meo proficientes efficerem & veritatis amantes, & diligentes, & moderatos. Non meum ego quæſivi (abſit jactantia verbo); ſed quod juventutis Academicæ fuit. Cum ſtudium Mathematicum vulgo carum perhibeatur, id effeci, ut minores ſumtus expoſcat quam reliqua, licet mihi ipſi ob librorum rariorum copiam, inſtrumentorum apparatum aliamque ad Matheſin facilius tradendam ſuppellectilem neceſſariam valde ſit pretioſum. Publice hactenus non interrupta ſerie interpretatus, quæ ex ſingulis diſciplinis Mathematicis & ſcitu maxime neceſſaria, & utilia ſunt, ut adeo ex iis ſolis proficere poſſint, qui ſumtibus parcunt in alias vendibiliores artes largiori manu effundendis, & ut lectiones in univerſam Matheſin publicæ eodem temporis intervallo abſolverentur, quo privatæ, plures per hebdomadem horas iiſdem impendendas eſſe du-

xi, quam per ſtatuta Academica cautum eſt. Tempus, quod forſan in paranda aliqua ingenii gloria non inutiliter collocare potuiſſem, in libris conſcribendis conſumſi, quibus tyronum conatus juvantur, viam ad Mathemata plurimis inacceſſa planam ſternens. Immo ut ad ſublimiora nitentes multo & temporis, & ſumtuum, & operæ compendio ſcopo ſuo potiri queant; Elementa hæc Matheſeos univerſæ in publicum prodire juſſi, quæ Vobis, Academiæ Fridericianæ Curatoribus ſupremis, ea qua par eſt animi ſubmiſſione offero, ut intelligatis, maximum meorum laborum præmium eſſe recte factorum conſcientiam. Vultu igitur benigno ut ea excipiatis, enixe rogo.

VIRI ILLUSTRISSIMI ATQUE
EXCELLENTISSIMI,

Dabam Halæ, ipſis Calendis
Octobris A. 1713.

Cliens veſter devotiſſimus

CHRISTIANUS WOLFIUS.

PRÆFATIO.

ETſi nullo tempore, quo ſcientiis honos fuit, defuerint viri egregii, qui præclaris ingenii ac virtutum dotibus ſupra communem mortalium ſortem evecti divina illa Mathemata digna ſtatuerunt, in quibus elaborarent, nec infelici ſucceſſu ſuſpiciendis inventis eadem amplificarunt, quemadmodum veterum monumenta palam loquuntur; ante noſtram tamen ætatem ad illud faſtigium non fuerunt evecta, in quo hodie conſtituta miramur. Neque indigna ſunt, quæ indies magis magisque excolantur & exploſa loquaci ſophiſtica in ſcholas revocentur, cum neminem, niſi aut tardiore fuerit ingenio, aut ignarus artis oſor affectu

præpeditam habuerit mentem, fore exiſtimem, qui non eorum puritatem, evidentiam ac ſublimitatem miretur & ob utilitates innumeras inde in genus humanum redundantes de Arte noſtra præclare ſentiat. Mentem enim humanam valde perficit Matheſis, ad philoſophiam aliaque ſtudiorum genera & latius, & profundius, & utilius tractandum inſtruit, ad ſolidiorem doctrinam adminicula inexſpectata ſuppeditat, maximas ad vitam utilitates affert.

Non ignota loquor, non inexſpectata Mathematum peritis. Attamen nullus dubito fore, ut vulgus litteratorum ex ſuo ingenio alios judicans perſuadere conetur ignaris, ex præpoſtero in ſcientias mathematicas ſtudio proficiſci has laudes. Quamvis autem non ea ſit penes me garrientium (a) auto-

(a) Autor ſum his hominibus, ut præfationem legant, quam *Philippus Melanchthon*, Vir non Mathematicis, ſed elegantioribus, ſed philoſophicis, ſed theologicis ſtudiis celebris, communis Germaniæ Præceptor, *Joannis Vogelini* Elementis Geometriæ præmiſit. Ex ea notulas quasdam hinc inde adſpergemus, conſenſum Philippeorum cum noſtris manifeſtaturas. Ita ergo generatim ad rem noſtram *Melanchthon*: Scio, inquit, has adhortationes apud eos, qui ſordidis ingeniis præditi ſunt, nihil proficere, qui præſtantium diſciplinarum dignitatem non proſpiciunt, aut ſectantur quasdam vendibiliores artes, quæſtus gratia. Nam & mentes habent monſtroſas, & magno ſcelere turbant proportionem geometricam, cum non tribuunt ſuam artibus dignitatem. Sed recta ingenia, etiam medio-

autoritas, ut, quæ inſcite obſtrepunt, ſcite retundam, non tam quod plurimi inſtitutione indignos judicent, qui convitiis extorquere volunt, ut doceantur, & illos demum lumine dignos cenſeant, qui modeſte id deſiderant; quam quod in ſciolis erudiendis oleum operamque perdi pro comperto habeam, quippe qui tum (ut cum *Horoccio* * loquar) pulchre ſibi diſputare videntur, ſi, quod arguendo evertere non poſſunt, tanquam ridiculum contemnant, aut puerilibus dicteriis adſperſum aliorum riſui exponant: cum tamen mearum partium eſſe exiſtimem, ut generoſa atque excelſa ingenia ad ſtudia Mathematica incendam atque inflammem; quid, quæſo, impedit, quo minus evincam, non eſſe Mathematicos (liceat mihi denuo *Horoccii* verbis ** uti) tam perfrictæ frontis, ut abſurdas quasvis ampullas magno clamore ignaris divendant, modo in fucati laboris præmium breviſſimo inanis gloriæ flatu intumeſcant & inter inconditos plaudentium ſtrepitus placide ſibi adulentur; multo minus ita dibuccinare laudes ſuas, ut apud alios merito nullam inveniant.

Age-

mediocria, incitari poſſunt ipſa artium admiratione, ſi admoneantur, deinde ſi accedat artifex, qui commode tradat. Ideo ſpero aliquorum ſtudia commoveri poſſe.

* In Aſtronomia Kepleriana defenſa atque promota c. 1. p. 23.

** in Prolegomen. p. 8.

Agedum, ergo! quis eſt, qui ſcientias Mathematicas & rerum evidentia ac ſublimitate, & demonſtrationum rigore ac profunditate, & ordinis pulchritudine ac concinnitate cœteris omnibus longe ſuperiores mentem perficere negare auſit? Qui mentis dotes ignorat; qui judicium leve a gravi, ingenium hebes ab acri non diſtinguit; qui denique culmen perfectionum non proſpicit, ad quod menti pervenire datum eſt. Tum demum, me judice, ingenii acie pollebis, ſi non modo clara ab obſcuris, diſtincta a confuſis, adæquata ab inadæquatis, explorata ab inexploratis, certa ab incertis, probabiliora a minus probabilibus diſcernere valebis, ſed & ipſemet fueris exactus & perſpicuus in definiendo, ſolers & circumſpectus in obſervando, ingenioſus & accuratus in experimentando, ſeverus & acutus in judicando, concinnitatis & rigoris tenax in demonſtrando, patiens & profundus in meditando, ſagax & expeditus in inveniendo. Sed quomodo, quæſo, comparantur habitus tam præclari? Non niſi crebro exercitio. Multus ergo ſis neceſſe eſt in notionibus evolvendis, in demonſtrationibus concipiendis, in problematibus reſolvendis, nec proletaria in meditando & inveniendo collocanda eſt opera. Cum adeo diſciplinas, quæ huic ſcopo conveniant, præter mathematicas nullas noverint, qui mathematicas & cœteras eadem diligentia pertractarunt; ſtu-

dium mathematicum ad acuendum judicium apprime neceſſarium pronunciamus & ſine eo ad ſolidam rerum cognitionem perveniri poſſe negamus. (b)

Equidem non ignoro, homines quosdam, cum ſint in Matheſi hoſpites ac plane rudes, ſe jactare, quod audiverint Mathematicos de rebus mathematicis optime, de aliis a Matheſi alienis peſſime judicantes: veruntamen quod ad tam inconſiderate dicta reponam, non unum habeo. Quoniam nimirum non quævis terra Mathematicum alit (neque enim creantur in Academiis ut Doctores;) ſane non apparet, unde imperitus Artis obtrectator certus fuerit factus, ſibi rem cum Mathematico fuiſſe. Quid ſi agrimenſorem viderit, aut architectum, aut conſpiciliorum politorem, aut inſtrumentorum fabrum, aut virum, cui data eſt docendi quidem, ſed non ſciendi Matheſin poteſtas? Quis enim adeo inſanus eſt, ut unumquemque cenſeat titulo, quem fama fallax aut fortuna cœca eidem tribuit? Non inſolitum, nec inauditum, ut, quem ignari judicant Ma-

(b) *Melanchthon* loc. cit. Si qui non totos ſe huic ſtudio dedent, tamen his ad judicia formanda - - - opus eſt cognitione elementorum Geometriæ. Idem paulo ante: Cum demonſtrationes Geometricæ maxime ſint illuſtres; nemo ſine aliqua cognitione hujus artis perſpicit, quæ ſit vis demonſtrationum, nemo ſine ea erit artifex methodi.

Matheſeos apprime peritum, quem Profeſſores *Euclidis, Apollonii, Archimedis alterius* elogio etiam poſt fata mactant, idem tamen a Mathematicis ſummis, vere idoneis harum rerum arbitris, Matheſeos imperitus appelletur. Enimvero etiamſi hoc demus, Artis noſtræ oſorem audiviſſe Mathematicum de rebus ad Matheſin non ſpectantibus judicantem; nondum tamen video, unde cognoverit, quod male judicaverit: aliter enim niſi judicaret qui ingenii acumine pollet, aliter qui haud altius vulgo ſapit, inter ingenium acre & hebes nullum foret diſcrimen, nec concedendum erat, in Matheſi cum laude verſatis res quaslibet profundius ſcrutari datum eſſe. Denique ſi vel maxime aliquando contigerit, Mathematicum aliquem de rebus ad ſe non pertinentibus male judicaſſe; hinc ſaltem colliges, ipſum occaſione ita ferente de re, quam nondum meditatus fuerat, per præcipitantiam, vitium ἀγεωμετρήτοις tantum non ſemper familiare, ſtatuiſſe.

Neque enim defendimus, quod eadem opera, qua quis Mathemata ſibi familiaria reddit, coeterarum quoque rerum cognitione animum imbuat, & criminationis loco habemus, ſi qui per malitiam affirment, quod Mathematici glorientur, penes ſe ſolos eſſe principia veritatis; ſed quod Matheſeos cultura reliquis ſtudiis præmiſſa efficiat, ut alias diſcipli-

ſciplinas facilius, rectius & profundius percipere poſſis, ubi ad eas induſtriam atque aſſiduitatem attuleris, id vero eſt quod aſſeveramus. Neſcio vero, qua fronte, qui inexperta loquuntur, majorem ſibi fidem haberi velint, quam iis, qui niſi experta non fatentur. Utinam tandem, qui Eccleſiæ ac Reip. præſunt, caverent ne ad cætera ſtudia tractanda animum appellerent, niſi Mathematica cognitione imbuti, neque ullus dubito fore ut aliam Eccleſiæ, aliam Reip. faciem contueremur. (c) Ut enim taceam, quæ a ſolida doctrina in Eccleſiam & Remp. redundant, emolumenta, plurimum refert, ſi, qui ob eruditionem utrique præficiuntur, ſint aſſidui, conſiderati, moderati & veritatis amantes, quos Matheſeos ſtudium efficit, ubi ita tractetur, ut amplificet uſum rationis.

Quot-

(c) *Melanchthon* loc. cit. Jacent deſertæ & neglectæ artes Mathematicæ, multis jam ſeculis. Nam proxima ætas (*quidni & noſtra?*) juventutem ab hac vera philoſophia ad inſulſiſſimas cavillationes abduxerat. Nunc, poſtquam hæ exploſæ ſunt e ſcholis, annitendum erat, ut pura & nativa philoſophia traderetur, quæ conduceret ad ſolidam doctrinam conſequendam. Nam hæc noſtra ætas ſatis commonefacit nos, quantum opus ſit Reip. perfecta doctrina, quia multi paſſim, tum inopia judicii, tum quia diſerte explicare nihil poſſunt, ſparſerunt aut defendunt opiniones abſurdas & confuſaneas, ex quibus in Eccleſia magna certamina, magnæ diſſenſiones extiterunt. Nec finis horum malorum erit ullus, niſi ad veram & eruditam ſtudiorum rationem juventus revocata fuerit.

Quotquot humanæ mentis vires cognoſcere ſtudent earumque uſum ſcrutari geſtiunt; eos ad Mathematum culturam invitamus. Oſtendet Algebra atque Geometria ſublimior, nihil eſſe tam abditum, quin detegatur: docebit Aſtronomia cum Geographia, nihil eſſe a ſenſibus hominum tam remotum, quin id ſatis diſtincte cognoſcere & accurate dimetiri valeamus: teſtabitur calculus Aſtronomicus, quanta certitudine futura cœli phœnomena prædicere liceat, etſi genius nullus motuum, quibus ſidera feruntur, leges Aſtronomis revelaverit: Optica cum Aſtronomia diſcrimen inter repræſentationes rerum in intellectu & in imaginatione monſtrabit: Arithmetica, Trigonometria & Analyſis regulas generales ſuppeditabunt, quibus in inveniendo dirigatur intellectus & una cum ſenſibus compeſcatur imaginatio, ne meditationes turbet: methodus denique mathematica rectum rationis uſum manifeſtabit.

Quanta ſit vis Mathematum in ſcientia naturali, ex Statica, Mechanica, Hydroſtatica, Aerometria, Hydraulica, Optica, Catoptrica, Dioptrica, Aſtronomia & Geographia abunde perſpicitur: quæ omnes argumenta quædam phyſica ſolidius atque profundius pertractata exhibent, quam ſine Matheſeos principiis fieri poterat. Nonne enim Phyſici eſt explicare motum, gravitationem corporum, pro-

prie-

prietates aeris, phœnomena viſus, ſtructuram univerſi, naturam & proprietates corporum mundi totalium? Quodſi vero quæ de motu ſolidorum in Statica & Mechanica, de gravitatione corporum in fluidis in Hydroſtatica, de motu fluidorum in Hydraulica, de aere in Aerometria, de viſu in Optica, Catoptrica & Dioptrica, de corporibus mundi totalibus eorumque motuum legibus in Aſtronomia & Geographia traduntur, cum iis conferre dignatus fueris, quæ de iisdem argumentis in Phyſicorum ſyſtematibus occurrunt, demtis præſertim iis, quæ ex Mathematicorum voluminibus deſcripta ſunt; quantum diſcriminis intercedat inter doctrinas phyſicas principiis Mathematicis ſuperſtructas atque Mathematicorum opera excultas, & inter ea dogmata, quæ Mathematicorum opem adhuc deſiderant, illico conſtabit. Unde non miramur *Robertum Boylium*, de ſcientia naturali experimentando præclare meritum, ita ſcribentem (d): „De Mathematica nonnihil tibi propoſiturus ſum, „eum inprimis in finem, ne forte (quod & mihi „olim evenit) ſeducaris Philoſophorum iſtorum „modernorum autoritate, qui cum Phyſici obje„ctum ſit materia, Mathematicas diſciplinas, tan-

 „qnam

(d) In Conſiderationibus circa utilitatem Philoſophiæ naturalis experimentalis Exercitat. 6. §. 142. p. m. 483.

e)

„quam abſtractis ſaltem quantitatibus & figuris oc-
„cupatas, ſtudio naturali obeſſe magis, quam pro-
„deſſe contendunt. Quamvis enim opinionem
„ipſius *Kepleri*, trium Imperatorum Mathematici
„aliorumque Aſtronomorum recentium abſurdam,
„hominibus perſuadentem; quod Mathematica
„quempiam ad ſtudium naturale facilius abſolven-
„dum non omnino idoneum reddere poſſit, reſta-
„bilire & defendere aliquando conatus fuerim; in-
„genue tamen confiteor, quod experimentis meis,
„in ſpecie Mechanicis, Mathematicæ in Phyſica
„uſum ingentem mihi demonſtrantibus, ſæpe jam
„exoptarim, ut in Geometriæ theoriam & ſtudium
„Algebræ ſpecioſæ, quam puer ferme addidici, ma-
„jorem impendiſſem partem temporis & induſtriæ,
„quæ Planimetriæ & Fortificatoriæ (de qua me in-
„tegrum Tractatum ſcripſiſſe memini) aliisque Pra-
„cticis Mathematicæ partibus a me attributa fuit.
Imo nec miramur ingenue profitentem (e): „ve-
„reor, implorandam eſſe a Mathematicis lectoribus
„veniam pro iis rebus, quas, ſi in Matheſi magis pol-
„lerem, accuratius tractaſſem. Alibi nimirum oſten-
di (f), tum demum in ſcientia naturali ad certitudi-
nem

(e) In præfat. ad nova experimenta phyſico-mechanica de vi aeris elaſtica.

(f) In præfat. ad Elementa Aerometriæ A. 1709. ſeorſim edita.

nem ſeu evidentiam perveniri & dominium in res creatas obtineri, ſi Matheſis ad Phyſicam applicetur.

Niſi utilitates, quas Matheſis ad vitam affert, ſponte ſua occurrerent attentis; non modo Arithmeticæ, Geometriæ practicæ, Architecturæ, Mechanicæ, Hydroſtaticæ, Hydraulicæ uſus in œconomia ampliſſimus facile oſtendi, ſed etiam evidenter demonſtrari poſſet, maximam felicitatis humanæ partem Matheſi ſuperſtructam: ut taceam commoda, quæ Matheſis præſtat abſolutis ſtudiis Academicis in exteras regiones excurrentibus, quibus maxima utilitatis ac voluptatis ex itinere capiendæ pars perit, ſi in illa fuerint hoſpites ac peregrini.

Cum adeo diſciplinarum Mathematicarum utilitates innumeras mente attenta perpenderem, propria autem experientia edoctus non ignorarem, deſiderari adhuc Matheſeos univerſæ elementa, quæ ad illas conſequendum ſufficerent; ante triennium idiomate patrio Elementa Matheſeos Univerſæ publici juris feci, in quibus ea potiſſimum explanavi, quæ ad praxin tendunt, adeoque theorias prætermiſi, quarum non adeo manifeſtus eſt uſus. Dum liber adhuc ſub prælo ſudabat, contigit ut multi eundem expeterent: quo ipſo adductus bibliopola deſiderabat, ut eundem in ſermonem Latinum transfunderem. Hujus ego deſiderio an-

nuens bonam jam operis partem habitu Romano indutam prælo deſtinaveram, cum conſultius mihi videretur, ſi theoretica uberius exponerentur, quam in Opere Germanico ad juvandum primos tyronum conatus compoſito fieri par erat, ut Latinum ſcilicet etiam ſatisfaceret ad ſublimiora tendentibus. Quæ igitur ſermone Latino prodeunt Elementa, a Germanicis multum differunt novoque ordine digeſta ſunt. In iis elaborandis tantum operæ collocare non licuit, quantum opus iſtiusmodi requirere videbatur. Præterquam enim quod ſex, minimum quinque per diem horas inſtituendæ juventuti Academicæ cum in Matheſi, tum in Philoſophia impendam; varia obſtacula alia, quæ inter valetudo adverſa anno ſuperiore circulos meos perturbans non poſtremum locum ſibi vendicat, impediverunt, quo minus omnia ex voto fierent. Quoniam nimirum bibliopola, qui aliquos jam ſumtus in editionem fecerat, inſtabat, ut opus coeptum perficerem; ſingulas fere propoſitiones typis deſcribendas tradere coactus fui, quamprimum a me in chartam conjectæ eſſent, typothetis ſcilicet quotidie penſum ſemidiurnum a manu mea exſpectantibus. Quodſi ergo quædam in hoc opere deprehendis, quæ jure diſplicent, ea nec mihi placere ſcias velim. Si totum diſplicet, ut meliora des hortor, gratum & mi-

hi

hi & aliis facturus. Interea patere, ut hoc duce utantur, quotquot ad ſolidam Mathematum cognitionem non ſine operæ, ſumtuum & temporis compendio adſpirant, quamdiu deſit magis fidus. Theoretica & practica eadem induſtria expoſui: ex his unusquisque ſeligat, quæ ad palatum ſuum eſſe exiſtimaverit, reliqua aliis, non ſibi dicta putet. Indicem geminum ſubjunxi: quorum alter eſt rerum atque verborum, ut his elementis etiam inſtar Lexici mathematici uti poſſint, quorum ſtudia eodem juvantur; alter elementa *Euclidea* cum noſtris confert, ut, quæ ex *Euclide* paſſim citantur, etiam in noſtris inveniri poſſint, nec *Euclideis* habeant opus, qui noſtra poſſident. Vale, Lector benevole, & his noſtris utere, Tomum alterum, qui Opticam, Catoptricam, Dioptricam, Perſpectivam, Trigonometriam Sphæricam, Aſtronomiam, Chronologiam, Geographiam, Gnomonicam, Pyrotechniam, Architecturam militarem atque civilem, una cum bibliotheca Mathematica complectetur, propediem exſpectans. Dabam Halæ Magdeburgicæ ipſis Calendis Octobris A. 1713.

Plato apud Theonem Smyrnæum
c. 1. p. 20.

Adoleſcentibus eorumque ætati conveniunt diſciplinæ Mathematicæ, quæ animam præparant & defæcant, ut ipſa ad Philoſophiam capeſſendam idonea reddatur.

DE
METHODO
MATHEMATICA
BREVIS COMMENTATIO.

PRÆFATIO.

SI quid mei judicii eſt, operam non inanem ſumit, qui methodum Mathematicorum diligentiſſime rimatur. Ejus enim vim qui tenet, is non modo ad Mathemata percipienda animum, quantum poteſt, attendit & rationes evidentiæ illorum funditus perſpicit; verum ad alias etiam diſciplinas, utut labore non adeo facili, cum fructu tamen prorſus inſigni, eandem transfert. Quodſi vero Matheſis non aliam præter hanc unicam cultoribus ſui afferret utilitatem; eidem tamen gnaviter incumbere deberent, quotquot diſciplinarum ſtudia ingrediuntur. Eumque in finem ſtudium Mathematicum tantopere

commendant viri docti ac intelligentes, quos inter (*) LOCKIUM, (**) MALEBRANCHIUM, (***) TSCHIRNHUSIUM nominaſſe ſufficiat, quorum in philoſophia rationali illuſtranda ſolertia haud paucorum opinionem vicit. Hanc igitur de methodo mathematica commentationem mole exiguam, ſed rerum ubertate gravem Elementis Matheſeos univerſæ præmiſi, ne in iis deſiderari paterer induſtriam meam, quorum ad recte philoſophandum quam maxime neceſſaria eſt cognitio: inprimis cum exiguus admodum ſit eorum numerus, quibus interiora methodi ſunt perſpecta; multo minor autem illorum, qui methodo mathematica prompte utuntur. Cæterum hæc commentatio de methodo ſingulari cum attentione perlegenda &, ubi Arithmeticæ ac Geometriæ elementa evolvuntur, præcepta methodi ſunt relegenda, tum ut penitus intelligantur, tum ut appareat, quomodo iis ſatisfiat. Ita demum Matheſeos ſtudium vere acuet intellectum.

(*) In Tractatu de directione ingenii (qui inter opera poſthuma idiomate Anglico Londini 1706. edita habetur) p. 30.
(**) de inquirenda veritate lib. 6. c. 6. & 7.
(***) in introductione ad Matheſin & Phyſicam Germanice conſcripta p. m. 17. & ſeqq.

CON-

CONSPECTUS COMMENTATIONIS DE METHODO MATHEMATICA.

Methodus Mathematica definitur §. 1. *& ejus forma generaliter deſcribitur* §. 2. *Hæc ut ſpecialius explicetur, docetur quid ſint definitiones* §. 3. *& harum gratia traditur explicatio notionum tum in genere* §. 4. *tum in ſpecie clararum* §. 6. *obſcurarum* §. 7. *diſtinctarum* §. 8. *confuſarum.* §. 9. *adæquatarum* §. 10. 11. *& inadæquatarum* §. 12. *Oſtenditur, quænam notiones in numerum definitionum admittantur* §. 13. 14. 15. *Definitiones dividuntur in nominales & reales* §. 16. 17. 18. *Exponuntur quatuor modi inveniendi definitiones nominales* §. 19. 20. 21. 22. *& quatuor alii inveniendi reales* §. 25. 26. 27. 28. *Indicatur, quomodo innoteſcat, quod definitiones tam nominales* §. 23. 24. *quam reales* §. 29. *poſſibiles ſint. Declaratur indoles axiomatum & poſtulatorum* §. 30. 31. 33. *& abuſus quidam notantur* §. 32. *Diſſeritur quoque de experientia* §. 34. 35. 36. 37. *Definitur theorema* §. 38. *& diſtincte agitur de propoſitionis partibus theſi atque hypotheſi* §. 39. 40. 41. 42. *& de demonſtratione* §. 43. 45. 47. *ubi etiam docetur uſus citationum Mathematicis in demonſtrationibus ſolennis* §. 44. *Similiter declaratur problematum* §. 48. *corollariorum* §. 49. 50. *ſcholiorum* §. 51. *ratio. Aſſeritur methodi mathematicæ univerſalitas* §. 52. *& ratio redditur, cur interdum Matheſis judicium acuere debeat* §. 53. *interdum minus* § 54. *Denique reſpondetur ad objectiones, quæ contra methodum mathematicam a nonnullis afferri ſolent* §. 55. 56. 57.

DE METHODO MATHEMATICA BREVIS COMMENTATIO.

§. 1.

PEr *Methodum Mathematicam* intelligo Ordinem, quo in tradendis dogmatis ſuis utuntur Mathematici.

§. 2. Ordiuntur autem Mathematici a definitionibus; inde ad axiomata & poſtulata, in Matheſi impura ad experientias ſeu obſervationes, progrediuntur; his tandem theoremata & problemata ſuperſtruunt: ubique vero corollaria & ſcholia, ſi e re viſum fuerit, annectunt.

§. 3. Sunt autem *Definitiones* primæ rerum notiones, quarum ope inter ſe diſtinguuntur & vnde, quæ de ipſis concipiuntur, reliqua deducuntur.

§. 4. Per *Notionem* quamlibet rei cujuslibet in mente repræſentationem intelligo.

§. 5. Notionum differentiam primus diſtincte tradidit ſagaciſſimus *Leibnitius* (*): quæ quanti ſit ponderis, pauci hactenus agnoverunt.

§. 6. Eſt ſcilicet *Notio clara*, quæ ad rem oblatam recognoſcendam ſufficit, e. gr. quod figura data in numero triangulorum habeatur.

§. 7. *Obſcura* eſt *notio*, quæ ad rem oblatam recognoſcendam non ſufficit. Talis eſt e. gr. plantæ, ad cujus conſpectum dubitas, utrum ea ſit nec ne, quam alio tempore alibi videras & cui hoc vel illud nomen tribui ſuevit.

§. 8. Clara *notio diſtincta* habetur, ſi notas recenſere valeas, ex quibus rem oblatam recognoſcis, e. gr. quod circulus ſit figura linea curva in ſe redeunte terminata, cujus ſingula puncta ab eodem puncto intermedio æqualiter diſtant.

§. 9. *Confuſa* eſt *notio* clara, ſi notas, ex quibus rem oblatam recognoſcis, recenſere minime valeas, utut in tales ſit reſolubilis; qualis eſt e. gr. notio coloris rubri.

§. 10. Diſtincta *notio adæquata* dicitur, ſi & notarum, ex quibus componitur, notiones diſtinctas habueris, e. gr. notio circuli paulo ante tradita cenſetur adæquata, ubi curvæ in ſe redeuntis, puncti intermedii, diſtantiæ æqualis & terminationis notiones diſtinctas habueris.

§. 11 In hac analyſi cum progredi liceat, donec ad notiones irreſolubiles perveniatur; notionum adæquatarum dari gradus manifeſtum eſt, in præſenti tamen non explicandos. Sufficit monuiſſe, quod notiones quædam confuſæ admitti queant, quarum evolutio ad demonſtrationes non apprime neceſſaria. Ita *Euclides* non reſolvit notionem æqualitatis, utut eadem notiones trianguli æquilateri, rhombi & figurarum regularium ingrediatur. Propoſitiones enim, ad quarum demonſtrationem neceſſaria erat, facile ipſi ſine probatione concedi poterant, e. gr. Quod æqualia eidem tertio ſint æqualia inter ſe; quod figuræ ſibi mutuo congruentes ſint æquales; quod æqualibus per æqualia multiplicatis facta ſint æqualia &c. Defectum ſcilicet analyſeos ſupplent propoſitiones, quæ per experientiam ſatis certæ ſunt.

§. 12. *Inadæquata* eſt *notio*, ſi notarum,

(*) In Actis Eruditorum An. 1684. p. 537.

tarum quæ diſtinctam ingrediuntur, nonniſi confuſas notiones habueris.

§. 13. In numerum definitionum Mathematicarum non admittuntur niſi notiones diſtinctæ &, quantum fieri poteſt aut pro re nata ſufficit, adæquatæ.

§. 14. Hinc in definitionibus ſubſequentibus non utuntur vocibus, niſi vel ex antecedentibus, vel aliunde ſatis intelligatur, quæ res iis ſubjiciantur.

§. 15. Et, ſi quando notione confuſa contenti ſumus, res, ad quam ſpectat, obvia ſit neceſſe eſt, ut vel præſentem quandocunque libuerit percipere, vel ſæpius jam olim perceptæ haud difficulter reminiſci valeamus.

§. 16. Definitiones vero ad duas claſſes commode revocantur. Sunt nimirum aliæ nominales, aliæ reales.

§. 17. *Definitio nominalis* eſt enumeratio notarum ad rem oblatam ab aliis diſtinguendam ſufficientium. Talis eſt quadrati, ſi figura quadrilatera, æquilatera, rectangula eſſe dicatur.

§. 18. *Definitio realis* eſt notio diſtincta rei geneſin, hoc eſt, modum quo fieri poteſt, exponens. Talis in Geometria eſt Circuli, ſi per motum lineæ rectæ circa punctum fixum deſcribi concipitur.

§. 19. Ad definitiones nominales multis modis pervenitur: quos inter primus nominari debet, ſi ad rem præſentem, quam percipimus, attendimus. Hac ratione Aſtronomis innotuit, eclipſin Lunæ eſſe privationem luminis Lunæ plenæ. Cum cura vero diſtinguenda ſunt, quæ diſtingui poſſunt, eaque fini ſingula primum ſigillatim conſiderari, mox inter ſe conferri debent, ut definitio notio diſtincta evadat, qualis *vi* §. 13. eſſe debet.

§. 20. Definitiones hac vel alia methodo inveſtigatas expendentes varias plerumque determinationes animadvertimus, quibus omiſſis generaliores evadunt. E. gr. Si ex definitione *trianguli*, quod ſit ſpatium tribus lineis comprehenſum, linearum numerus expungatur; notionem *figuræ* habebis, quod ſit ſpatium lineis terminatum.

§. 21. Si determinationes in definitionibus obvias conſideres, alias iis geminas comminiſci datur: qua ratione definitiones aliæ inveniuntur. E. gr. Ubi perpendis, figuram trianguli a ternario laterum numero dependere; quaternarium aut numerum quemcunque alium ternario majorem ſubſtitue, ut definitio *figuræ quadrilateræ* aut *multilateræ* cujuscunque prodeat.

§. 22. Quemadmodum vero *vi* §. 20. determinationes quædam omit-

omitti; ſic etiam novæ ſuperaddi poſſunt. E. gr. in definitione trianguli ſpecies & ratio linearum, quam inter ſe habent, determinari poteſt. Ponamus nimirum lineas eſſe rectas; generalis notio trianguli in notionem *trianguli rectilinei* abit. Ponamus porro eſſe latera omnia inter ſe æqualia; notio trianguli generalis in notionem *trianguli æquilateri* degenerabit.

§. 23. Definitionum per methodum primam inventarum realitas extra omnem dubitationis aleam poſita. Quis enim, quæ actu exiſtere cognoſcit, utrum eſſe poſſint nec ne, dubitabit? Dubitaret enim, num perciperet, quæ ſe percipere ſibi conſcius eſt: id quod valde abſonum. E. gr. Si quis lunam deficientem intuetur; quod eclipſin pati poſſit, dubitare nequit. Idem de illis definitionibus judicium eſto, quæ a posſibilibus abſtrahuntur.

§. 24. Alia vero definitionum per methodum tertiam & quartam inventarum eſt ratio. Utrobique enim arbitrium regnat, ſive juxta tertiam determinationes datas in alias ſimiles convertas, ſive juxta quartam datis alias ſuperaddas: noſtrum autem arbitrium nullam rebus exiſtendi neceſſitatem imponit. Licet e. gr. ſpatium tribus lineis rectis comprehendi poſſit, inde tamen nondum liquet, quod etiam quatuor, quinque aut pluribus quotcunque aliis terminari queat. Et quamvis tres lineæ rectæ ſpatium comprehendant; inde tamen nondum apparet, quod inter ſe æquales eſſe poſſint. Tales itaque definitiones poſſibiles eſſe demonſtrandum eſt: id quod Geometræ circa figuras præſtant, dum earum conſtructionem tradunt.

§. 25. Definitiones reales vel a priori inveniuntur, vel a poſteriori innoteſcunt. A priori definitiones reales inveſtigabis, ſi ex plurium poſſibilium, quæ tibi innotuerunt, combinatione novum quoddam poſſibile producis, e. gr. ex combinatione machinarum ſimplicium machinam quandam compoſitam, cujus nullam antea habebas notionem. Et in hac quidem methodo caſui perſæpe aliquid datur. Exemplo eſt compoſitio teleſcopii per fortuitam combinationem lentis convexæ cum concava detecta, narrante *Borello*.

§. 26. Difficilius idem præſtatur, ſi ex data definitione nominali realis invenienda. Hoc enim in caſu notiones diſtinctas eorum evolvere tenemur, quæ in iſta continentur, ut appareat, qualia ad rei formationem requirantur; poſtea cognitiones jam ante acquiſitas mente recolere debemus, viſuri num talia ſuccurrant, per quæ rei formationem concipere licet. E. gr.

datur

datur in Aſtronomia definitio nominalis eclipſis Lunæ, quod ſcilicet ſit privatio luminis Lunæ plenæ; invenienda eſt definitio realis ejusdem. Lumen igitur lunare & plenilunium meditari debemus. Ubi iſtud a Sole ſecundum lineas rectas in corpus lunare incidere & tempore plenilunii ecliptici Lunam Soli diametraliter opponi, adeoque Tellurem duobus hiſce corporibus interpoſitam in locum Soli oppoſitum projicere umbram ſuccurrit; haud difficulter innoteſcit, eclipſin Lunæ oriri, ſi ea umbram terræ ingrediatur.

§. 27. A poſteriori definitiones reales innoteſcunt, ſi rei formationi præſentes attendimus. E.gr. Si quis videat in campo circulum deſcribi, fune circa clavum fixum in gyrum acto; is geneſin circuli concipit per motum lineæ rectæ circa punctum fixum.

§. 28. Ad definitiones reales quoque pervenitur, dum compoſitum totum in ſuas partes ſimplices reſolvitur, quod in organicis potiſſimum locum habet. Hac ratione e.gr. ſtructuram machinæ jam extantis aſſequimur.

§. 29. Circa hoc definitionum genus duo conſideranda ſunt, antequam de illarum poſſibilitate judicare licet, nempe 1. utrum ea exiſtant aut exiſtere poſſint nec ne, quæ ad geneſin rei concurrere aſſumimus; 2. num ab iis proficiſci queant, quæ in formatione rei iisdem tribuimus: id quod ex natura definitionis realis (§. 18.) liquet. Horum vero certitudinem vel experientia, vel eorum, quæ per conſequentias legitimas alio tempore deduximus, reminiſcentia conſequimur. Ita e. gr. in definitione circuli ſuperius (§. 27.) tradita per experientiam claret, lineam rectam circa punctum fixum in gyrum agi poſſe. Aſt in definitione eclipſis lunaris ratione, experientia licet ſtipata, aſſequimur, Lunam Telluris umbram ingredi poſſe.

§. 30. Definitiones tam reales, quam nominales cum in ſe conſiderari, tum inter ſe conferri poſſunt. Quicquid ex conſideratione eorum, quæ in una definitione continentur, immediate deducitur, *Axioma* vocatur, ſi quid rei convenire aut non convenire enunciet; *Poſtulatum* vero, ſi quid effici poſſe affirmet vel neget. E.gr. Ex geneſi circuli liquet, omnes rectas ex centro ad peripheriam ductas inter ſe æquales eſſe, cum unam eandemque lineam in diverſo ſitu referant. Hæc adeo propoſitio in axiomatum numero habetur. Aſt dum per eandem definitionem intelligitur; ex quovis puncto quovis intervallo circulum deſcribi poſſe: id inter poſtulata collocatur.

§. 31. Quoniam igitur axiomatum & poſtulatorum veritas per intuitum definitionum, ex quibus fluunt, cognoſcitur; demonſtratione nulla indigent. Vera enim eſſe intelliguntur, quam primum realitas definitionum fuerit evicta. Et hoc intuitu *propoſitiones per ſe notæ*, item *ex terminis manifeſtæ* dicuntur.

§. 32. Multi hac axiomatum proprietate abutuntur, dum præmiſſas ſyllogiſmorum, quas probare neſciunt, pro axiomatibus venditant. Hinc videas in axiomatum numerum referri propoſitiones, quas ſine probatione non admittunt intelligentes. Equidem negandum non eſt, ipſum *Euclidem*, qui in demonſtrando ſe virum præſtitit, propoſitiones utique demonſtrabiles in axiomatum numerum retuliſſe, propterea quod æqualitatis, congruentiæ, lineæ rectæ aliarumque rerum notiones explicare non poterat: monuimus tamen jam in ſuperioribus (§. 11.) ipſum non ſuppoſuiſſe niſi propoſitiones, quarum certitudo ſtatim cuique patet per recordationem vel maxime confuſam eorum, quæ olim ſæpius experti ſumus aut etiamnum, ſi ita viſum fuerit, denuo extemplo experiri poſſumus, immo quibus in judicando tantum non quotidie utuntur omnes, quale e. gr. eſt, quod eidem tertio æqualia ſint æqualia inter ſe; item quod figuræ & lineæ rectæ ſibi mutuo congruentes ſint æquales. *Euclidis* igitur exemplum abuſum, quem taxamus, minime tuetur.

§. 33. Notandum nimirum, eo minorem fieri axiomatum numerum, quo ſufficientius notiones evolvuntur. Immo ſi verum fateri fas eſt, vera axiomata non ſunt niſi propoſitiones identicæ.

§. 34. Cum axiomatibus & poſtulatis etiam experientiæ nonnunquam confunduntur. *Experiri* autem dicimur, quicquid ad perceptiones noſtras attenti cognoſcimus, e. gr. dum accenſa candela conſpicua fieri videmus, quæ ante non apparebant.

§. 35. Experientiæ itaque ſunt rerum ſingularium, quoniam nonniſi res ſingulares percipimus. Quamobrem ad illas provocans caſum ſingularem in medium proferre tenetur, niſi vel ſenſui, vel memoriæ fuerint obviæ: id quod in Matheſi exactiſſime obſervatur. Neque enim e. gr. in Aſtronomia Solis orientis & occidentis obſervationes recenſentur, utpote quotidianæ ac omnibus ſatis notæ. Diametri vero apparentis Planetarum obſervationes a diverſis Aſtronomis tempore diverſo diverſisque inſtrumentis celebratæ fideliter referuntur, cum non in cujusvis poteſtate exiſtant.

§. 36. Mathematici quoque experi-

perientias a concluſionibus inde deductis accurate diſtinguunt, aliis ut plurimum has cum iſtis confundentibus. E. gr. Quod candela accenſa corpora, quæ ante non apparebant, in conſpectum prodeant, per experientiam innoteſcit. Quodſi vero perpendens, lumen in cauſa eſſe, cur tenebris diſcuſſis appareant & una expendens rerum naturalium eodem modo ſe habentium eundem eſſe effectum infero; quicquid lumine colluſtratur, videri poteſt: hæc propoſitio non in experientiarum, ſed concluſionum per legitimam conſequentiam inde derivatarum numerum referenda.

§. 37. Iſtiusmodi concluſiones omiſſis experientiis commemorantur, ſi modus, quo ex his eliciuntur, omnibus fuerit cognitus atque perſpectus. E. gr. Maximam Solis declinationem non immediate metimur, ſed ex data elevatione Æquatoris & altitudine meridiana Solis in ſolſtitio invenimus. Proprias igitur de ea obſervationes traditurus, non altitudinem Solis meridianam in ſolſtitio obſervatam annotet opus eſt, ſed ſufficere poteſt, ut ipſam declinationem ſtatim indicet. Si enim conſtet, quantam elevationem Æquatoris aſſumſerit, nec quanta meridiana fuerit altitudo Solis ignoratur. Quod ſi vero non appareat, quomodo propoſitio data ex prævia quadam experientia eliciatur; caſus ſingularis omnino adducendus, ut ratio deductionis ad examen revocari poſſit. Quod enim aliquid perceperis, cum demonſtrare nequeas; ut credatur, jure poſcis: ſed quomodo unum ex altero deductum fuerit, cum rationis examini ſubſit, ut fides deductis habeatur, ſine ratione flagitas.

§. 38. Propoſitio theoretica ex pluribus definitionibus inter ſe collatis eruta *Theorema* appellatur. E. gr. Si in Geometria triangulum cum parallelogrammo ſuper eadem baſi & ejusdem altitudinis confertur, & partim immediate ex ipſis eorundem definitionibus, partim ex aliis ipſorum proprietatibus jam ante erutis infertur; parallelogrammum eſſe trianguli duplum: ea propoſitio in theorematum numerum referenda.

§. 39. Duo autem ſunt, quæ in omni theoremate attentionem merentur, *Propoſitio* nempe atque *Demonſtratio*. Iſta quidem enunciatur, quid rei cuidam ſub certis conditionibus convenire poſſit, quid non: in hac autem rationes exponuntur, ob quas intellectus illud ipſi convenire concipere valet.

§. 49. Abſolute poſſibile non eſt niſi ens a ſe: reliqua vero omnia tantum admiſſo alio poſſibilia eſſe intelliguntur, hoc eſt, nil eorum

eſt ſine quadam conditione. Hæc igitur in propoſitione una exprimenda. E. gr. Triangulum eſt dimidium parallelogrammi, ſi baſes & altitudines fuerint ſigillatim æquales. In propoſitione itaque tam baſium, quam altitudinum æqualitas exprimenda. Hinc quælibet propoſitio in *Hypotheſin* & *Theſin* commode diſtinguitur: quarum iſta conditiones recenſet, ſub quibus aliquid affirmatur, vel negatur; hæc vero complectitur, quod vel affirmatur, vel negatur. E. gr. in propoſitione allata hypotheſis eſt, *ſi triangulum & parallelogrammum ſuper æquali baſi & ejusdem altitudinis exiſtant*; theſis autem, *illud hujus dimidium eſt*.

§. 41. Notandum vero, ſi in ipſa rei definitione conditiones, de quibus dixi, continentur, hypotheſin diſtincte non exprimi. E. gr. Si tres in triangulo anguli 180. graduum dicantur; hypotheſi carere videtur propoſitio: quæ tamen ſtatim compareret, ſi pro voce trianguli definitionem ejus ſubſtituas. Ita enim habet propoſitio: ſi quædam figura tribus lineis rectis terminatur, tres habet angulos junctim ſumtos duobus rectis æquales. En hypotheſin, quæ urget, ut tres lineæ rectæ ſpatium comprehendant.

§. 42. Datur autem in propoſitione affirmativa neceſſarius nexus inter hypotheſin atque theſin; in negativa autem nullus concipi poteſt, ſed hæc illi repugnat. Quoniam ſcilicet in ſubjecto deprehenditur, quod hypotheſis involvit; ei quoque convenire debet, quod in theſi continetur. E. gr. in hoc theoremate, quod *triangulum ſit dimidium parallelogrammi ſuper eadem baſi & ejusdem altitudinis*, primum triangulo tribuimus baſin & altitudinem baſi ac altitudini parallelogrammi æquales; dein aſſerimus, quod ſit parallelogrammi dimidium. Poſterius concipitur propter prius.

§. 43. Nexum inter theſin & hypotheſin in propoſitionibus affirmativis; repugnantiam in negativis *demonſtratio* manifeſtat. Eorum igitur definitiones, quæ in hypotheſi ac theſi continentur, eorundemque proprietates ex iſtis derivatæ aut aliunde cognitæ demonſtrationum principia exiſtunt. Quoniam vero in Matheſi principia non admittuntur, niſi quæ ante fuerunt evicta; definitiones ac propoſitiones, quibus demonſtrationes ſuperſtruuntur, citari ſolent, partim ut appareat, genuina principia adhiberi; partim ut ignaris conſtet, unde ipſorum certitudo haurienda.

§. 44. Enimvero citationes definitionum, axiomatum, poſtulatorum, theorematum & problematum

tum non exiguum habent uſum, nec ſine ratione in Matheſi ſingulis cogitationum generibus ſingula nomina imponuntur. Demonſtratio namque non convincit niſi principiis demonſtrandi extra dubitationis aleam poſitis. Quamobrem ex citationibus liquet, quænam tanquam vera ſupponenda ſint, antequam veritatis propoſitionis datæ convinci poſſis. Et quoniam definitiones primi conceptus exiſtunt, axiomata vero ex iis immediate deducuntur, theoremata vero vel immediate, vel mediate ex iisdem derivantur; ex nomine veritatis cujuslibet, ad quam in demonſtratione provocatur, ſtatim addiſcitur, utrum multa ſupponenda ſint nec ne, & quo ordine ſit procedendum, ut convictio locum habeat. Immo cum ad veritatem definitionum, axiomatum & poſtulatorum, theorematum & problematum dijudicandam peculiaribus artificiis opus ſit; nomina veritatum citatarum ſimul methodos in memoriam revocant, quibus principia demonſtrandi perſuadeas convincendo.

§. 45. Non alia vero eſt ratio ex principiis concluſiones inferendi, quam quæ in omnibus libellis Logicis, ubi de ſyllogiſmo agitur, dudum expoſita. Sunt enim demonſtrationes Mathematicorum congeries quædam enthymematum, ita ut omnia vi Syllogiſmorum concludantur, omiſſis ſaltem præmiſſis, quæ vel ſponte meditanti occurrunt, vel per citationes in memoriam revocantur. Perfecta autem ut ſit demonſtratio, præmiſſæ ſyllogiſmorum novis ſyllogiſmis tamdiu probandæ ſunt, donec perveniatur ad ſyllogiſmum, in quo præmiſſæ ſunt vel definitiones, quas jam conſtat eſſe poſſibiles, vel propoſitiones aliæ identicæ.

§. 46. Equidem demonſtratu haud difficile foret, genuinam demonſtrationem, quæ convictionem plenariam pariat, fieri non poſſe, niſi cogitationes noſtræ juxta regulas ſyllogiſticas dirigantur; his tamen ambagibus in præſenti opus non eſt. Cum enim de quæſtione facti diſputemus; exempla allegaſſe ſufficit. Scilicet non ignotum eſt, *Clavium* demonſtrationem propoſitionis primæ elementi primi *Euclidis* in ſyllogiſmos reſolviſſe: immo *Herlinum* atque *Daſipodium* ſex priora elementa *Euclidis* & *Heniſchium* integram Arithmeticam per ſyllogiſmos in forma exhibitos demonſtraſſe.

§. 47. Equidem non ignoro, eſſe hac noſtra præſertim ætate non paucos, qui ſibi perſuadent, demonſtrationum Mathematicarum formam a legibus ſyllogiſmorum abhorrere, multo minus concedere, illas vim omnem ad convincen-

dum ab his unice habere; ſed nec me latet, contrarium videri Viris non modo præclara judicii vi pollentibus, ſed & attentione magis ſevera utentibus, quorum autoritas me permovit, ut eam in rem penitius inquirerem & ſic præjudicium ex præcipitantia in judicando ortum cognoſcerem. Fatetur certe *Leibnitius* (*) vir in Matheſi & omni eruditione reliqua ſummus, *firmam eſſe demonſtrationem, quæ præſcriptam a Logica formam ſervat.* Similiter *Johannes Walliſius*, Mathematicus profundus, (**) agnoſcit, *id quod in Matheſi proponitur probandum ſyllogiſmi unius pluriumve ope deduci.* Immo ingenioſiſſimus etiam *Hugenius* (***) obſervavit, *paralogiſmos in Matheſi ſæpius vitia formæ exiſtere.* Verum enimvero ne autoritatibus magis, quam rationibus pugnare videar (quanquam in hoc argumento maximum pondus habeat tantorum virorum autoritas); fontes præjudicii vulgaris retegere libet. Quamdiu ſcilicet in Matheſi verſamur, figuris & characteribus in ratiocinando juvamur, ex quarum inſpectione non minus, quam ex aliarum propoſitionum citatione multæ præmiſſæ ſyllogiſmorum ſupplentur: ad quod ſi non ſatis attendatur, quam ſancte in demonſtrationibus Mathematicis leges ſyllogiſmorum cuſtodiantur non apparet.

§. 48. *Problemata* facienda proponunt & tribus partibus conſtant, *Propoſitione* ſcilicet, *Reſolutione* ac *Demonſtratione.* In propoſitione, quid fieri debeat, indicatur. In reſolutione ſinguli actus ordine decenti recenſentur, quibus efficitur, quod erat faciendum. Denique in demonſtratione evincitur, factis iis, quæ reſolutio præcipit, effectum intentum obtineri. Quoties itaque problema demonſtrandum, in theorema convertitur, cujus hypotheſin reſolutio, theſin vero propoſitio conſtituit. Generalis enim omnium problematum demonſtrandorum (ut jam innuimus) tenor hic eſt: Factis iis, quæ reſolutio præcipit, illud quoque efficitur, quod erat faciendum. Quare non opus eſt, ut de problematibus plura dicantur.

§. 49. Rationes ſubinde non deſunt, cur ad caſus ſpeciales applicentur propoſitiones generales, & ex quibusdam propoſitiones ſæpe alias immediata conſequentia deducere licet. Quæ utroque modo eruuntur propoſitiones *Corollaria* nuncupantur.

§. 50. Primum corollariorum genus demonſtratione non indiget.

(*) Acta Erudit. A. 1684. p. 541. conf. Eſſais de Theodicée p. 37. 40. 41. 73. (**) Operum Mathem. Vol. 3. f. 180, hoc eſt Logic. lib. 3. c. 22. (***) Acta Erudit. A. 1711. p. 477.

get. Quod enim in genere de omnibus in univerſum caſibus demonſtratum fuit, de hoc vel iſto in ſpecie ut denuo demonſtretur opus non eſt. E. gr. ubi de omnibus triangulis oſtenſum, tres angulos eorum una ſumtos duobus rectis æquari; idem in ſpecie de triangulis rectangulis confirmari haud debet. Aſt alterum corollariorum genus demonſtrationem requirit. Quotiescunque nimirum ex aliis propoſitionibus aliquid infertur, ratio illationis indicanda. E. gr. Si theoremati, cujus modo mentionem feci, hoc corollarium ſubjungatur; *in triangulo rectangulo unus ſaltem actu rectus eſſe poteſt*: ratio illationis non negligenda, quod ſcilicet, poſitis duobus actu rectis, tertius nihilo æqualis foret.

§. 51. In *Scholiis* denique tam definitionibus, quam propoſitionibus earumque corollariis ſubjungi ſolitis, obſcura declarantur, ad dubia reſpondetur, uſus doctrinarum indicatur, hiſtoria ac fontes inventionum deſcribuntur, &, ſi qua alia ſcitu nec injucunda, nec inutilia occurrunt, inſeruntur.

§. 52. Explicatam hactenus methodum qui probe perpendit, ejus univerſalitatem haud dubie agnoſcet nec diffitebitur, ſine ea ad ſolidam rerum cognitionem perveniri haud quaquam poſſe. Dicitur vero *Methodus mathematica*, immo ſæpius *Geometrarum methodus*, quia huc usque Mathematici fere ſoli, in Geometria inprimis, ejus leges ſancte cuſtodiverunt. Quanquam enim non defuerint, qui eandem aliis diſciplinis applicare ſtuduerunt; conatui tamen ipſorum eventus minime reſpondit. Etenim nunc notiones non ſatis evolverunt, nunc ſine probatione aſſumſerunt, quæ maxime probari debebant, nunc per ſaltum ratiocinati ſunt, inferentes nimirum, quæ nullo argumento inferri poſſunt.

§. 53. Explicatæ methodi legibus cum ex aſſe ſatisfiat in Matheſi præſertim pura, non ex vano prædicatur, quod Mathemata judicium acuant, hoc eſt, quod eorum cultores promptitudinem acquirant veritatem quamlibet, ad quam cognoſcendam animum appellunt, accuratius, quam alii ſolent, dijudicandi. Exercitio enim comparatur judicandi etiam ac ratiocinandi habitus, quale demonſtrationum mathematicarum meditatio cenſeri debet.

§. 54. Fructus igitur, quem ex ſtudio Matheſeos maximum percipere licet, participes non fiunt, quotquot praxes quasdam mathematicas aliasque parum mathematici habentes, vulgo tamen ad eandem referri ſolitas, addiſcunt. Licet

cet enim in vita communi utiles exiſtant; neminem tamen judicii acumine ac inveniendi habitu beant, quia *per* §. *præc.* hæc non niſi a ſeria demonſtrationum meditatione expectare licet.

§. 55. Supereſt ut ad objectiones duas reſpondeam, quas contra methodum Geometrarum nonnulli afferre ſolent, præſertim cum ſatis prævideam non defuturos, qui easdem contra Elementa mea Matheſeos urgebunt. Nempe vitio vertitur Geometris, 1. *quod multa probent, quæ probatione non indigent*: 2. *quod ordinem, quo generaliora & ſimpliciora ſpecialibus & compoſitis præponi neceſſe eſt negligant, nec ad unum argumentum pertinentia uno loco abſolvant.*

§. 56. Objectioni primæ ut ſatisfiat, explicandum eſt, quales eſſe debeant propoſitiones, ut probatione non indigeant: id quod ex indole demonſtrationum redditur manifeſtum. Diximus nimirum ſuperius, præmiſſas ſyllogiſmorum tamdiu continuandas eſſe, donec ad definitiones, quas jam conſtat eſſe poſſibiles, & propoſitiones identicas perveniatur. Sine ratione itaque non admittuntur niſi propoſitiones identicæ ac experientiæ claræ, in quibus notiones primæ fundantur. Reliquæ propoſitiones omnes ſunt demonſtrandæ. Oſtendant igitur adverſarii, *Euclidem* aut Geometram alium propoſitiones identicas & notiones in experientiis claris fundatas demonſtraſſe. Quamdiu vero hujusmodi exemplum nullum in medium afferre valent; Geometras reprehendere deſinant, quod probent, quæ probatione non indigere ipſis videntur, & potius diſcant, quod in demonſtrando nunquam nimis accurati eſſe poſſimus, præſertim ubi extra Matheſin verſamur, nec ut ibi figuris ac characteribus in ratiocinando juvamur.

§. 57. Quoniam igitur rigor in demonſtrando laudi ducitur Geometris (§. 56.); nec ordo jure taxatur, quo ſine in demonſtrando accurati eſſe nequimus. Eo nimirum ordine ſingula proponenda ſunt, quo unum ex altero facilius infertur. Quare cum ſatis experiamur, id fieri minime poſſe, ſi in unum cumulum congerantur, quæ de ſubjecto eodem cognoſci poſſunt; *ord. ſcholæ* Philoſophis vulgaribus relinquendus & a Geometris aliisque, quibus res profundius meditari datum eſt, *ordo naturæ* retinendus.

F I N I S.

Commentationis de Methodo.

ELEMENTA
ARITHMETICÆ.

PRÆFATIO.

NOn dubito fore aliquos, qui mirabuntur, quod elementa Matheſeos univerſæ conſcribens MATHESIN UNIVERSALEM prætermittam. Enimvero quam perperam nonnulli Matheſin univerſalem appellant, eam ego ab Arithmetica diverſam non agnoſco. Quantitates enim, quarum affectiones & relationes in ea conſiderant, pro numeris indeterminatis habeo: quæ etiam ratio eſt, cur non aliæ ipſarum, quam numerorum ſint affectiones ac relationes. Ea igitur, quæ in Matheſi univerſali vulgo tractari ſolent, ego in Arithmetica pertracto: quo rationum potiſſimum doctrina ſpectat. Calculum tamen numerorum indeterminatorum, quem LITTERALEM appellare ſolent, non integrum trado, quia in demonſtrationibus Arithmeticis & Geometricis integro opus non habeo. Plenior adeo explicatio ANALYSI reſervatur. Nec rationum doctrinam ope calculi hujus ſolius demonſtro, quia cum rigore demonſtrandi, quem mihi obſervandum propoſui, ea demonſtrandi ratio non ſubſiſtit, utpote in qua multa communiter ſine probatione aſſumuntur, quæ & a veteribus demonſtrata, nec mihi ſine probatione concedi poſſe viſa ſunt, ubi ſolidam doctrinam cordi habueris. Veram autem MATHESIN UNIVERSALEM in deſideratorum numero colloco, eam nempe, quæ leges metiendi generales & ad omnium rerum quantitatem determinandam menſuras convenientes præſcribit: nec reper-

tu adeo ſacilem judico. Cæterum quæ commodius ope calculi litteralis eruuntur, nec ad communis Geometriæ elementa intelligenda neceſſaria ſunt; ea ad Analyſin rejeci. Tyrones ſub initium praxes Arithmeticas ſolas cum definitionibus ſibi familiares reddere debent, theorematibus problematumque demonſtrationibus omiſſis. In calculo exercitati theoremata ad multa exempla numerica applicent, ut non modo eorum ſenſum clare perſpiciant, ſed eadem quoque memoriæ firmiter infigent, quo in promptu ſint, quoties iis vel ad demonſtrandum, vel ad inveniendum opus eſt. Iis intellectis problematum demonſtrationes expendere, ac his perceptis inoffenſo pede ad theorematum demonſtrationes progredi licebit. Abſit autem, ut quis arbitretur, omnibus calcandam eſſe hanc ſemitam. Quorum enim eſt major mentis acies, congenita vel aliis ſtudiis acquiſita, & facilius conſervatur attentio; elementa integra eo ordine perlegere poſſunt, quo conſcripta ſunt. Uſus Arithmeticæ per diſciplinas reliquas omnes ſe diffundit. Ea igitur reliquis omnibus præmittenda fuit & ante eas cum cura addiſcenda eſt. Quantus Arithmeticæ in vita civili uſus ſit, experientia loquitur: quantus in Phyſicis & aliis Philoſophiæ partibus, experientur quotquot Matheſi abſoluta ſolidam extra Matheſin doctrinam quærere allaborabunt. Quantum denique in perficiendo intellectu poſſit, in ipſa pertractatione hinc inde annotavimus, &, ſiquis culturam convenientem ſtudio Arithmetico non negaverit, experientia optima erit Magiſtra.

ELE-

ELEMENTA ARITHMETICÆ.

CAPUT I.

De

PRINCIPIIS ARITHMETICÆ.

DEFINITIO 1.

1.

Rithmetica eſt numerorum ſcientia. *Pars* ejus *practica* eſt ſcientia computandi, hoc eſt, ex quibusdam numeris datis inveniendi alios, quorum ad cognitos relatio datur; ut ſi fuerit inveniendus numerus, qui duobus 6. & 8. junctim ſumtis æqualis eſt.

SCHOLION.

2. *Patet adeo, Arithmeticam practicam eſſe methodum inveniendi ſpecialem. Ab ea igitur, ſi rite meditemur, regulas inveniendi generales abſtrahere licet. Particularis enim methodus in applicatione regularum generalium conſiſtit. Dederunt aliqua huc ſpectantia* Carteſius *cum in Tractatu de methodo, tum in iis, quæ de ingenii directione inter poſthuma habentur, &* R. P. Malebranchius *in egregio opere de inquirenda veritate.*

DEFINITIO 2.

3. *Unum* eſt, quod ita eſt aliquid, ut aliud præterea idem eſſe nequeat. Illuſtris *Leibnitius* unum ſic definit: Si A ſit B, nec præterea D ponatur B, niſi A & D idem ſint, ponetur A unum.

DEFINITIO 3.

4. *Unitas* eſt abſtractum, per quod dicimus unum.

DEFINITIO 4.

5. *Unitates eædem* ſunt, quæ per eandem notionem agnoſcuntur: *diverſæ* ſunt, quæ agnoſcuntur per diverſas.

SCHOLION.

6. *Ponamus e. gr. A eſſe globum lapideum, B ſimiliter eſſe globum lapideum alium: erunt A & B unitates eædem. Sed ſi A fuerit globus lapideus, C plumbeus: erunt A & C unitates diverſæ. Quodſi A, B & C tantum ut globos conſideres, erit etiam C eadem unitas cum A & B.*

DEFINITIO 5.

7. Si A ſit unum, B ſit unum, C ſit unum, D ſit unum &c. nec tamen B, C, D &c. ſint idem cum A; erunt A, B, C, D &c. *Plura* ſeu *Multa.*

DEFINITIO 6.

8. *Multitudo* eſt abſtractum, per quod dicuntur plura.

DEFINITIO 7.

9. Si A ſit idem cum B, C & D ſimul ſumtis, dicetur A *Totum*; B vero C & D dicentur ejus *Partes*, & intuitu partis B reliquas C & D &c. *Complementum ad Totum* vocabimus.

DEFINITIO 8.

10. Quicquid refertur ad unita-

tem ut linea recta ad aliam rectam, *Numerus* dicitur.

SCHOLION 1.

11. *Nempe ſi pro unitate linea recta ſumatur; numerus quoque exprimi poteſt per rectam: id quod infra in Geometria & Analyſi abunde patebit.*

SCHOLION 2.

12. *Numerus autem adeo generaliter definiendus, ut ſub eadem definitione numeros cum integros, tum fractos, tam rationales, quam irrationales comprehendere valeamus.*

DEFINITIO. 9.

13. *Numerus determinatus* eſt, qui refertur ad unitatem datam, ut ternarius. *Indeterminatus* eſt, qui refertur ad unitatem vagam, diciturque *Quantitas.*

SCHOLION.

14. *In quantitatum numerum refertur latitudo fluvii. Quodſi quaſiveris quanta ea ſit; quantitatem concepturus unitatem quandam ad arbitrium aſſumit & illius ad hanc relationem quærit, ac pro diverſa unitate aſſumta per diverſum numerum determinatum latitudinem fluvii enunciat. Latitudo igitur fluvii inter quantitates collocatur, quatenus refertur ad unitatem vagam: qua determinata, per numerum determinatum diſtincte intelligitur.*

DEFINITIO 10.

15. *Æqualia* ſunt, quorum unum alteri ſalva quantitate ſubſtitui poteſt. *Inæqualia* ſunt, ſi pars unius alteri toti ſubſtitui poteſt.

HYPOTHESIS 1.

16. *Signum æqualitatis eſt* $=$.

SCHOLION.

17. *Hoc ſigno primus uſus eſt* Hariotus, *Anglus* (a), *& hodie pleriquæ eodem utuntur. Nonnulli cum* Carteſio *adhibent Signum ſequens* ∞; *quidam etiam alia. Apud Autores* Harioto *antiquiores nullum æqualitatis ſignum occurrit.*

DEFINITIO 11.

18. *Majus* eſt, cujus pars alteri toti æqualis eſt: *Minus* vero, quod parti alterius æquale.

COROLLARIUM.

19. Inæqualium itaque alterum majus; alterum minus eſt (§. 15.)

HYPOTHESIS 2.

20. *Signum majoritatis eſt* $>$; *minoritatis* $<$.

SCHOLION.

21. *Signis his itidem primus uſus eſt* Hariotus (b). *Eum ſecutus celeberrimus* Wallifius (c): *nuper etiam* R. P. Lamy (d). *Aliis alia placent: plerisque nulla ſunt.*

DEFINITIO 12.

22. *Similia* ſunt, quæ non poſſunt diſtingui niſi per compræſentiam, hoc eſt, vel immediate unum alteri, vel utrique idem aliquod tertium, applicando. *Diſſimilia* ſunt, quæ diſtingui poſſunt, etiamſi compræſentia non ſint.

COROLLARIUM 1.

23. Nihil ergo in uno Similium deprehenditur, quod non æque deprehendatur in altero, hoc eſt, ſi omnia notaveris

(a) In Artis Analyticæ praxi Sect. 1, f. 10. (b) Loc. cit. (c) Vide Arithmet. c. 35. f. 185. Vol. 1. Oper. Mathem. (d) Elemens de Geometrie lib. 3. ſect. 5 p. 177.

veris in A, quæ a ſe invicem diſcerni & ſine alio aſſumto intelligi poſſunt; notaveris ſimiliter omnia in B, quæ eodem ut ante modo cognoſcere licet; & A fuerit ſimile B: erunt omnia in A eadem cum omnibus in B.

COROLLARIUM 2.

24. Cum quantitas ſine alio aſſumto per ſe non intelligi, ſed tantum dari poſſit (§. 13. 14); Similia, ſalva ſimilitudine, quantitate differre poſſunt (§. 23.) Immo quia in ſimilibus nihil reperitur, quo differunt, præter quantitatem (§. 23); quantitas eſt diſcrimen internum ſimilium.

SCHOLION.

25. *Similitudinis notio ab ingenioſiſſimo* Leibnitio *primum eruta intellectu facilior evadit, ſi in exemplum aliquod aciem ingenii intendamus. Ponamus itaque duo horologia portatilia prorſus inter ſe ſimilia eſſe. Illorum unum poſſideat* Grachus; *alterum* Cajus. *Quodſi* Cajus *in præſentia* Grachi *horologium ſuum depromat, næ is attonitus ſibi perſuadebit, horologium ſuum eſſe, quod* Cajus *manu tenet; at diverſum a ſuo agnoſcet, ubi & ſuum depromit, hoc eſt, horologium* Caji *a ſuo diſtinguit* Grachus *per compræſentiam, unum nempe alteri immediate applicando. Sed ſi locorum vel temporum intervallum interduo ædificia ſimilia interjectum menti una cum ipſis exhibetur; vel ſi dimenſiones templorum aut ſtatuarum ſimilium ad ſtaturam noſtram aut menſuram datam aliam referimus; ſimilia animo compræſentia ſiſtuntur idem tertium utrique eorum applicando.*

HYPOTHESIS 3.

26. *Signum ſimilitudinis eſt* ∽.

SCHOLION.

27. *Commendatur in Miſcellaneis Berolinenſibus* (e) *Communiter nullo utuntur.*

DEFINITIO 13.

28. *Pars aliquota eſt*, quæ aliquoties repetita integro fit æqualis. *Pars* vero *aliquanta* eſt, quæ repetita aliquoties ſemper vel major, vel minor eſt toto.

DEFINITIO 14.

29. *Commenſurabilia* ſunt, quæ partem aliquotam communem habent, vel quorum unum eſt pars aliquota alterius. *Incommenſurabilia* ſunt, quorum nulla datur pars aliquota communis.

DEFINITIO 15.

30. *Quantitates homogeneæ* ſunt, quarum una aliquoties ſumta alteram ſuperare poteſt, ſeu quarum una ab altera vel ſemel, vel aliquoties ablata tandem vel nihil, vel ſe minus relinquit. *Heterogeneæ* vero ſunt, quarum una aliquoties ſumta alteram ſuperare nequit.

DEFINITIO 16.

31. *Numeri inter ſe homogenei* ſunt, qui ad eandem; *heterogenei*, qui ad diverſas unitates referuntur.

SCHOLION.

32. *Omnis nempe numerus determinatam quandam unitatem ſupponit. Determinatur ea per notionem, ad quam in numerando reſpicimus* (§. 5). *E. gr. ea globi proprietas eſt, qua*

(e) Part. 3. p. 159.

quæ ab aliis corporibus diſtinguitur, quod ſingula puncta ſuperficiei a centro æqualiter diſtent. Quod ſi igitur hanc unitatis notam conſtituas; ſingula corpora, quibus eadem convenit, unitatis naturam induunt, ſuntque unitates eædem, quatenus ſub hac notione continentur (§.cit.) *Quodſi vero globos porro diſtinguas e.gr. per materiam, ex qua conſtant, & alios ut aureos, alios ut plumbeos ſpectes; quæ antea eædem erant unitates, nunc diverſæ evadunt. Hinc tres globi aurei & ſex globi aurei ſunt numeri homogenei inter ſe; ſed tres aurei & ſex argentei ſunt inter ſe heterogenei.*

DEFINITIO 17.

33. *Numerus integer* eſt, qui refertur ad unitatem tanquam totum ad partem.

DEFINITIO 18.

34. *Numerus fractus* eſt, qui refertur ad unitatem tanquam pars ad totum.

DEFINITIO 19.

35. *Numerus rationalis* eſt, qui unitati commenſurabilis.

DEFINITIO 20.

36. *Numerus rationalis integer* eſt, cujus pars aliquota eſt unitas.

DEFINITIO 21.

37. *Numerus rationalis fractus* eſt, qui unitatis parti aliquotæ aut aliquot partibus aliquotis æqualis eſt.

DEFINITIO 22.

38. *Numerus rationalis mixtus* eſt, qui conſtat ex integro & fracto ſeu ex unitate & fracto.

DEFINITIO 23.

39. *Numerus irrationalis ſive ſurdus* eſt, qui unitati incommenſurabilis.

HYPOTHESIS 4.

40. *Si in numerando ad denarium pervenitur, initium numerandi repetatur, niſi quod denariorum numerus una exprimatur.*

COROLLARIUM.

41. Decem ergo nominibus opus eſt ad decem numeros rationales primos indigitandos & præterea aliis, quibus decadum multitudo denotetur.

SCHOLION.

42. *Lex numerandi, quam in hypotheſi tradimus, ubivis gentium recepta, & cum a prima ætate eidem adſueverimus indiſpenſabilis neceſſitatis videtur. Enimvero non modo* Erhardus Weigelius *in Arithmetica Tetractyca oſtendit, fieri quoque poſſe, ut in numerando non ultra quaternarium progrediamur; ſed &* Illuſtr. Leibnitius (f) *Arithmeticam binariam excogitavit, nonniſi duabus notis* 1 *et* 0 *utentem ac numerorum proprietatibus inveſtigandis aptam: cujus aliquod ſpecimen dedit* Cl. Dangicourt *circa progreſſiones Arithmeticas* (g). *Nimirum quoniam Arithmetica Dyadica duabus tantum notis utitur, leges progreſſionum numerorum dyadice expreſſorum facillime omnium deteguntur.* A*rithmetica autem decadica, qua vulgo utimur, denario digitorum numero procul dubio originem debet: digitis enim in computando utimur*

(f) Hiſtoire de l' Academie Royale des Sciences An. 1703. p. m. 105. & ſeqq.
(g) In Miſcellaneis Berolinenſ. p. 336. & ſeqq.

mur, quamdiu in computo nondum ſatis verſati.

DEFINITIO 24.

43. Decem illa nomina, quibus in numerando utimur, ſunt: *unum, duo, tria, quatuor, quinque, ſex, ſeptem, octo, novem, decem.* Iidem numeri generali *Unitatum* nomine inſigniri ſolent, nec opus eſt ut definiantur. Ex decem unitatibus componitur una *Decas.* Duæ decades dicuntur *viginti*; tres *Triginta*; quatuor *Quadraginta*; quinque *Quinquaginta*; ſex *Sexaginta*; ſeptem *Septuaginta*; octo *Octoginta*; novem *Nonaginta.* Ex decem decadibus componitur *Centenarius*; ex decem centenariis *Millenarius*; ex mille millenariis *Millio*; ex mille millenariis millionum *Billio*; ex mille millenariis billionum *Trillio* &c.

SCHOLION.

44. *Vocibus millionum, billionum, trillionum &c. utimur ad confuſionem in numeris magnis evitandam, quorum diſtinctis notionibus formandis inſerviunt.*

HYPOTHESIS 5.

45. *Notæ numericæ conſtituantur novem ſequentes :* 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. *Ut vero non ſolum unitates, ſed & decades, centenarios, millenarios &c. indigitare poſſimus, valor ipſis tribuatur localis, ita ut ſolitariæ vel in loco dextimo poſitæ unitates, in ſecundo decades, in tertio centenarios, in quarto millenarios &c. denotent. Loca vacua repleantur cyphra* 0, *quæ ſcilicet ſit* Nullitatis *nota.*

COROLLARIUM.

46. Numerorum igitur partes hoc ordine ſe invicem excipiunt;

Unitates	
Decades	Simplices.
Centenarii	
Unitates	
Decades	Millenariorum.
Centenarii	
Unitates	
Decades	Millionum.
Centenarii	
Unitates	
Decades	Millenariorum Millionum.
Centenarii	
Unitates	
Decades	Billionum.
Centenarii	
Unitates	
Decades	Millenariorum Billionum.
Centenarii	
Unitates	
Decades	Trillionum.
Centenarii	
Unitates	
Decades	Millenariorum Trillionum &c.
Centenarii	

SCHOLION 1.

47. *Characterum* Arithmeticorum *electio arbitraria. Hinc apud varias gentes varii occurrunt : ut inter alios docent* Georgius Heniſchius *in libello de numeratione multiplici, vetere & recenti, atque* Guil. Beveregius *in* Arithmeticæ *chronologicæ libro primo integro. Non tamen omnes æque commodi.*

Seligendi adeo ſunt, per quos numerus quantumvis magnus facillime exprimi & computus optime abſolvi poteſt. Quod autem notæ nunc uſitatæ reliquis præſtent, has cum illis conferentes experiuntur. Ab Arabibus inventa vulgo feruntur. Sed docuit celeberrimus Walliſius (h) *quod* Alſepadi *Arabs in Commentario ad* Tograi *poëma* Lamiat 'o l Ajam *dictum, inventionis gloriam Indis tribuat. Idem refert* (i), *quod Saraceni eas in Hiſpaniam attulerint, & quod ex Hiſpania in Galliam pervenerint ſtudio* Gerberti, *monachi Floriacenſis in Gallia, qui a variis dignitatibus Eccleſiaſticis tandem ad Pontificatum maximum nomine* Sylveſtri II. *circa* A. C. *999. evectus, ex ipſis ejus epiſtolis* A. *1636. Pariſiis recuſis probat.*

SCHOLION 2.

48. *Ex collatione diverſarum figurarum numeralium diſcant velim, qui artem inveniendi cordi habent, quantum momenti in eo ſitum ſit, ut ars characteriſtica perficiatur.*

PROBLEMA 1.

49. *Numerum ſcriptum enunciare, hoc eſt, cuilibet characteri valorem competentem aſſignare.*

RESOLUTIO.

1. Numerus propoſitus per commata dividatur in claſſes, tres notas unicuique aſſignando, initio a dextris facto.
2. Nota dextima claſſis tertiæ notetur lineola tranſverſa apici adſcribenda; dextima claſſis quintæ duabus; dextima ſeptimæ tribus &c.
3. Comma ſolitarium per millenarios, lineola tranſverſa una per milliones, duæ per billiones, tres per trilliones, &c. nota vero ſiniſtima claſſis uniuscujusque per centenarios, media per decades, dextima per unitates enuncietur (§. 46). *Sic factum eſt, quod petebatur.*

E. gr. Numerus ſequens

$2''', 125, 473'', 613, 578', 432, 597$

ita enunciatur: Duæ trilliones, centum & viginti quinque millia billionum una cum quadringentis ſeptuaginta tribus billionibus, ſexcenta & tredecim millia millionum una cum quingentis ſeptuaginta octo millionibus, quadringenta & triginta duo millia, quingenta & nonaginta ſeptem.

SCHOLION.

50. *Quantum conveniens terminorum uſus vires intellectus humani extendat; abunde perſpicient oculatiores, ſi ad præſens problema fuerint ſatis attenti.*

HYPOTHESIS 6.

51. *Quantitates aut numeros indeterminatos litteris Alphabeti minoribus a, b, c &c. vel etiam majoribus A, B, C &c. indigitamus.*

SCHOLION.

52. *Litteris majoribus uſus eſt* Vieta (k): *minores introduxit* Hariotus (l), *quem mox imitatus eſt* Carteſius (m) *& nunc ſequuntur plerumque omnes.*

HYPO-

(h) Arithmet. Oper. c. 9. f 48 Vol. I. Oper. Math. (i) in Tract. de Algebr. c. 4. f. 11. & ſeqq. Vol. II. Oper. Mathem. (k) in variis ſcriptis Analyticis, quæ inter Opera ejus habentur. (l) in Artis Analyticæ praxi. (m) in Geometria.

HYPOTHESIS 7.

53. *Fractiones per duos numeros exprimuntur, quorum alter alteri interjecta lineola ſubſcribitur. Eorum inferior, ſeu* Denominator, *indicat unitatem ſeu totum in partes diviſum; ſuperior vero, ſeu* Numerator, *numerat partes in caſu propoſito datas.* E. gr. Duæ partes tertiæ unius lineæ ita ſcribuntur $\frac{2}{3}$: ubi denominator 3 indicat, lineam eſſe in tres partes æquales diviſam; numerator 2 vero duas iſtiusmodi partes aſſignat.

SCHOLION.

54. *Neque vero mirentur tyrones, quod in numeris fractis numeratori denominator ſubſcribatur, qualis in integris non occurrit. Additur enim, ut appareat, quamnam partem aliquotam cum unitate communem habeat fractus, vi §. 37.*

DEFINITIO 25.

55. *Additio* eſt inventio alicujus numeri ex duobus vel pluribus homogeneis datis, qui datis junctim ſumtis æqualis eſt. Numeri dati dicuntur *ſummandi*; quæſitus autem *ſumma* vel *aggregatum*.

HYPOTHESIS 8.

56. *Signum additionis eſt* +, *quod per* plus *efferri ſolet.* Ita 3 + 4 denotat Summam ex 3 atque 4, & pronunciatur: 3 plus 4.

DEFINITIO 26.

57. *Subtractio* eſt inventio alicujus numeri ex duobus homogeneis datis, qui cum uno datorum, alteri æqualis eſt. Numerus, qui ſubducitur, dicitur *Subtrahendus*; alter, a quo ſubtractio fit, *Minuendus*; qui denique invenitur, *Differentia*.

HYPOTHESIS 9.

58. *Signum ſubtractionis eſt* —, *quod per* minus *efferri ſolet.* E. gr. 7—3 denotat differentiam inter 3 & 7, pronunciatur: 7 minus 3.

DEFINITIO 27.

59. *Multiplicatio* eſt inventio alicujus numeri ex duobus homogeneis datis, in quo toties continetur datorum unus, quoties unitas in altero. Numeri dati dicuntur *Factores*, item *Efficientes*; quæſitus *Factum*, item *Productum*. In ſpecie factorum alter, qui aliquoties ſumitur, vocatur *Multiplicandus*; alter vero, qui indicat, quoties ille ſumatur, *Multiplicator*.

COROLLARIUM.

60. Eſt itaque multiplicatio iterata ejusdem numeri additio (§. 55).

HYPOTHESIS 10.

61. *Signum multiplicationis eſt punctum unicum* (.) *inter factores duos medio loco poſitum, quod per* multiplicatum *effertur.* E. gr. 4.3 denotat factum ex 4 in 3; item 7. 5. 9 factum, cujus factores ſunt 7, 5 & 9. *Litteræ ſine ullo ſigno junguntur.* E. gr. *ab* denotat factum

ex *a* in *b*; *bcd* factum, cujus factores *b*, *c* & *d*.

DEFINITIO 28.

61. *Diviſio* eſt inventio alicujus numeri ex duobus homogeneis datis, in quo toties continetur unitas, quoties datorum unus in altero. Numerus, qui dividi debet, *dividendus*; alter, per quem fit diviſio, *diviſor*; qui denique indicat, quoties diviſor in dividendo contineatur, *Quotus* dicitur.

HYPOTHESIS 11.

63. *Signum diviſionis ſunt duo puncta* (:), *quæ per* diviſum *efferri ſolent.* E. gr. 8 : 4 denotat quotum ex diviſione 8 per 4 emergentem. Similiter *a* : *b* eſt quotus ex diviſione *a* per *b* prodiens.

DEFINITIO 29.

64. *Numerus par* eſt, qui bifariam ſive per 2 dividi poteſt, ut 4, 12, 16.

DEFINITIO 30.

65. *Numerus impar* eſt, qui a pari unitate differt, ut 3 differt unitate a 2, item a 4.

DEFINITIO 31.

66. Numerus A *metiri* dicitur numerum B, ſi ita dividit, ut quotus ſit numerus integer ſine fractione. Ita 2. metitur 8 per 4.

DEFINITIO 32.

67. *Numerus primus in ſe* eſt, quem ſola unitas metitur, ut 5, 7, 11.

DEFINITIO 33.

68. *Numerus compoſitus* eſt, quem præter unitatem alius numerus metitur. Ita 4 metitur 8 per 2, item 2 metitur 8 per 4.

DEFINITIO 34.

69. *Menſura numeri* eſt numerus, qui ipſum metitur. Ita 2 & 4 ſunt menſuræ numeri 8. *Menſura maxima numeri* eſt numerus maximus, qui ipſum metitur. Ita 4 eſt menſura maxima numeri 8.

DEFINITIO 35.

70. *Menſura communis duorum pluriumve numerorum* eſt numerus, qui ſingulos ſigillatim metitur. Ita 3 eſt communis menſura numerorum 12 & 24. *Maxima* dicitur, ſi fuerit numerus maximus, qui omnes metitur. Ita 12 eſt communis menſura maxima numerorum 12 & 24, 3 vero numerorum 9 & 12.

DEFINITIO 36.

71. *Numeri primi inter ſe* ſunt, qui nullam communem menſuram habent, præter unitatem. Ita 12 & 19 ſunt numeri primi inter ſe.

DEFINITIO 37.

72. *Numeri compoſiti inter ſe* ſunt, qui præter unitatem communem menſuram aliam habent. Ita 12 & 15 ſunt compoſiti inter ſe.

AXIO-

AXIOMA 1.

73. *Idem eſt æquale ſibimetipſi.*

SCHOLION.

74. *Hujus axiomatis ampliſſimus eſt in Analyſi uſus.*

AXIOMA 2.

75. *Quantitates homogeneæ aut æquales ſunt, aut inæquales* (§. 15).

THEOREMA 1.

76. *Totum eſt majus qualibet ſua parte.*

DEMONSTRATIO.

Cujus pars alteri toti æqualis eſt, id ipſum altero majus eſt (§. 18). Sed quælibet pars totius parti totius, hoc eſt, ſibi ipſi æqualis eſt (§. 73). Ergo totum qualibet ſua parte majus eſt.

SCHOLION.

77. *En exemplum Analyſeos perfectæ! Continetur enim demonſtratio ſyllogiſmo, cujus altera præmiſſa eſt definitio, altera vero propoſitio identica. Id vero Analyſeos perfectæ indicium eſt* (§. 45. de Meth.)

THEOREMA 2.

78. *Totum eſt æquale omnibus ſuis partibus ſimul ſumtis.*

DEMONSTRATIO.

Cum idem ſit æquale ſibimetipſi (§. 73), quod idem eſt cum partibus totius ſimul ſumtis, id iisdem æquale eſt. Sed totum idem eſt cum omnibus partibus ſuis ſimul ſumtis (§. 9): ergo iisdem æquale eſt. *Q. e. d.*

THEOREMA 3.

79. *Quæ æqualia ſunt eidem tertio, ea ſunt æqualia inter ſe.*

DEMONSTRATIO.

Sit A = C & B = C; dico eſſe A = B. Quoniam enim B = C *per hypoth.* B ſalva quantitate ſubſtitui poteſt ipſi C (§. 15). Subſtituatur adeo B ipſi C in caſu priore, ubi A = C: habebimus A = B. *Q. e. d.*

THEOREMA 4.

80. *Si æqualibus (A & B) æqualia (C & D) addas, aggregata (A + C & B + D) ſunt æqualia.*

DEMONSTRATIO.

A + C = A + C (§. 73). Sed quoniam C = D, *per hypoth.* poterit D ſubſtitui pro C (§. 15): quo facto, habemus A + C = A + D. Porro B + D = B + D (§. 73). Sed A = B, *per hypoth.* Ergo A ſubſtitui poteſt pro B (§. 15): quo facto, habemus B + D = A + D. Quare B + D = A + C (§. 79). *Q. e. d.*

THEOREMA 5.

81. *Quod uno æqualium majus vel minus eſt, etiam altero æqualium majus vel minus eſt.*

DEMONSTRATIO.

1. Sit A = B & C > A, dico eſſe C > B. Quoniam enim C > A, *per hypoth.* A parti ipſius C æquale eſt (§. 18), quæ dicatur P.

Porro cum ſit $A = B$, *per hypoth.* Erit etiam $P = B$ (§. 79). Ergo $C > B$ (§. 18). *quod erat unum.*

2. Sit $A = B$, & $C < A$, dico eſſe $C < B$. Quia $C < A$, *per hypoth.* parti hujus æquale eſt (§. 18), cujus complementum ad totum dicatur P. Cum adeo ſit $P + C = A$ (§. 78) & $A = B$, *per hypoth.* erit quoque $P + C = B$ (§. 79). Eſt itaque C parti ipſius B æqualis (§. 9); conſequenter $< B$ (§. 18). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 6.

82. *Si majori (B) & minori (A) idem (C) vel æqualia addas, aggregatum prius ($B + C$) majus eſt, poſterius vero ($A + C$) minus.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam $A < B$, *per hypoth.* parti hujus æquale eſt (§. 18). Componitur ergo B ex A & parte alia (§. 9), quæ dicatur P, eſtque adeo $B = P + A$ (§. 78). Quare cum etiam ſit $B + C = P + A + C$ (§. 80); erit $A + C$ pars ipſius $P + A + C$ (§. 9) & hinc $P + A + C > A + C$ (§. 76), conſequenter $B + C > A + C$ (§. 81). *Q. e. d.*

THEOREMA 7.

83. *Si æqualia (A & B) ab æqualibus (C & D) ſubtrahas, quæ relinquuntur ($C - A$ & $D - B$) æqualia ſunt.*

DEMONSTRATIO.

$C - A = C - A$ (§. 73). Sed quoniam $A = B$ *per hypoth.* ſalva quantitate B pro A ſubſtitui poteſt (§. 15). Quodſi ergo ſubſtituatur, habemus $C - A = C - B$. Similiter $D - B = D - B$ (§. 73). Sed quia $C = D$, *per hypoth.* ſalva quantitate C pro D ſubſtitui poteſt (§. 15). Quodſi ergo ſubſtituatur, habebimus $D - B = C - B$. Quamobrem $C - A = D - B$ (§. 79). *Q. e. d.*

THEOREMA 8.

84. *Si a majore (A) & minore (B) idem (C) vel æqualia ſubtrahas; reſiduum prius ($A - C$) majus eſt; poſterius ($B - C$) minus.*

DEMONSTRATIO.

Quia $B < A$, parti hujus æquale eſt (§. 18). Componitur ergo A ex B & parte alia (§. 9), quæ dicatur P. Itaque $A = B + P$. (§. 78), conſequenter $A - C = P + B - C$ (§. 83). Sed $B - C$ eſt pars ipſius $P + B - C$ (§. 9), conſequenter $P + B - C > B - C$ (§. 76). Ergo & $A - C > B - C$ (§. 79). *Q. e. d.*

THEOREMA 9.

85. *Si æqualia (A & B) per æqualia (m & n) multiplices; facta (mA & nB) æqualia ſunt.*

DEMONSTRATIO.

$mA = mA$ (§. 73). Sed quoniam $A = B$, *per hypoth.* ſalva quantitate B pro A ſubſtitui poteſt (§. 15) & ſic

& ſic m A $=$ m B. Ob eandem rationem m B $=$ n B. Quare m A $=$ n B (§. 79). *Q. e. d.*

THEOREMA 10.

86. *Si æqualia (A & B) per æqualia (C & D) dividas, quoti (A: C & B: D) æquales ſunt.*

DEMONSTRATIO.

A: C $=$ A : C (§. 73). Sed quia A $=$ B, *per hypoth.* ſalva quantitate B pro A ſubſtitui poteſt (§. 15). & ſic A : C $=$ B : C. Ob eandem rationem B : D $=$ B : C. Quare A : C $=$ B : D (§. 79). *Q. e. d.*

SCHOLION.

87. *Non dubito fore multos, quibus ridiculum videbitur aut minimum ſuperfluum talia demonſtrari, quorum caſus ſingulares in numeris præſertim rationalibus per ſe evidentes videntur: Ego vero has demonſtrationes maximi facio, tum quia prima & ſecunda (id quod ſupra §. 15. annotavimus)* Analyſeos perfectæ; *tum quia reliquæ* calculi univerſalis *ideam animo ingenerant, in talium ſubſtitutione conſiſtentis, quæ relationes datas non mutant. Illa cavetur, ne laxius in demonſtrando verſemur (id quod hactenus fecerunt plerique omnes, qui extra Matheſin demonſtrationes Mathematicæ certitudinis dare conati ſunt:) hic, ſi tandem in apricum produceretur, maximum foret intellectus humani ſubſidium.*

CAPUT II.

De

SPECIEBUS ARITHMETICÆ IN NUMERIS INTEGRIS.

PROBLEMA 2.

88. *Numeros quotcunque datos addere.*

RESOLUTIO.

1. Numeri homogenei ſub homogeneis, hoc eſt, ita ſcribantur, ut unitates unitatibus, decades decadibus, centenarii centenariis &c. reſpondeant.
2. Sub iis ducatur linea recta, ne aggregatum cum aggregandis confundatur.
3. Sigillatim addantur unitates & ſumma earum ipſis ſubſcribatur.
4. Quodſi in ea decades reperiantur, eas decadibus numerorum datorum addi oportet: decadum vero ſumma ſub decadibus collocanda.
5. Hac operatione per reliquas numerorum datorum ſeries continuata, habebitur ſumma quæſita.

E. gr.

E. gr. Si numeri A, B, C addendi; ita procedendum: 4 & 3 ſunt 7, additis 8, prodeunt 15. Collocentur 5 ſub unitatibus, & 1 decas connumeretur decadibus datis. Itaque 1 (ſc. *decas*) & 6 (*decades*) ſunt 7 (*decades*): additis 2, prodeunt 9; additis porro 7, habentur 16 (*decades*). Collocentur 6 ſub decadibus datis, & reliquæ 10, hoc eſt, 1 centenarius annumeretur centenariis datis. Sunt itaque 1 & 5 (*centenarii*) 6 &, additis adhuc 5, prodeunt 11 (*centenarii*). Collocetur 1 ſub centenariis datis, & 10 centenarii reliqui, hoc eſt, 1 millenarius addatur 3 *millenariis* datis, ſummaque 4 ſub iis ſcribatur. Ita prodit ſumma quæſita 4165.

3578 A
524 B
63 C
———
4165

DEMONSTRATIO.

Cum unitates, decades, centenarii, millenarii &c. numerorum datorum ſint partes eorundem (§. 46); idem ſunt cum omnibus numeris datis ſimul ſumtis (§. 9). Liquet vero ex operatione, numerum inventum compoſitum eſſe ex omnibus unitatibus, decadibus, centenariis, millenariis &c. numerorum datorum. Compoſitus ergo eſt ex omnibus numeris datis ſimul ſumtis, conſequenter ipſis æqualis (§. 78) adeoque ſumma eorundem eſt (§. 55). *Q. e. d.*

SCHOLION.

89. *Unitates numerorum ſingulæ tamdiu per digitos repræſentantur & eorum ope additio abſolvitur, donec memoriæ infigatur, quinam numerus prodeat, ſi unitates quotlibet cuicunque numero addas, e. gr. quod 3 + 2 = 5, 9 + 5 = 14 &c. Hoc modo talia natura docet.*

COROLLARIUM 1.

90. Quoniam ſeriei ſiniſteriori tot unitates accedunt, quot decades ex ſummatione in proxime dexteriore emergunt; additio minore tædio abſolvetur, ſi ex qualibet numerorum ſerie tot decades deleantur, quot ex iis colligi poſſunt, reſiduum infra lineam ſcribatur, & numerus decadum abjectarum ſeriei proxime ſiniſteriori connumeretur.

E. gr. Si numeri addendi fuerint A, B, C ita procedendum: cum 7 & 3 ſint 10; reſiduus numerus ſcribatur infra lineam & 1 connumeretur decadibus. Dic itaque 6 & 4 ſunt 10; 2 & 1 ſunt 3. Scribe 3 infra lineam & 1 repone in locum centenariorum. Quoniam vero 7 & 2 ſunt 9, porro 9 & 1 ſunt 10; adde 1 ſeriei millenariorum. Dic itaque 8 & 2 ſunt 10 millenarii ſeu 1 decas millenariorum, 5 & 1 vero ſunt 6. Scribe 6 in loco millenariorum & 1 in loco decadum millenariorum.

8763 A
5247 B
2125 C
———
16135

SCHOLION 2.

91. *Non abſimili artificio numeri heterogenei adduntur: ex ſerie nimirum ſpeciei minoris totius colligitur valor ſpeciei proxime majoris, quoties fieri poteſt & pro unoquoque unitas reponitur in ſerie proxime majore. E. gr. ſint expenſæ:*

Janua-

Januarii	45 thal.	16 groſs.	9 num.
Februarii	60	12	3
Martii	72	13	6
Aprilis	180	19	9
Maji	55	15	6
erit ſumma	415	5	9

Cum enim 12 nummi conficiant groſſum, in ſerie nummorum additis 6 & 6, itemque 3 & 9 valor groſſi bis colligitur & relinquuntur 9. Scribuntur itaque 9 infra lineam in loco nummorum & 2 adduntur ſeriei groſſorum. Similiter quoniam thalerus 24 groſſis conſtat, in ſerie groſſorum ut ante valor thaleri ter colligitur, relictis 5. Quare denuo 5 in loco groſſorum reponuntur & 3 thaleris connumerantur. Reliqua ut in corollario aut problemate peraguntur.

COROLLARIUM 2.

92. Si omnes numeri dati unitatum inſtar conſiderentur, evidens eſt inter ſummandum tot novenarios omitti, quot unitates ex ſumma ſeriei dexterioris in ſiniſteriorem transferuntur. Sic in exemplo problematis loco *quindecim* ſub unitatibus ſcribimus 5, ſub decadibus 1, quorum numerorum inſtar unitatum conſideratorum ſumma eſt 6. Unus itaque novenarius omittitur, cum ex loco unitatum in locum decadum una rejicitur decas. Similiter ſi ſumma unitatum *viginti ſeptem*; ſub unitatibus collocamus 7, ſub decadibus 2. Duo igitur novenarii omittuntur, cum 2 decades ex loco monadum in locum decadum rejiciuntur. Hinc ſolvitur

PROBLEMA 3.

93. *Probare additionem, hoc eſt, explorare, utrum numerus inventus ſit æqualis omnibus datis ſimul ſumtis, nec ne.*

RESOLUTIO.

1. Notentur a latere numeri, qui inter addendum ex ſerie qualibet dexteriore in proxime ſiniſteriorem rejiciuntur, & operatione abſoluta addantur, ut numerus novenariorum inter ſummandum omiſſorum innoteſcat (§. 92).
2. Abjiciatur præterea ex ſumma inventa novenarius, quoties fieri poteſt, abjectorumque novenariorum numerus addatur numero inter ſummandum omiſſorum; quæ ſumma una cum numero reſiduo, ſi quis fuerit, probe notetur.
3. Tandem ex numeris ſummandis, qui omnes tanquam unitates ſpectantur, novenarius abjiciatur, quoties fieri poteſt, & numerus novenariorum abjectorum una cum numero reſiduo, ſi quis fuerit, denuo notetur.

Quodſi enim uterque fuerit æqualis utrique ante reperto; numerus inventus æquatur omnibus datis ſimul ſumtis (§. 83), conſequenter additio rite peracta (§. 55). *Q. e. i. & d.*

E. gr. in exemplo problematis inter ſummandum 3 novenarii omittuntur & ex ſumma reperta unus adhuc deleri poteſt:

 teſt:

teſt: quo facto, relinquuntur 7. Sed ſi ex numeris ſummandis 4 novenarii abjiciantur, 7 ſimiliter relinquuntur. Quare additio rite peracta.

SCHOLION.

94. *Diſcrimen inter demonſtrationem & probationem haud obſcurum eſt. Illa evincit, per regulas præſcriptas inveniri debere numerum quæſitum; hæc docet, regulas ad caſum ſingularem rite fuiſſe applicatas. Unde apparet probationis utilitas, fruſtra obnitente* Ramo (*), *qui demonſtrationem cum probatione confundit.*

PROBLEMA 4.

95. *Numerum minorem e majore ſubtrahere.*

RESOLUTIO.

1. Numerus minor ea lege majori ſubſcribatur, ut homogenei homogeneis reſpondeant, quemadmodum in additione præcepimus.
2. Sub numeris hiſce ducatur linea recta.
3. Subtrahantur ſigillatim unitates ab unitatibus, decades a decadibus, centenarii a centenariis &c. & reſidua ſingula loco conveniente infra lineam ſcribantur, nempe reſiduum unitatum ſub unitatibus, decadum ſub decadibus &c.
4. Quod ſi nota major e minore veniat ſubtrahenda, ex ſiniſteriore loco in dexteriorem transferatur unitas, quæ (§. 46) hic 10 valebit, ut ſubtractio fieri queat. Numerus vero unitate mulctatus puncto notetur, ne ipſum mulctatum eſſe obliviſcamur.
5. Si in loco ſiniſteriore cyphram reperiri contingat, unitas a numero proxime ſequente mutuetur, puncto propterea notando, ut ipſum unitate minutum eſſe conſtet. Unitas vero illa in locum dexteriorem translata decadis valorem tuebitur (§. 46). Quamobrem ubi plures cyphræ ſeſe inſequuntur, omnes hac ratione in novenarios mutentur, & numerus minor, a quo ſubtractio fieri debet, decade augeatur.

Juxta has regulas numerum quemcunque ex alio quocunque majore ſubtrahere licet.

E. gr. Si ex	98.0.0.4.0.34.59
ſubtrahas	4743865263
Differentia eſt	5056538196

Demtis enim 3 ex 9, relinquuntur 6 unitates infra lineam ſcribendæ. Decades 6 ex 5 auferri nequeunt: a centenariis itaque 4 auferatur unus & ejus loco decem decades decadibus jungantur. Ablatis itaque 6 ex iis, remanent 9 decades infra lineam loco conveniente ponendæ. Centenarii 2 ex 3 ſubducti relinquunt 1. Millenarii 5 ex 3 auferri nequeunt: a centenariis itaque millenariorum 4 auferatur unus, qui in locum

(*) In Schol. Mathem. lib. 4. p. 114.

locum vacuum delatus cyphram in decem decades millenariorum vertet. Inde ſi 1 decadem in locum millenariorum transferas, habebis hic 13. millenarios, ibi 9 decades millenariorum. Subductis jam 5 ex 13, reſidui fiunt millenarii 8. Demtis porro 6 millenariorum decadibus ex 9, relinquuntur 3. Jam ſi 8 ex 3 ſubtrahere debes, ab 8 ſiniſterioribus mutuetur unitas, cujus beneficio duæ cyphræ in 9 & 3 in 13 degenerabunt, ut tandem ſubtractio facillime abſolvatur.

DEMONSTRATIO.

Numerus inventus prodit, ſi unitates, decades, centenarios &c. numeri minoris ex unitatibus, decadibus, centenariis &c. majoris ſubducas, *vi operationis*, hoc eſt, ſi ſingulas partes numeri minoris a ſingulis partibus majoris ſubtrahas (§.46). Sed ſingulæ partes numeri minoris ſimul ſumtæ ſunt numero minori, & partes ſingulæ majoris ſimul ſumtæ ſunt majori æquales (§. 78). Ergo idem relinqui debet numerus, ſi totum numerum minorem e toto majore ſubtrahas (§. 83). *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

96. *Si numeri heterogenei fuerint a ſe invicem ſubtrahendi; unitas mutuo petita non 10, ſed tot unitates valet, quot unitates ſpeciei minoris conſtituunt valorem unitatis ſpeciei majoris.*

E. gr.	45. thal.	16. gr.	6 num.
	27	23	9
	17 thal.	16 gr.	9 num.

Nimirum cum 9 nummi ex 6 ſubtrahi nequeant, ex 16 groſſis unus convertitur in 12 nummos, ut loco 6 habeantur 18. Subductis adeo 9 nummis ex 18, relinquuntur 9. Similiter cum 23 groſſi ex reſiduis 15 auferri nequeant; ex 45 thaleris unus ablatus in 24 groſſos convertitur: unde ſi ſubtrahantur 23, reſiduus eſt 1 groſſis 15 addendus, ut reſidui loco ponantur 16 groſſi. Denique 27 thaleri a 44 ablati relinquunt 17.

SCHOLION 2.

97. *Quodſi numerus major e minore ſubtrahi jubeatur, evidens eſt id fieri non poſſe. Subtrahitur itaque minor e majore, & defectus notatur ſigno —. E. gr. Si quis 8 thaleros ſolvere debet, atque 3 nonniſi poſſidet; tribus ſolutis 5 adhuc debet, qui per — 5 indigitantur.*

PROBLEMA 5.

98. *Probare ſubtractionem.*

RESOLUTIO.

Reſiduo addatur ſubtrahendus (§. 88). Quodſi enim ſumma fuerit æqualis minuendo; ſubtractio rite peracta (§. 57).

E. gr.	9800403459	Minuendus.
	4743865263	Subtrahend.
	5056538196	Differentia
	9800403459	

PROBLEMA 6.

99. *Abacum Pythagoricum, hoc eſt, Tabulam conſtruere, in qua facta ex ſingulis notis numericis in ſingulas repræſentantur.*

RESOLUTIO.

1. Latera quadrati alicujus ſingula in 9 partes æquales dividantur

& per lineas ipſi parallelas in areolas quadratas area ejus reſolvatur.

2. In ſerie horizontali ſumma & laterali ſiniſtima ſcribantur novem notæ numericæ.

3. Addantur 2 & 2; aggregatum 4 ſcribatur infra 2. Addantur porro 2 & 4; aggregatum 6 collocetur ſub 4. Addantur 2 & 6, aggregatum 8 ponatur ſub 6; & ita porro.

4. Quodſi hæc additio per reliquas unitates eadem lege continuetur, Abacus Pythagoricus conſtruetur. *Q. e. f.*

ABACUS PYTHAGORICUS.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

SCHOLION.

100. *Abacum Pythagoricum memoriæ mandare tenetur multiplicationem ac diviſionem expedite abſoluturus. Quamdiu vero memoriæ infixus non eſt, ad manus eſſe debet, quoties multiplicas aut dividis.*

PROBLEMA 7.

101. *Numerum quendam datum per alium datum multiplicare.*

RESOLUTIO.

1. Multiplicator ſcribatur ſub multiplicando, ut in additione (§. 88).

2. Ducatur ſub iis linea recta.

3. Infra hanc ex abaco Pythagorico ſcribantur ſingula producta ex ſingulis multiplicandi notis in unitates multiplicatoris, ſimiliter ex illis in reliquas hujus notas, ea quidem lege, ut decades cujuslibet producti annumerentur producto proxime ſiniſteriori, & productum ex multiplicando in decades multiplicatoris in loco decadum, productum ex multiplicando in centenarios multiplicatoris in loco centenariorum &c. ſcribere incipiamus.

4. Producta partialia addantur (§. 88). Dico aggregatum eſſe factum quæſitum.

E. gr. Sint factores 38476 & 35. Multiplicatore ſub multiplicando ſcripto, duc 5 in 6, cumque factum vi abaci Pythagorici ſit 30, ſcribe o ſub 5 & 3 decades annumera facto ex 5 in 7, quod eſt 35. Additis itaque 3 ad 35, prodeunt 38. Pone 8 juxta o verſus ſiniſtram & facto ex

```
  38476
     35
-------
 192380
 115428
-------
1346660
```

ex 5 in 4, nempe 20, adde 3, ut prodeant 23 (ſcilicet centenarii). Scribe itaque 3 in loco centenariorum & 2 millenarios annumera facto 40 ex 5 in 8, ut habeatur ſumma 42 millenariorum. Scribe 2 in loco millenariorum; 4 vero decades millenariorum adde facto 15 ex 5 in 3, & ſummam 19 in loco conveniente repone. Ita habetur factum ex multiplicando in dexteram multiplicantis notam. Quod ſi eadem ratione quæratur factum ex multiplicando in ſiniſtram multiplicatoris notam 30 & producta partialia addantur; prodibit tandem factum ex 35 in 38476, nempe 1346660.

DEMONSTRATIO.

Vi operationis & Abaci Pythagorici primus numerus intra lineas ſcriptus ſingulas multiplicandi notas, hoc eſt, ſingulas ejusdem partes (§. 46), adeoque multiplicandum ipſum (§. 9), toties continet, quoties prima multiplicatoris nota unitatem. Eodem modo patet, quod numerus ſecundus intra lineas ſcriptus multiplicandum toties contineat, quoties nota ſecunda multiplicantis unitatem &c. Sed cum numeri intra lineas ſcripti adduntur, ſumma iisdem æqualis eſt (§. 55) adeoque multiplicandum toties continet, quoties ſingulæ multiplicatoris notæ, hoc eſt, partes (§. 46) conſequenter totus multiplicator (§. 9) unitatem continet; Eſt igitur factum ex multiplicando in multiplicantem (§. 59). *Q. e. d.*

SCHOLION.

102. *Si factoribus* cyphræ *adhæreant, producto invento eadem adjunguntur, ut ex ſequentibus exemplis manifeſtum.*

3578	4760
30	2000
107340	9520000

PROBLEMA 8.

103. *Lamellas Neperianas parare, quarum ope multiplicationem ac diviſionem facilius abſolvere licet, quam per abacum Pythagoricum.*

RESOLUTIO.

1. Ex orichalco, ligno aut charta compacta parentur lamellæ oblongæ in novem quadratula diviſæ, quæ per Diagonales denuo in duo triangula ſingula reſolvuntur. Fig. 1.
2. In illis quadratulis ea lege ſcribatur tabula Pythagorica, ut notæ ſolitariæ aut dextræ triangulum dextrum, notæ autem ſiniſtræ ſiniſtrum cedat. *Sic factum eſt, quod petebatur.*

SCHOLION.

104. *Has lamellas ſub initium ſeculi ſuperioris invenit* Johannes Neperus, *Baro Merchiſtonii, Scotus, & peculiari libello deſcripſit.*

PROBLEMA 9.

105. *Multiplicare numerum datum per datum alium lamellarum Neperianarum ope.*

RESOLUTIO.

1. Lamellas ita diſpone, ut in fronte exhibeant multiplicandum.
2. Eis ad ſiniſtram junge lamellam unitatum.
3. In hac quære dextimam multiplicatoris notam &
4. Ipſi reſpondentes numeros in quadratulis reliquarum lamellarum ita exſcribe, ut in unam ſummam colligantur numeri in eodem rhombo obvii.
5. Eodem modo exſcribe numeros reliquis multiplicatoris notis reſpondentes & decenter infra factores (§. 101) ſcribe
6. Tandem ut ante (§. 101) facta hæc partialia in unam ſummam collige. *Sic f. e. q. p.*

E. gr. Sit multiplicandus 5978, multiplicator 937; ex triangulo dextimo, quod dextimæ multiplicatoris notæ 7 reſpondet, exſcribe 6 & pone infra lineam. Mox in rhombo verſus ſiniſtram proxime ſequente 9 & 5 adde & ſummæ 14 notam dextram ſcribe juxta 6, ſed 1 connumera 3 & 4 in rhombo ulteriore obviis. Aggregatum 8 junge jam inventis 46. Similiter in rhombo ultimo adde 6 & 5. Summæ 11 notam dextram 1 pone, ut ante, infra lineam; ſiniſtram vero itidem 1 adde notæ 3 in ſiniſtro

Fig. 2.

```
   5978
    937
 -------
  41846
 17934
53802
-------
5601386
```

triangulo deprehenſæ. Summam 4 ſi 1846 a ſiniſtris jungas; habebis factum ex 7 in 5978. Eodem modo reperies facta ex 5978 in reliquas multiplicatoris notas 3 & 9.

PROBLEMA 10.

106. *Numerum quemlibet per alium quemcunque ſine abaci Pythagorici ſubſidio multiplicare.*

RESOLUTIO.

Omne artificium huc redit, ut ex ſimplo, duplo & decuplo per additionem, ſubtractionem & mediationem, ſingula multipla inveniantur. Nimirum numerus quilibet ſibimetipſi additus producit ſui *duplum.* Addatur huic ſimplum, ſumma eſt numeri dati *triplum.* Duplum addatur ſibimetipſi, aggregatum eſt numeri dati *quadruplum.* Medietur decuplum, hoc eſt, ipſe numerus datus cyphra auctus (§. 102), prodibit *quintuplum.* Quintuplo addatur ſimplum vel duplum, habebitur *ſextuplum* vel *ſeptuplum.* Ex decuplo ſubtrahatur duplum vel ſimplum, reſiduum erit *octuplum* vel *noncuplum.* Sine abaci itaque Pythagorici ſubſidio multiplicaturo familiaris ſit ſequens a *Jobo Ludolffo,* in Academia Erfordienſi nuper Mathematum Profeſſore, in Arithmeticam primum introducta

NOMEN-

NOMENCLATURA.

1. Simplum.	1. *Simplum.*
2 Duplum.	1+1 *Simplum & ſimplum.*
3. Triplum.	2+1 *Duplum & ſimplum.*
4. Quadruplum.	2. 2 *Dupli duplum.*
5. Quintuplum.	$\frac{10}{2}$ *Decupli dimidium.*
6. Sextuplum.	$\frac{10}{2}$ + 1 *Decupli dimidium & ſimplum.*
7. Septuplum.	$\frac{10}{2}$ + 2 *Decupli dimidium & duplũ.*
8. Octuplum	10 - 2 *Decuplum ſine duplo.*
9. Noncuplum.	10 - 1 *Decuplum ſine ſimplo.*

E.gr. 3) 3894 — 7788 — 11682

4) 3894 — 7788 — 15576

5) 3894 — 19470

6) 3894 — 19470 — 23364

7) 3894 — 19470 — 7788 — 27258

8) 389.4. — 7788 — 31152

9) 389.4. — 35046

Si multiplicator ex pluribus notis conſtet, ſæpius ex productis jam inventis per additionem vel ſubtractionem inveniri poſſunt, quæ adhuc deſiderantur, nec tum *Nomenclaturæ* propoſitæ ſtricte inhærendum.

743) 895765482 — 1791530964 — 3583061928 — 6270358374 — 665553753126

E. gr. ſit multiplicans 743. Factum faciliime invenietur, ſi multiplicando ſubſcribatur (1) duplum, (2) dupli duplum, (3) ſumma ex ſimplo, duplo & dupli duplo & tria hæc multipla multiplicando addantur.

Similiter ſi multiplicans fuerit 789, ſub multipliplicando ſcribitur decuplum ſine ſimplo, quod eſt noncuplum. Ex eo ſi denuo auferatur ſimplum, relinquetur octuplum. Quodſi & ab hoc ſimplum ſubducas, reſiduum erit ſeptuplum.

789) 8.9.5.7.6.5.4 8 2 — 8.0.6.1 8 8 9.3.38 — 7.1.6 6.1.2.3 8.5 6 — 6270358374 — 706758965298

PROBLEMA II.

107. *Numerum datum per alium minorem dividere.*

RESOLUTIO.

Caſus I. Si diviſor unica fuerit nota,

1. Scribatur ſub nota dividendi ſiniſtima, aut, ſi ea minor fuerit, ſub proxime ſequente, ac ope *Abaci Pythagorici* inveſtigetur quoties in nota vel notis ſupra, ſcri-

ſcriptis contineatur. Numerus, qui hoc indicat, ponatur dexteram verſus poſt lunulam loco quoti.

2. Quotus ducatur in diviſorem & productum ex nota vel notis ſupraſcriptis dividendi ſubtrahatur, & his deletis, ſi quod fuerit reſiduum, ſupraſcribatur.

3. Diviſor ad notam ſubſequentem verſus dexteram promoveatur, & ope *Abaci Pythagorici* denuo inveſtigetur, quoties is in notis ſupraſcriptis contineatur. Reliqua peragantur ut ante.

4. Quodſi hæc operatio per ſingulas dividendi notas continuetur, quotus invenietur. *Q. e. f.*

E. gr. Sit dividendus 7856, diviſor 3.

1 2 2
7856(2618$\frac{2}{3}$
3333

Ponantur 3 ſub 7 & per *abacum Pythagoricum* innoteſcit, 3 in 7 bis contineri. Scribantur ergo 2 poſt lunulam loco quoti & factum ex 2 in 3, hoc eſt 6, ſubtrahatur ex 7 lineola transverſa delendis, reſidua unitas ſupraſcribatur. Promoveatur diviſor 3 ſub 8, cumque vi *abaci Pythagorici* 3 in 18 ſexies contineatur, ſcribantur 6 loco quoti & factum 18 ex 3 in 6 ex 18 ſubducatur: quo in caſu nihil relinquitur. Quodſi eadem ratione pergatur, quotus tandem integer prodit 2618 & binarius 2 remanet; id, quod indicio eſt, numerum propoſitum in tres partes æquales exacte dividi non poſſe.

DEMONSTRATIO.

Ex ipſa operatione liquet, numerum inventum indicare, quoties diviſor in millenariis, centenariis, decadibus, unitatibus dividendi, hoc eſt, in ſingulis ejus partibus (§. 46), adeoque in toto dividendo (§. 9) contineatur, conſequenter unitatem toties continet, quoties dividendus diviſorem. Eſt igitur quotus (§. 62). *Q. e. d.*

Caſus II. Si diviſor ex notis pluribus conſtet,

1. Siniſtima ejus nota ſcribatur ſub nota ſiniſtima dividendi & reliquæ dexteriores ſub proxime ſequentibus verſus dexteram.

2. Ope *abaci Pythagorici* inveſtigetur, quoties prima diviſoris nota in prima dividendi contineatur.

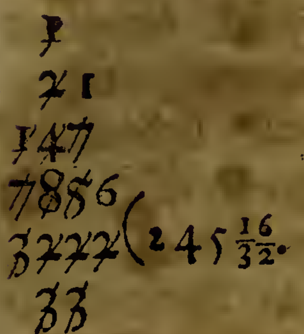
3. Numerus inventus ducatur in diviſorem integrum & diſpiciatur, utrum factum ex numeris ſupraſcriptis ſubtrahi poſſit, nec ne.

4. Si ſubtractio fieri queat, ſcribatur is loco quoti poſt lunulam & ſubtractio actu peragatur. Numeri ex quibus ſubtractio fit, lineola transverſa deleantur, &, qui reſidui fuerint, ſupraſcribantur. Quodſi vero ſubtractio non ſuccedat, loco quoti ſumatur numerus unitate vel aliquot unitatibus minor, donec factum ex eo in diviſorem ad notas dividendi quamproxime accedat & ex iis auferri queat.

5. Divi-

5. Diviſor loco uno verſus dexteram promoveatur & reliqua ut ante peragantur.
6. Hæc operatio continuetur, donec diviſor ulterius promoveri nequeat. *Sic f. e q. p.*

E. gr. Sit dividendus 7856, diviſor 32. Scribantur 32 ſub 78 & inquiratur, quoties 3 in 7 contineantur. Cum itaque bis in eo contineantur; ducantur 2 in 32 &, quia factum 64 ex 78 ſubtrahi poteſt, 2 ſcribantur poſt lunulam &, ſubtractione peracta reſiduisque 14 ſuprascriptis, diviſor loco uno promoveatur.



Quo facto inveſtigetur, quoties 3 in 14 contineantur & factum ex 4 in 32, hoc eſt 128, ſubducatur ex 145, reſiduo 17 ſuprascripto & 4 in loco quoti poſt lunulam repoſitis. Promoveatur diviſor denuo loco uno & quæratur, quoties 3 in 17 contineantur. Numerus 5, qui hoc indicat, jungatur quoto jam invento, & factum ex eo in diviſorem 32, nempe 160 ſubtrahatur ex 176, reſiduo 16 ut ante ſupraſcripto. Dico numerum inventum $245\frac{16}{32}$ eſſe quotum quæſitum.

DEMONSTRATIO.

Eadem fere eſt demonſtratio, quæ in caſu primo, hoc unice notato, quod, cum ex *abaco Pythagorico* conſtare nequeat, quoties diviſor integer in notis dividendi ſupraſcriptis contineatur, interea ſupponatur, toties illum in his contineri, quoties ſiniſtima diviſoris nota continetur in ſiniſtima aut duabus ſiniſtimis dividendi notis. Licet enim hæc ſuppoſitio ſubinde fallat, in errorem tamen inducere nequit, quia examen mox inſtituitur, cum factum ex diviſore in quotum juxta eam inventum cum dividendo comparatur, & pſeudoquotus unitate tamdiu minuitur, donec in verum abeat.

SCHOLION.

108. *Equidem hæc methodus tædioſa videtur, quod raro verus quotus prima ſtatim vice per eam eliciatur. Enimvero experientia comprobatur, examen, quod inſtituendum, cogitationum celeritati parere in exercitatis.*

PROBLEMA 12.

109. *Diviſionem per lamellas Neperianas abſolvere.*

RESOLUTIO.

1. Lamellas ita diſpone, ut in fronte referant diviſorem.
2. Eis ad ſiniſtram junge lamellam unitatum.
3. Sub diviſore deſcende, donec occurrant notæ dividendi, in quibus quoties contineatur, diſquiritur, aut numerus ipſis proxime minor ex dividendo ſubtrahendus.
4. Numerus in lamella unitatum reſpondens ſcribatur loco quoti.

5. Quodſi eadem ratione partes quoti reliquas inveſtiges, diviſio tota abſolvetur.

E. gr. Sit dividendus 5601386, diviſor 5978. Quoniam quæritur, quoties in
Fig. 2. 56013 contineantur 5978; ſub diviſore deſcendendo in infima ſerie reperitur numerus 53802 quam proxime ad 56013 accedens, quorum ille ex hoc ſubtrahitur & in lamella unitatum reſpondens 9 loco quoti ſcribitur. Reſiduo 2211 jungitur nota dividendi ſequens 8, cumque ut ante per lamellas reperiatur huic convenire quam proxime numerus 17934, ipſi in lamella unitatum reſpondens 3 ſcribatur loco quoti, & ſubtractio ut ante peragatur. Eodem modo pars tertia quoti 7 reperitur.

```
56.01386(937
53802..
————————
 2.2.1.18.
 17934.
————————
  41846
  41846
————————
  00000
```

PROBLEMA 13.

110. *Sine abaci Pythagorici ſubſidio numerum datum dividere per alium datum.*

RESOLUTIO.

1. Dividendo ad dexteram more conſueto jungatur lunula & infra locum quoti ducatur linea recta.
2. Infra hanc lineam ſcribatur diviſor, ejus duplum & decupli dimidium ſive quintuplum: quibus numeris a dextris 1. 2 & 5 adſcribi oportet. Inde nimirum quodcunque diviſoris multiplum (§. 106) elicitur.
3. Tot dividendi notæ, quot diviſor habuerit, comparentur cum illius multiplis modo inventis: ita enim quotus innoteſcet.
4. Is more ſolito poſt lunulam ſcribatur, ipſi vero reſpondens multiplum diviſoris ſub notis dividendi, quas modo diximus, atque ex his ſubducatur.
5. Reſiduo adjungatur nota dividendi proxime ſequens: reliqua ut ante peragantur.

Quodſi hæc operatio continuetur, ſine *abaci Pythagorici* ſubſidio quotus eruetur. *Q. e. f.*

E. gr. Sit dividendus 385724615, diviſor 175. Scribantur numeri dati cum diviſoris multiplis, ut hic factum eſſe apparet. Cum multiplis diviſoris compara 385 & quoniam illius duplum 350 quam proxime convenit, ſcribe 2 loco quoti & 350

```
385724615(2204140
350                ——————
———             175 | 1
 357            350 | 2
 350            875 | 5
———
  724
  700
———
   246
   175
———
    711
    700
———
    115
```

350 ſubduc ex 385. Reſiduo 35 junge notam dividendi proxime ſequentem 7 & 357 denuo compara cum diviſoris multiplis. Quoniam vero denuo duplum 350 quam proxime accedit, idem ex 357 ſubtrahe & quoti loco rurſus ſcribe 2. Reſiduo 7 junge notam ſubſequentem 2. Quia dividendus 72 eſt diviſore 175 minor, quotus erit 0. junge numero 72 notam dividendi 4, & cum 724 inter duplum 350 atque quintuplum 875 cadant, ipſisque dupli duplum, hoc eſt quadruplum diviſoris 700 quam proxime conveniat, quotus erit hoc in caſu 4. Quodſi hac ratione operationem continuare libuerit, reperietur quotus integer 2204140 & reſiduum erit 115.

SCHOLION. 1.

111. *Hæc dividendi methodus & meditandi difficultatem & errandi facilitatem tollit, cui obnoxia eſt altera in problemate undecimo expoſita. Quamvis igitur eam ſerio commendem, nolim tamen ut abacus Pythagoricus prorſus rejiciatur, quoniam ſubinde caſus occurrunt, in quibus eodem minus commode caremus. Fractionum reductio ad minores terminos inter alia aſſertum noſtrum confirmabit.*

SCHOLION 2.

112. *Cæterum ea quoque methodus, quam in probl.* 11. (§. 107) *expoſuimus, patitur ut reſidua infra dividendum, non ſupra eum ſcribantur. Nec negari poteſt, hac ratione facilius corrigi errorem, quam ſi notæ, ex quibus ſubtractio facta eſt, deleantur:* E. gr.

```
     8.572364(14431 350/594
594)594
    ------
    26.3.2
    2376
    ------
     256.3
     2376
    ------
      18.76
      1782
    ------
        9.44
        594
    ------
        350
```

PROBLEMA 14.

113. *Probare multiplicationem.*

RESOLUTIO.

Dividatur factum per multiplicandum, quotus erit multiplicans; aut factum dividatur per multiplicantem, quotus erit multiplicandus, ſi multiplicatio rite fuerit peracta.

```
            7
      1346660(35
38476)115428
      ------
      192380
      192380
      ------
      000000
```

E. gr. Si multiplicandus 38476, multiplicator 35; factum eſt 1346660 (§. 101). Si vero 1346660 per 38476 dividas, quotus eſt 35.

PROBLEMA 15.

114. *Probare diviſionem.*

RESOLUTIO.

1. Quotus ducatur in diviſorem aut diviſor in quotum.
2. Facto addatur, ſi quod a diviſione fuerit reſiduum.

Quodſi hac ratione prodeat dividendus, diviſio legitime peracta.

```
  245
   32
 ----
  490
 735
 ----
 7840
   16
 ----
 7856
```

E. gr. Si 7856 dividas per 32, quotus eſt 245, reſiduum 16. Duc 245 in 32 & facto 7840 adde 16; habebis dividendum 7856. Conſtat igitur diviſionem legitime fuiſſe peractam.

SCHOLION.

115. *Hæc demum inferius* (§. 192. & 193) *demonſtrantur.*

SCHOLION ALIUD GENERALE.

116. *Supereſt ut videamus, juxta quasnam regulas intellectus in hactenus expoſitis operationibus Arithmeticis dirigatur. Meditaturi, regulas duplicis generis offendemus, quarum aliæ imaginationem, aliæ intellectum purum dirigunt. Priores in numerorum ſcriptione, linearum ac lunulæ ductu, notarum in diviſione & ſubtractione peracta deletione &c. continentur. Scriptio numerorum varias ſuppeditat regulas, quibus vires imaginationis extenduntur. Numeros enim quosvis, quantumvis magnos & una varios, menti præſentes exhibet, quamdiu libuerit, qui alias diſparent, cum vix eam ſubierint: quo ipſo cogitationes a meditationibus alienæ arcentur, domeſticæ autem quantolibet temporis intervallo in nota qualibet numerorum datorum deſiguntur. Hinc diſcimus:*

1. Intellectum uti debere in meditando ſubſidiis imaginationis, objecto meditationis convenientibus, ex ejus adeo indole in dato quolibet caſu particulari derivandis.
2. Quæ intellectus meditatur, ea, quantum fieri poteſt, imaginationi præſentia ſiſtenda eſſe: quod obſervaſſe in tyronibus quoque inſtituendis plurimum prodeſt, cum ad diſciplinas animum appellentes operationibus intellectus puri parum ſint adſueti, operationes vero imaginationis a primis (quod Græci aiunt) unguiculis familiarisſimæ ipſis exiſtant.

Ipſa vero hac numerorum ſcriptio præſtat, ut intellectus tum ſingula ſigillatim meditari, tum ſingula cum ſingulis, prout commodum viſum fuerit, conferre poſſit. Vide inprimis cor. 1. probl. 2. (§. 90), *probl. 4.* (§. 95), *probl.* 10. (§. 106) & *probl.* 13 (§. 110). *Utrumq; difficultates partim ex rerum meditandarum ſerie nimis longa enaſci ſolitas, partim ordini, quo cogitationes promoventur, parum convenienti debitas tollit. Unde liquet*

3. Ad minuendam in meditando difficultatem ſingula diſtincte imaginationi repræſentanda eſſe, ita ut objectum meditationis repræſentetur ſecundum omnes relationes datas & tota totius repræſentatio ex partialibus ſingularum relationum componatur. Hanc regulam in *Arte characteriſtica* perficienda magni momenti eſſe, inferius in Analyſi patebit. Eadem ſecundæ juncta tyronum inſtitutioni egregia ſuppeditat adjumenta. Inſervit etiam confuſæ cogni-

cognitioni eorum, quæ ſigillatim diſtincte cognita fuerunt: cujus uſum demonſtrationes Geometricæ inferius concipiendæ loquentur.

Linearum & lunulæ ductus, notarum deletio, punctum notis unitate mulctatis adjectum impediunt, ne eadem pro diverſis aut diverſa pro iisdem habentes in errorem incidamus: quo ipſo docemur

4. Quæ ſunt eadem in intellectu, ut eadem repræſentari debere imaginationi: quæ vero diverſa ſunt in intellectu, ut diverſa quoque repræſentanda eſſe. Sunt eadem in intellectu, quæ ſub notione communi continentur. Hæc vero regula errori potiſſimum diſcavet.

Progrediendum nunc ad alterum regularum genus, quibus intellectus purus juvatur. Numeri dati diſtinguuntur in varias claſſes, nempe in unitates, decades, centenarios &c. & in hiſce claſſibus ſinguli numeri ſingulis characteribus diſcernuntur. Satisfit igitur huic regulæ generali:

1. Quæſtio propoſita in tot partes reſolvenda, quot res diverſæ naturæ in eadem involvuntur.

Additio & ſubtractio in ſingulis numerorum claſſibus ſigillatim peragitur: nec minus in multiplicatione ac diviſione facta & quoti particularia quæruntur, ut inde componatur numerus quæſitus. Diſcimus adeo

2. Singula, quæ in quæſtione propoſita involvuntur, eſſe ſigillatim expendenda, & quæ inde deducta ſunt, inter ſe conferenda.

In operationibus Arithmeticis vel ad notiones numerorum reſpicimus, vel eorum proprietates e. gr. ex abaco Pythagorico in memoriam nobis revocamus. Unde patet.

3. Dum ſingula in ſe conſiderantur, vel notiones eorundem evolvendas, vel proprietates & relationes ad alias alio tempore cognitas in memoriam revocandas eſſe.

Si diviſor ex pluribus notis conſtet, ad facilitandum laborem aſſumitur, integrum diviſorem in omnibus dividendi notis ſupraſcriptis toties contineri, quoties nota diviſoris prima in nota dividendi continetur. Sed cum hypotheſis fallere queat, utrum quotus inventus ſit verus nec ne, probatur. In his vero continetur regula generalis hujusmodi:

4. Si datorum numerus de re eadem ſit ingens, e. gr. ſi in Aſtronomia multa admodum phœnomena motus ſiderum dantur, qualis eſſe debeat rei natura, e. gr. ſtructura ſyſtematis mundani, ut quibusdam phœnomenis ſatisfiat, primo inveſtigandum; dein ulterius diſquirendum, utrum phœnomenis quoque reliquis ſatisfiat nec ne. Ita ſi contingat, nos in hypotheſin falſam incidere, eam facilius emendare, quam ex ſimultanea omnium conſideratione prima ſtatim vice veram elicere licebit. Hæc regula in ſcientia naturali multum habet uſum non minus in inveniendo, quam in aliorum hypotheſibus dijudicandis.

Licet abunde conſtet per demonſtrationes, regularum, quibus utimur, ope numerum quæſitum inveniri; probationes tamen non negliguntur, quibus convincimur nos in regularum applicatione non aberraſſe. Docemur ergo

5. Conſultum eſſe, ut diſpiciamus, an veritates a priori deductæ experientiæ reſpondeant.

CAPUT III.

De RATIONE AC PROPORTIONE QUANTITATUM.

DEFINITIO 38.

117. *Ratio* eſt ea homogeneorum relatio, quæ quantitatem unius determinat ex quantitate alterius, ſine tertio homogeneo aſſumto. Homogenea, quæ comparantur, dicuntur *Termini Rationis* & in ſpecie *antecedens* vocatur, qui ad alterum refertur; *conſequens* vero, ad quem alter refertur.

SCHOLION 1.

118. Euclides *rationem definit per* habitudinem magnitudinum ejusdem generis ſecundum quantitatem. *Sed hæc definitio incompleta: dantur enim & aliæ magnitudinum relationes, quæ ſunt conſtantes, nec tamen in rationum numero continentur. Talis eſt ſinus recti ad ſinum complementi in Trigonometria. Completam reddidit vir ſummus* Leibnitius. *Equidem &* Hobbeſius *definitionis Euclideæ correctionem tentavit* (k); *ſed infeliciter. Cum enim rationem definiat per* magnitudinis ad magnitudinem relationem; *definitio ejus non modo id vitii habet, quod Euclidea, quod ſcilicet relationis ſpeciem non determinet; verum etiam in eo peccat, quod ſpeciem magnitudinum non exprimat, quæ rationem inter ſe habere poſſunt.*

SCHOLION 2.

119. *Cæterum hic de ratione quantitatum in genere, non tantum de ratione numerorum agimus, quia hæc doctrina non modo ad commenſurabilia, ſed etiam ad incommenſurabilia, hoc eſt, ad quantitatum quodvis genus applicari debet.*

COROLLARIUM 1.

120. Cum in fractionibus relatio numeratoris ad denominatorem ſine tertio homogeneo aſſumto intelligatur (§. 53); erit ea ratio.

COROLLARIUM 2.

121. Si duæ quantitates inter ſe comparantur ſine tertia homogenea aſſumta, aut una alteri æqualis, aut inæqualis deprehenditur (§. 75). Ratio itaque vel æqualitatis, vel inæqualitatis.

COROLLARIUM 3.

122. Si termini rationis fuerint inæquales, vel minor refertur ad majorem vel major ad minorem (§. 19); minor nempe ad majorem tanquam pars ad totum, major vero ad minorem tanquam totum ad partem (§. 18): Ratio itaque determinat, quoties minus in majore contineatur, vel quoties majus minus contineat, hoc eſt, quantæ majoris parti minus æquetur; id quod diviſio prodit (§. 62).

CO-

(k) in Tractatu de principiis & ratiocinatione Geometrarum c. II. p. 22.

COROLLARIUM. 4.

123. Cæterum quia ratio per ſe intelligibilis (§. 117), iis diſcernendis inſervire poteſt, quæ compræſentia non ſunt.

DEFINITIO 39.

124. *Ratio majoris inæqualitatis* eſt, quam habet majus ad minus e. gr. 6 ad 3. *Ratio* vero minoris *inæqualitatis* eſt, quam habet minus ad majus, e. gr. 3 ad 6.

DEFINITIO 40.

125. *Ratio rationalis* dicitur, quæ eſt ut numerus rationalis ad numerum rationalem, e. gr. ut 3 ad 4. *Irrationalis* vocatur, quæ numeris rationalibus exprimi nequit.

SCHOLION.

126. *Sint duæ quantitates* A & *B, ſitque* A < *B. Si* A *ex B toties ſubtrahas, quoties fieri poterit, e. gr. quinquies, relinquetur vel nihil, vel aliquid. In priori ergo caſu A erit ad B ut 1 ad 5, hoc eſt,* A *in B quinquies continetur, ſeu* A $=\frac{1}{5}$ *B. Ratio ergo eſt rationalis. In caſu poſteriori aut dabitur pars aliqua, quæ aliquoties ex* A, *e. gr. ter, itidemque ex B, e. gr. ſepties ſubducta nihil relinquit; aut nulla dabitur iſtiusmodi pars. Si prius: erit* A *ad B ut 3 ad 7, ſeu* A $=\frac{3}{7}$ B, *adeoque ratio denuo rationalis. Si poſterius: ratio ipſius* A *ad B numeris exprimi nequit rationalibus, hoc eſt, dici nequit, quanta pars ipſius B ſit* A. *Suo autem loco oſtendetur, quomodo pars illa aliquota communis inveniri poſſit, nec minus demonſtrabitur, dari quantitates, quæ rationem irrationalem habent. Hinc ſimul lumen affunditur definitioni rationis, dum oſtendimus, quomodo ex comparatione duorum homogeneorum, ſive tertio homogeneo aſſumto ratio intelligi poſſit. Nimirum aut minus majoris, aut pars, quæ utrique ineſt, utriusque menſura conſtituitur, vel, quod perinde eſt, minus aut prædicta pars pro unitate aſſumitur & in caſu priore majus, in poſteriore majus & minus per numeros exprimuntur: quos in ratione irrationali irrationales eſſe ſuo loco conſtabit.*

DEFINITIO 41.

127. *Exponentem rationis* dico Quotum, qui ex diviſione antecedentis per conſequentem emergit. E. gr. rationis 3 ad 2 exponens eſt $1\frac{1}{2}$; ſed rationis 2 ad 3 eſt $\frac{2}{3}$.

SCHOLION.

128. *In Geometria demonſtrabitur, quod exponens rationis datæ exprimi poſſit linea, licet in numeris vel rationalibus, vel irrationalibus eundem exhibere non valeamus.*

COROLLARIUM. 1.

129. Si conſequens eſt unitas, antecedens ipſe eſt exponens rationis, e. gr. rationis 4 ad 1 exponens eſt 4.

COROLLARIUM 2.

130. Numerus ergo quilibet integer exprimit rationem multi ad unum, ſeu multitudinis ad unitatem.

COROLLARIUM 3.

131. Exponens rationis eſt ad unitatem ut antecedens ad conſequentem (§. 62).

COROLLARIUM 4.

132. Fractio $\frac{3}{4} = 3 : 4$ (§. 120).

DEFINITIO 42.

133. Si terminus minor eſt pars aliquota majoris, *Ratio* majoris inæqualitatis vocatur *multiplex*; *ratio*

tio vero minoris inæqualitatis *ſubmultiplex*. Speciatim in caſu primo *dupla*, ſi exponens 2; *tripla*, ſi 3 &c. in altero *ſubdupla*, ſi exponens $\frac{1}{2}$; *ſubtripla*, ſi $\frac{1}{3}$ &c. E. gr. 6 ad 2 habet rationem triplam, continet enim ſenarius binarium ter; contra 2 ad 6 eſt in ratione ſubtripla, continet enim binarius tertiam ſenarii partem.

DEFINITIO 41.

134. Si terminus major minorem ſemel continet ac in ſuper partem ipſius aliquotam; *ratio* majoris inæqualitatis dicitur *ſuperparticularis*, *ratio* minoris inæqualitatis *ſubſuperparticularis*. Speciatim in caſu primo vocatur ſeſquialtera, ſi exponens $1\frac{1}{2}$; ſeſquitertia, ſi $3\frac{1}{3}$ &c. in altero ſubſeſquialtera, ſi exponens $\frac{2}{3}$; ſubſeſquitertia, ſi $\frac{3}{4}$ &c. E. gr. 3 ad 2 eſt in ratione ſeſquialtera; 2 ad 3 in ſubſeſquialtera.

DEFINITIO 42.

135. Si terminus major minorem ſemel continet ac inſuper partes ipſius aliquot aliquotas; *ratio* majoris inæqualitatis vocatur *ſuperpartiens*; *ratio* minoris inæqualitatis *ſubſuperpartiens*. Speciatim in caſu priore dicitur *ſuperbipartiens tertias*, ſi exponens $1\frac{2}{3}$; *ſupertripartiens quartas*, ſi $1\frac{3}{4}$; *ſuperquadripartiens ſeptimas*, ſi $1\frac{4}{7}$ &c. in poſteriore *ſubſuperbipartiens tertias*, ſi exponens $\frac{3}{5}$; ſubſupertripartiens quartas, ſi $\frac{4}{7}$; ſubſuperquadripartiens ſeptimas, ſi $\frac{7}{11}$ &c. E. gr. 5 ad 3 eſt ratio ſuperbipartiens tertias; ſed 3 ad 5 ratio ſubſuperbipartiens tertias.

DEFINITIO 43.

136. Si terminus major minorem aliquoties continet & inſuper partem ipſius aliquotam; *ratio* majoris inæqualitatis vocatur *multiplex ſuperparticularis*; ratio minoris inæqualitatis *ſubmultiplex ſubſuperparticularis*. Speciatim, in caſu primo dicitur *dupla ſeſquialtera*, ſi exponens $2\frac{1}{2}$; *tripla ſeſquiquarta*, ſi $3\frac{1}{4}$ &c. in altero *ſubdupla ſubſeſquialtera*, ſi exponens $\frac{2}{5}$; *ſubtripla ſubſeſquiquarta*, ſi $\frac{4}{13}$ &c. E. gr. 16 ad 5 habet rationem triplam ſeſquiquintam; 4 ad 9 rationem ſubduplam ſubſeſquiquartam.

DEFINITIO 44.

137. Denique ſi terminus major minorem aliquoties continet ac inſuper aliquot partes ipſius aliquotas, *ratio* majoris inæqualitatis dicitur *multiplex ſuperpartiens*; ratio minoris inæqualitatis *ſubmultiplex ſubſuperpartiens*. Speciatim in caſu primo vocatur *dupla ſuperbipartiens tertias*, ſi exponens $2\frac{2}{3}$; *tripla ſuperquadripartiens ſeptimas*, ſi $3\frac{4}{7}$ &c. in altero *ſubdupla ſubſuperbipartiens tertias*, ſi exponens $\frac{3}{8}$; *ſubtripla ſubſuper qua-*

quadripartiens ſeptimas, ſi $\frac{7}{25}$ &c. E. gr. Ratio 25 ad 7 eſt tripla ſuperquadripartiens ſeptimas; 3 ad 8 ſubdupla ſubſuperbipartiens tertias

SCHOLION.

138. *En genera rationum rationalium, quarum quidem nomina apud recentiores rarius occurrunt (eorum enim loco terminis rationum minimis utuntur, e. gr. pro dupla 2 : 1, pro ſeſquialtera 3 : 2); non tamen ab eo ignorari poſſunt, qui ſcripta Mathematicorum evolvit. Caeterum jam* Clavius *annotavit* (l), *exponentes rationes majoris inaequalitatis & re, & nomine; rationes vero minoris inaequalitatis re tantum, non autem nomine denominare. Facile vero in his nomen invenies, ſi denominatorem exponentis dividas per numeratorem. E. gr. ſi exponens fuerit $\frac{5}{8}$; erit 8 : 5 = $1\frac{3}{5}$. Unde innoteſcit, rationem vocari ſubſupertripartientem quintas. De nominibus rationum irrationalium nemo hactenus cogitavit.*

DEFINITIO 47.

139. *Rationes eaedem* ſunt, quarum antecedentes ad ſuos conſequentes eodem modo referuntur, hoc eſt, quarum antecedentes per ſuos conſequentes diviſi dant exponentes aequales.

SCHOLION. 1.

140. *Per hanc definitionem agnoſci poſſe etiam identitatem rationum irrationalium patet ex ſchol. def. 39.* (§. 128).

COROLLARIUM 1.

141. Quoties ergo antecedens unius rationis ſuum conſequentem, vel quantam conſequentis partem continet; toties antecedens alterius ſuum conſequentem, vel tantam conſequentis partem continet: vel etiam quoties antecedens unius in conſequente ſuo continetur, toties antecedens alterius continetur in ſuo conſequente (§. 122).

COROLLARIUM 2.

142. Si fuerit A ad B ut C ad D; erit A : B = C : D, ſeu in exemplo ſingulari 8 : 4 = 30 : 15. Et hoc modo identitatem rationum in poſterum deſignabimus.

SCHOLION 2.

143. *Alii ſignis aliis utuntur. Sed ſecundum leges Artis characteriſticae ſigna ſcientifica non ſcientificis praeferri debent. Sunt autem ſigna ſcientifica, ſeu ad inveniendum apta, quae rerum repraeſentatarum relationes exprimunt, ex quibus alia deducere datur.*

COROLLARIUM 3.

144. Cum rationes eaedem diſtingui nequeant, niſi fuerint compraeſentes ob identitatem exponentium; rationes eaedem ſunt etiam ſimiles (§. 22).

DEFINITIO 48.

145. Rationum duarum identitas vel ſimilitudo dicitur *Proportio*. Et hinc quantitates eandem rationem habentes dicuntur *proportionales*. E. gr. Si A : B = C : D, dicuntur A, B, C & D, ſeu 8, 4, 30 & 15 proportionales. Eſtque *Proportio continua*, ſi conſequens primae

G ratio-

(l) in Comment. ad Elem. V Euclidis f. 179 Tom. I. Oper.

rationis idem cum antecedente ſecundæ, ut ſi 3 : 6 = 6 : 12: *Diſcreta* vero, ſi conſequens primæ diverſus ab antecedente ſecundæ, ut ſi 3 : 6 = 4 : 8.

SCHOLION.

146. Gregorius a S. Vincentio (m) *conſiderat quoque rationes, quas habent rationum exponentes,* & Proportionalitatem *vocat proportionem, quæ inter exponentes quatuor rationum intercedit, ut modos argumentandi in Geometria etiam a rationibus diſſimilibus deſumere liceat. Sed nos hac doctrina non utemur.*

DEFINITIO 49.

147. Rationum diverſarum A : B & F : G *major* dicitur A : B, ſi fuerit A : B > F : G; contra *minor* F : G, ſi F : G < A : B. Unde & rationem majorem ac minorem hoc modo deſignabimus. E. gr. 6 ad 3 majorem habet rationem quam 5 ad 4, nam 6 : 3 (= 2) > 5 : 4 (= $1\frac{1}{4}$); ſed 3 ad 6 minorem habet quam 4 ad 5, nam $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} < \frac{4}{5}$.

DEFINITIO 50.

148. *Ratio* ex duabus vel pluribus aliis *compoſita* dicitur, quam habet factum ex duarum vel plurium rationum antecedentibus ad factum ex earundem conſequentibus. Ita 6 ad 72 eſt in ratione compoſita 2 ad 6 & 3 ad 12. Inſpecie *duplicata* vocatur, quæ ex duabus; *triplicata*, quæ ex tribus; *quadruplicata*, quæ ex quatuor &c. & in genere *multiplicata*, quæ ex pluribus rationibus ſimilibus componitur. Ita 48 : 3 eſt ratio duplicata ipſarum 4 : 1 & 12 : 3.

THEOREMA 11.

149. *Quæ ſunt ut numerus rationalis ad numerum rationalem, commenſurabilia ſunt.*

DEMONSTRATIO.

Numeri rationalis integri pars aliquota eſt unitas (§. 36); fractus vero cum unitate partem aliquotam communem habet (§. 37). Quæ igitur ſunt ut numerus rationalis ad numerum rationalem; eorum unum vel eſt pars aliquota alterius, vel utriusque pars aliquota communis datur. Quare commenſurabilia ſunt (§. 29). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

150. Cum in diviſione ſit ut diviſor ad dividendum, ita unitas ad quotum (§. 62); ſi numerus rationalis per rationalem dividitur, quotus eſt commenſurabilis unitati (§. 149); adeoque numerus rationalis (§. 35).

COROLLARIUM 2.

151. Quoniam ergo in ratione rationali exponens rationis prodit, numero rationali per rationalem diviſo (§. 125. 127);

(m) Quadraturæ Circuli lib. 8 f. 865.

127); rationis rationalis exponens eſt numerus rationalis.

THEOREMA 12.

152. *Commenſurabilia ſunt inter ſe velut unitas ad numerum rationalem integrum, velut numerus rationalis integer ad alium rationalem integrum: incommenſurabilia non item.*

DEMONSTRATIO.

Commenſurabilium aut unum eſt pars aliquota alterius, aut utriusque datur pars aliquota communis (§. 29). Quodſi adeo in caſu priore minor, in poſteriore pars aliquota communis pro unitate aſſumatur; reſpondebit in priore quantitati majori, in poſteriore utrique numerus rationalis integer (§. 36). Ergo in caſu priore quantitates ſunt inter ſe ut unitas, in poſteriore ut numerus rationalis integer ad numerum rationalem integrum. *Quod erat primum.*

Incommenſurabilium nulla datur pars aliquota communis (§. 29). Nulla ergo datur unitas, cui commenſurabiles exiſtant. Quare cum omnis numerus rationalis unitati commenſurabilis exiſtat (§. 35); ipſæ non ſunt ut numerus rationalis ad numerum rationalem. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM. 1.

153. Commenſurabilium ratio eſt rationalis; incommenſurabilium irrationalis (§. 125).

SCHOLION.

154. *Dari quantitates incommenſurabiles, in Geometria demonſtrabitur.*

COROLLARIUM 2.

155. Rationis commenſurabilium exponens eſt numerus rationalis (§. 151).

THEOREMA 13.

156. *Rationes A : B & F : G ſimiles eidem tertiæ C : D ſunt etiam ſimiles inter ſe; & ſimilibus ſimiles ſunt inter ſe ſimiles.*

DEMONSTRATIO.

Rationes ſimiles eidem tertiæ ſunt etiam eædem eidem tertiæ (§. 144).

$6:3 = 8:4$
$10:5 = 8:4$
Ergo $6:3 = 10:5$

Quare cum ſit A : B = F : G & C : D = F : G (§. 142); erit A : B = C : D (§. 79), conſequenter A ad B ut C ad D (§. 142). *Quod erat unum.*

Porro A : B = C : D & F : G = H : D, itemque C : D = H : D, *per hypoth.* Sed A : B = H : D, *per demonſtr.* Ergo etiam A : B = F : G, *per demonſtr. Quod erat alterum.*

THEOREMA 14.

157. *Idem C ad æqualia A & B; & æqualia A & B ad idem C eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

A = B, *per hypoth.* Ergo C : A = C : B (§. 63, 86); conſequenter

C ad A & B eandem rationem habet (§. 142). *Quod erat unum.*

Similiter quia A = B, *per hypoth.* erit A : C = B : C (§. 63. 86), conſequenter A & B ad C eandem rationem habent (§. 142). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

158. Cum æqualia ſalva quantitate ſibi mutuo ſubſtitui poſſint (§. 15); etiam æqualia ad æqualia eandem rationem habent.

SCHOLION.

159. *Demonſtratur etiam corollarium ut ipſum theorema. Nam A = C & B = D,* per hypoth. *Ergo* A : B = C : D (§. 86), *conſequenter ratio utrobique eadem* (§. 142).

THEOREMA 15.

160. *Si fuerit A : B = C : D, erit etiam invertendo B : A = D : C.*

DEMONSTRATIO.

B eſt ad A ut unitas ad A : B & D eſt ad C ut eadem unitas ad C : D (§. 62). Sed A : B = C : D, *per hypoth.* Ergo unitas eadem ad A : B & C : D eandem rationem habet (§. 157), conſequenter B : A = D : C (§. 156). *Q. e. d.*

THEOREMA 16.

161. *Partes ſimiles* P *&* p *eandem rationem habent ad tota* T *&* t: *&, ſi tota ad partes eandem rationem habent, partes ſunt ſimiles.*

DEMONSTRATIO.

Si P ad T aliam rationem haberet quam *p* ad *t*; partes *p* & P poſſent diſtingui etiam non compræſentes (§. 123). Eſſent adeo diſſimiles (§. 22): Quod cum ſit abſurdum, utpote contra hypotheſin; erit P ad T ut *p* ad *t*. *Quod erat unum.*

Si t : p = T : P, *per hyp.* erit *p* : *t* = P : T (§. 160). Ergo *per demonſtrat.* P & *p* ſunt partes ſimiles. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

162. Si P : T = *p* : *t*; erit T : P = *t* : *p* (§. 160), hoc eſt, tota ad partes ſimiles eandem rationem habent.

THEOREMA 17.

163. *Partes ſimiles* P *&* p *ſunt inter ſe ut tota* T & t.

DEMONSTRATIO.

Cum totum ſit idem cum partibus ſuis ſimul ſumtis (§. 9); quoties ſumitur totum, toties etiam ſumitur pars ejus quantalibet, e. gr. quarta, vigeſima, milleſima, millioneſima. Quare ſi ponamus totum minus *t* toties ſumi, donec toti T æqualis fiat; quoties ipſum ſumitur, toties etiam ſumenda ejus pars *p*, donec parti ipſius T ſimili, quæ eſt P, æqualis fiat. Toties itaque P continet *p*, quoties T ipſum *t*. Sunt ergo partes ſimiles ut tota (§. 141). *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA 18.

164. *Si* $A:B = C:D$; *erit etiam* alternando $A:C = B:D$.

DEMONSTRATIO.

I. Si antecedentes A & C conſequentibus B & D minores; eorum partes, (§. 18) eæque ſimiles (§. 161) exiſtunt. Sunt igitur ut tota, hoc eſt antecedentes A & C eam inter ſe rationem habent quam conſequentes B & D. (§. 163).

II. Si antecedentes A & C conſequentibus B & D majores; tum quia $A:B = C:D$ *per hypoth.* erit $B:A = D:C$ (§. 160), conſequenter $B:D = A:C$ *per caſ.* 1. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

165. Ergo in diviſione unitas ad diviſorem ut quotus ad dividendum (§. 62).

COROLLARIUM 2.

166. Si fuerit $A:B = C:D$ & $B = D$, erit etiam $A = C$. Eſt enim $A:C = B:D$ (§. 164). Sed $B = D$, *per hypoth.* Ergo $A = C$ (§. 139).

COROLLARIUM 3.

167. Si fuerit $A:B = C:D$ & $A:F = C:G$; erit $B:F = D:G$. Nam $A:C = B:D$ & $A:C = F:G$ (§. 164). Ergo $B:D = F:G$ (§. 156), conſequenter $B:F = D:G$ (§. 164).

COROLLARIUM 4.

168. Si fuerit $A:B = C:D$ & $F:A = G:C$; erit $F:B = G:C$. Nam $A:C = B:D$ & $F:G = A:C$ (§. 164). Ergo $F:G = B:D$ (§. 156), conſequenter $F:B = G:D$ (§. 164).

THEOREMA 19.

169. *Quæ ad idem vel æqualia eandem habent rationem, æqualia ſunt: & ad quæ idem vel æqualia eandem habent rationem, ea itidem æqualia ſunt.*

DEMONSTRATIO.

$A:B = D:B$, *per hypoth.* Ergo $A:D = B:B$ (§. 164). Sed $B = B$ (§. 73). Quare $A = D$ (§. 139). *Quod erat unum.*

Similiter $C:A = C:B$, *per hypoth.* Ergo $C:C = A:B$ (§. 164). Sed $C = C$ (§. 73). Quare $A = B$ (§. 139). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 20.

170. *Si quantitates quaſcunque* A & B *per eandem tertiam* C *vel per æqualia multiplices; facta* D & E *ſunt inter ſe ut* A & B.

DEMONSTRATIO.

6	12
3	3
18	36

$6:12 = 18:36$

Cum ſit $1:C = A:D$ & $1:C = B:E$ (§. 59); erit $A:D = B:E$ (§. 156), conſequenter $A:B = D:E$ (§. 164). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

171. Ergo ſi $A > B$, etiam $AC > BC$ (§. 139), hoc eſt, ſi majus & minus per idem vel æqualia multiplices, factum prius eſt majus altero.

THEOREMA 21.

172. *Si quantitates quaſcunque A & B per eandem tertiam C vel per æqualia dividas; quoti F & G ſunt inter ſe ut A & B.*

DEMONSTRATIO.

24:12 Cum ſit C : A = 1 :
3)——— F & C : B = 1 : G (§.
8: 4 62); C : 1 = A : F &
8:4=24:12 C : 1 = B : G (§ 164).
Ergo ob ſuppoſitam utrobique unitatem eandem A : F = B : G (§. 156), conſequenter A : B = F : G (§. 164). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

173. Si A > B, etiam F > G (§. 139), hoc eſt, ſi majus & minus per idem vel æqualia dividas, quotus prior poſteriore major eſt.

THEOREMA 22.

174. *Si rationum ſimilium A : B & C : D antecedentes vel conſequentes per idem E dividas; in caſu priore quoti F & G ad conſequentes B & D; in poſteriore antecedentes A & B ad quotos H & K eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

3:6=12:24 Quoniam A : B =
3 3 C : D, *per hypoth.* erit
——— A : C = B : D (§. 164).
1:6=4:24 Sed A : E = F & C : E
= G, *per hypoth.* Ergo F : G = A : C (§. 172) = B : D (§. 156), conſequenter F : B = G : D (§. 164). *Quod erat unum.*

Eodem modo oſtenditur, eſſe A : H = C : K. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 23.

175. *Si rationum ſimilium* A : B *&* C : D *antecedentes vel conſequentes per eandem quantitatem* E *multiplices; in caſu priore facta* AE *&* CE *ad conſequentes* B *&* D, *in poſteriore antecedentes* A *&* C *ad facta* BE *&* DE *eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

2:6=3:9 Quia A : B = C : D,
6 6 *per hypoth.* A : C = B :
——— D (§. 164). Sed EA :
12:6=18:9 EC = A : C (§. 170).
Ergo EA : EC = B : D (§. 156), conſequenter EA : B = EC : D (§. 164). *Quod erat unum.*

Eodem modo oſtenditur, eſſe A : BE = C : DE. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 24.

176. *Si rationum ſimilium* A : B *&* C : D *antecedentes per idem* E *& conſequentes per idem* F *multiplices aut dividas; in caſu priore facta, in poſteriore quoti eandem inter ſe rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

3:6=12:24 A : B = C : D, *per*
2 3 2 3 *hypoth.* Ergo EA :
——— B = EC : D (§. 175),
6:18=24:72 conſequenter EA :
FB = EC : FD (§. *cit.*). *Quod erat unum.*

$3:6 = 12:24$
$3 \quad 2 \qquad 3 \quad 2$
$1:3 = 4:12$

Sit $A:E = G$, $B:F = H$, $C:E = K$ & $D:F = L$: Quoniam $A:B = C:D$, *per hypoth.* $G:B = K:D$ (§ 174). Ergo & $G:H = K:L$ (§. *cit.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 25.

177 *Pars antecedentis in ratione majore ad ſuum conſequentem eandem rationem habet, quam antecedens minoris ad conſequentem ſuum.*

DEMONSTRATIO.

Si A ad B rationem majorem habet, quam C ad D; erit $A:B > C:D$ (§. 147). Ut igitur ratio prior alteri æqualis evadat, neceſſe eſt ut minus quam A, hoc eſt, pars ipſius (§. 18), per B dividatur (§. 173): quæ pars ſi dicatur F, erit $F:B = C:D$, hoc eſt, in majore ratione antecedentis pars eandem rationem habet ad ſuum conſequentem, quam minoris antecedens ad ſuum (§. 142). *Q. e. d.*

THEOREMA 26.

178. *Si fuerint quotcunque rationes ſimiles $A:B$, $C:D$, $E:F$, $G:H$ &c. ſumma omnium antecedentium $A + C + E + G$ &c. eſt ad ſummam omnium conſequentium $B + D + F + H$ &c. ut antecedens unius rationis A ad ſuum conſequentem B.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus e. gr. eſſe $A = \frac{1}{2}B$, $C = \frac{1}{2}D$, $E = \frac{1}{2}F$, $G = \frac{1}{2}H$; erit $A + C + E + G = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}F + \frac{1}{2}H$ (§. 80), hoc eſt, ſumma omnium antecedentium eſt ſubdupla ſummæ omnium conſequentium, conſequenter ut antecedens unius rationis ad ſuum conſequentem. Eodem modo cum argumentatio procedat, ſi alia quæcunque ratio antecedentium ad conſequentes ponatur, vel etiam antecedentes ſint conſequentibus majores: patet propoſitum. *Q. e. d.*

THEOREMA 27.

179. *Si fuerit ut totum $A + C$ ad totum $B + D$, ita ablatum C ad ablatum D; erit etiam reliquum A ad reliquum B ut totum $A + C$ ad totum $B + D$ vel ut ablatum C ad ablatum D.*

DEMONSTRATIO.

$24:12$
$6:3$
$18:9$

Aut $A:B = C:D$, aut $A:B > C:D$, aut denique $A:B < C:D$ (§. 75. 19). Ponamus $A:B > C:D$. Ergo pars ipſius A, quæ dicatur F, erit ad B ut C ad D (§. 177), hoc eſt, $F:B = C:D$ (§. 142), conſequenter $F + C : B + D = C:D$ (§. 178). Quare cum etiam ſit $A + C : B + D = C:D$, *per hypoth.* erit $F + C = A + C$ (§. 69) adeoque $F = A$ (§. 83). Sed F eſt pars ipſius

A *per*

A *per demonſtrata* : Pars igitur toti æqualis: quod cum ſit abſurdum (§. 76) ut ſit $A:B > C:D$, fieri nequit. Idem abſurdum cum ſequatur, ſi ponamus $A:B < C:D$; erit $A:B = C:D$, conſequenter quoniam *ex hypoth.* $A + C : B + D = C : D$, etiam $A:B = A + C : B + D$ (§. 156). *Q. e d.*

THEOREMA 28.

180. *In rationibus ſimilibus $A:B$ & $C:D$ differentia antecedentium $A - C$ eſt ad differentiam conſequentium $B - D$, ut antecedens rationis utriuslibet ad ſuum conſequentem.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus $A > B$ & $C > D$: erunt A & C tota, B & D eorum partes (§. 9, 18). Quamobrem cum ſit $A:B = C:D$ *per hypoth* erit $A - C : B - D = A : B$ (§. 179). *Q. e. d.*

THEOREMA 29.

181. *Si fuerit ut antecedens primæ rationis ad ſuum conſequentem, ita antecedens alterius ad conſequentem ſuum; erit etiam* componendo, *ut ſumma antecedentis & conſequentis primæ rationis ad antecedentem vel conſequentem primæ, ita ſumma antecedentis & conſequentis ſecundæ ad antecedentem vel conſequentem ſecundæ.*

DEMONSTRATIO.

$4:2 = 10:5$

$6:2 = 15:5$

vel $6:4 = 15:10$

Si $A:B = C:D$, *per hypoth.* erit $A:C = B:D$ (§. 164). Sed $A + B : C + D = A : C = B : D$ (§. 178). Ergo $A + B : A = C + D : C$, item $A + B : B = C + D : D$ (§ 164). *Q. e. d.*

THEOREMA 30.

182. *Si fuerit $A:B = a:b$ & $A:C = a:c$ &c. erit $A : A + B + C = a : a + b + c$.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam $A:B = a:b$ & $A:C = a:c$ *per hypoth.* erit $A:a = B:b = C:c$ (§. 156). Quare $A:a = A + B + C : a + b + c$ (§. 178) & hinc $A : A + B + C = a : a + b + c$ (§. 164). *Q. e. d.*

THEOREMA 31.

183. *Si fuerit ut antecedens primæ rationis ad ſuum conſequentem, ita antecedens alterius ad conſequentem ſuum; erit etiam* dividendo *ut differentia terminorum primæ rationis ad ejus antecedentem vel conſequentem, ita differentia terminorum ſecundæ ad ſuum antecedentem vel conſequentem.*

DEMONSTRATIO.

$6:4 = 15:10$

$2:4 = 5:10$

$2:6 = 5:15$

Si fuerit $A:B = C:D$, *per hypoth.* erit $A:C = B:D$ (§. 164), conſequenter $A - B : C - D = B : D = A : C$ (§. 180). Ergo $A - B : B = C - D : D$ & $A - B : A = C - D : C$ (§. 164). *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA 32.

184. *Si fuerit* ordinate *ut antecedens primæ rationis A ad ſuum conſequentem B, ita antecedens ſecundæ D ad conſequentem ſuum E; & ut conſequens primæ B ad aliud quidpiam C, ita conſequens ſecundæ E ad aliud quidpiam F: erit* ex æquo *antecedens primæ A ad C ut antecedens ſecundæ D ad F.*

DEMONSTRATIO.

$4:2 = 6:3$
$2:8 = 3:12$
$4:8 = 6:12$

Quoniam A : B = D : E & B : C = E : F, *per hypoth.* erit A : D = B : E & B : E = C : F (§. 164), conſequenter A : D = C : F (§. 156). Quare A : C = D : F (§. 164). *Q. e. d.*

THEOREMA 33.

185. *Si fuerit* perturbate *ut antecedens primæ rationis A ad ſuum conſequentem B, ita antecedens ſecundæ E ad ſuum conſequentem F; & ut conſequens primæ B ad aliud quidpiam C, ita aliud quiddam D ad antecedentem ſecundæ E; erit etiam* ex æquo *antecedens primæ A ad C ut D ad conſequentem ſecundæ F.*

DEMONSTRATIO.

$8:4 = 12:6$
$4:16 = 3:12$
$8:16 = 3:6$

Quoniam A : B = E : F, *per hypoth.* ſi ponatur B : C = F : G, erit A : C = E : G (§. 184). Eſt vero etiam B : C = D : E, *per hypoth.* Ergo D : E = F : G (§. 156) & D : F = E : G (§. 164), conſequenter A : C = D : F (§. 156). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

186. Si idem C vel æqualia per majus A & minus B dividas, quotus prior F erit minor poſteriore G. Eſt enim A : C = 1 : F & B : C = 1 : G (§. 62), adeoque C : B = G : 1 (§. 160). Ergo A : B = G : F (§. 185). Sed A > B, *per hypoth.* Ergo G > F (§. 139).

THEOREMA 34.

187. *Majus A ad idem C majorem rationem habet, quam minus B.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam A > B, *per hypoth.* erit A : C > B : C (§. 173), hoc eſt, A ad C majorem rationem habet, quam B ad C (§. 147). *Q. e. d.*

THEOREMA 35.

188. *Quod ad idem majorem habet rationem quam alterum, id altero majus eſt.*

DEMONSTRATIO.

Habeat A ad C rationem majorem quam B ad idem C, *per hypoth.* Ergo pars ipſius A eandem ad C rationem habet quam B ad idem C (§. 177), adeoque ipſi B æqualis eſt (§. 169). Quare A > B (§. 18). *Q. e. d.*

THEOREMA 36.

189. *Idem C ad majus A minorem habet rationem quam ad minus B.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam $A > B$, *per hypoth.* erit $C:A < C:B$ (§.186). Ergo C ad A minorem habet rationem quam ad B (§.147). *Q.e.d.*

THEOREMA 37.

190. *Ad quod idem majorem rationem habet quam ad alterum, id altero minus eſt.*

DEMONSTRATIO.

Habeat C ad A rationem majorem, quam ad B, *per hypoth.* Ergo pars ipſius C, quæ dicatur D, ad A eandem rationem habet, quam ad B (§.177), hoc eſt, $D:A = C:B$ (§.142) & hinc $D:C = A:B$ (§.164). Sed $D < C$ (§.18). Ergo $A < B$ (§.139). *Q.e.d.*

THEOREMA 38.

191. *Duæ quantitates ſe mutuo multiplicantes idem factum gignunt.*

DEMONSTRATIO.

4	2
2	4
8 =	8

Sint duo factores A & B; erit $1:A = B:AB$ & $1:B = A:BA$ (§.59). Eſt vero etiam $1:A = B:BA$ (§.164), adeoque ob unitatem eandem, *per hypoth.* $B:AB = B:BA$ (§.156), conſequenter $B:B = AB:BA$ (§.164). Sed $B = B$ (§.73). Ergo $AB = BA$ (§.139). *Q.e.d.*

COROLLARIUM.

192. Sint tres factores A, B & C. Quoniam $AB = BA$ (§.191); erit $CAB = CBA$ (§.85), adeoque & $ABC = BAC$ (§.191). Similiter quia $CB = BC$ (§.191); erit $ACB = ABC$ (§.85), adeoque & $CBA = BCA$ (§.191). Quare $CAB = CBA = ABC = BAC = ACB = BCA$ (§.79), hoc eſt, factum idem producitur, quocunque ordine efficientes in ſe invicem ducantur.

SCHOLION.

193. *Idem eodem modo oſtenditur, ſi plures fuerint factores.*

THEOREMA 39.

194. *Si factum per multiplicandum dividitur, quotus eſt multiplicans; ſi per multiplicantem, quotus eſt multiplicandus.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim multiplicandus ad factum ut unitas ad multiplicantem (§.59). Eſt etiam multiplicandus ad factum (ſi hoc per illud dividi concipimus) ut unitas ad Quotum (§.62). Ergo quotus æqualis eſt multiplicanti (§.169). *Quod erat unum.*

Quoniam unitas eſt ad multiplicantem ut multiplicandus ad factum (§.59); eadem unitas ad multiplicandum ut multiplicans ad factum (§.164). Sed ſi factum per multiplicantem dividis; multiplicans eſt ad factum ut unitas ad quotum (§.62). Ergo quotus eſt æqualis

lis multiplicando (§. 169). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

195. Omnia igitur facta ſunt numeri compoſiti (§. 68).

THEOREMA 40.

196. *Si quotus per diviſorem multiplicatur, aut contra, factum eſt dividendus.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim ut unitas ad diviſorem ita quotus ad dividendum (§. 165). Sed ſi quotus per diviſorem multiplicatur, erit ut unitas ad diviſorem, ita quotus ad factum (§. 59). Ergo factum æquale eſt dividendo (§. 169). *Quod erat unum.*

Idem vero cum ſit factum, ſi diviſor per quotum multiplicetur (§. 191); erit quoque in hoc caſu factum æquale dividendo. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 41.

197. *Sint quatuor quotcunque quantitates proportionales A : B = C : D, ſint totidem aliæ inter ſe quoque proportionales E : F = G : H, ſi poſteriores ſingulas in ſingulas priores ducas, facta inter ſe proportionalia ſunt, nempe AE : FB = GC : DH*

DEMONSTRATIO.

Quon: A : B = C : D & E : F = G : H
per hyp. E F E F C D C D

erit EA : FB = EC : FD & CE : DF = CG : DH. (§. 176). Sed EC = CE & FD = DF (§. 191). Ergo EA : FB = CG : DH (§. 156) = GC : HD (§. 191). *Q. e. d.*

THEOREMA 42.

198. *Rationis compoſitæ exponens eſt æqualis facto, quod producunt exponentes ſimplicium.*

DEMONSTRATIO.

Sit rationis primæ A : B exponens = *m*; ſecundæ C : D exponens ſit = *n*. Erit *m* : 1 = A : B & *n* : 1 = C : D (§. 131). Ergo *mn* : 1 = AC : BD (§. 197), conſequenter *mn* eſt exponens rationis AC : BD (§. 131) hoc eſt compoſitæ ex A : B & C : D (§. 148). *Q. e. d.*

SCHOLION.

199. *Sint rationes 8 : 4 & 24 : 6. Illius exponens eſt 2, hujus 4. Rationem compoſitam datarum habent 192 & 24. Sed 192 : 24 = 8, quod eſt factum ex 2 in 4. Cæterum eadem demonſtratio locum habet, ſi plures fuerint rationes.*

THEOREMA 43.

200. *Si plures fuerint quantitates continue proportionales A, B, C, D &c. prima A ad tertiam C eſt in ratione duplicata; ad quartam D in ratione triplicata &c. primæ A ad ſecundam B.*

DEMONSTRATIO.

1. Quoniam A : B = B : C, *per hypoth.* AB ad BC habet rationem duplicatam ipſius A ad B (§. 148). Sed AB : BC = A : C (§. 172). Ergo

etiam A ad C rationem duplicatam habet, ipſius A ad B (§. 156). *Quod erat unum.*

2. Quoniam A:B = B:C = C:D, *per hypoth.* ABC eſt ad BCD in ratione triplicata ipſius A ad B (§. 148). Sed ABC:BCD = A:D (§. 170). Ergo etiam A ad D eſt in ratione triplicata ipſius A ad B (§. 156). *Quod erat ſecundum.*

3. Facile apparet, quod eodem modo demonſtrari poſſit, primum terminum habere ad quintum rationem quadruplicatam; ad ſextum quintuplicatam &c. primi ad ſecundum. *Quod erat tertium.*

THEOREMA 44.

201. *Si fuerit quæcunque quantitatum A, B, C, D, E, F &c. ſeries; ratio primæ A ad ultimam F componitur ex rationibus quantitatum extremis interjacentium A:B, B:C, C:D, D:E, E:F &c.*

DEMONSTRATIO.

Si enim omnes antecedentes, itidemque omnes conſequentes in ſe invicem multiplices, facta ABCDE & BCDEF ſunt in ratione compoſita rationum A:B, B:C, C:D, D:E, E:F &c. (§. 148). Sed ABCDE:BCDEF = A:F (§. 170). Ergo etiam A ad F eſt in ratione compoſita omnium modo recenſitarum (§. 156). *Q.e.d.*

THEOREMA 45.

202. *Rationes compoſitæ ex rationibus, quarum ſingulæ ſingulis æquales ſunt, inter ſe æquales ſunt.*

DEMONSTRATIO.

6:3 = 4:2
3:1 = 12:4
5:1 = 20:4
———————
90:3 = 960:32
= 30

Sit A:B = C:D, E:F = G:H, I:K = L:M, *per hypoth.* erit AE:FB = CG:DH (§. 197), adeoque & AEI:FBK = CGL:MHD (§. *cit.*). Ratio vero AEI:FBK componitur ex rationibus A:B, E:F & I:K; ratio CGL:DHM ex rationibus C:D, G:H, L:M (§. 146). Ergo conſtat propoſitum. *Q.e.d.*

CA-

CAPUT IV.

De

SPECIEBUS ARITHMETICÆ IN NUMERIS FRACTIS.

THEOREMA 46.

203. *Si numerator eſt æqualis denominatori, fractio $\frac{4}{4}$ æquivalet integro; ſi minor, fractio $\frac{3}{4}$ minor eſt integro; ſi major, fractio $\frac{5}{4}$ integro ſeu unitate major eſt.*

DEMONSTRATIO.

Denominator enim indicat unitatem ſeu integrum in partes æquales (e. gr. in noſtro caſu in 4) diviſum, & numerator numerat partes iſtiusmodi in caſu aliquo datas (§. 53). Quodſi ergo numerator denominatori æqualis, *per hypoth.* tot dantur partes, quot habet integrum. Ergo fractio integro æqualis (§. 78). *Quod erat primum.*

Si numerator denominatore minor; *per hypoth.* aliquot ſaltem dantur partes integri, non omnes. Ergo fractio tantum aliquot partibus integri æqualis, conſequenter eadem minor (§. 18). *Quod erat ſecundum.*

Si denique numerator major eſt denominatore *per hypoth.* plures dantur partes, quam habet integrum. Sed tot partes, quot habet integrum, integro æquales ſunt (§. 78). Ergo integrum parti fractionis æquale eſt, conſequenter ipſa integro major (§. 18.) *Quod erat tertium.*

SCHOLION.

204. Fractiones *integro æquales vel eodem majores dicuntur vulgo* ſpuriæ, *quia proprie loquendo fractiones non ſunt, niſi quæ integro minores.* (§. 34).

PROBLEMA 16.

205. *Invenire, quot integra fractio, quæ integro major ($\frac{8}{4}$), contineat.*

RESOLUTIO.

Numerator 8 per denominatorem 4 dividatur; dico, quotum 2 indicare, quod petebatur.

DEMONSTRATIO.

Quotus enim 2 indicat, quoties numerator 4 in denominatore 8 contineatur (§. 62). Sed denominator idem eſt cum integro (§. 53). Ergo quotus indicat, quoties integrum in fractione contineatur. *Q. e. d.*

PROBLEMA 17.

206. *Integros numeros reducere ad fractionem denominatoris dati.*

RESOLUTIO.

1. Multiplicetur numerus integer per denominatorem datum.
2. Factum ſcribatur loco numeratoris. Ita reperies $3 = \frac{24}{8}$, $5 = \frac{30}{6}$, $7 = \frac{28}{4}$.

DEMONSTRATIO.

Eſt nempe factum ad denominatorem datum, ut numerus integer ad unitatem (§. 59. 160). Sed unitas & denominator datus ſunt idem integrum (§. 53). Ergo fractio & numerus integer æquales ſunt (§. 169). *Q. e. d.*

THEOREMA 47.

207. *Fractiones homogeneæ æquales ſunt, quarum numeratores ad ſuos denominatores eandem rationem habent; major eſt, cujus numerator habet rationem majorem; minor vero, cujus numerator habet minorem.*

DEMONSTRATIO.

Cum fractiones inter ſe ſint homogeneæ, *ex hypoth.* ad eandem unitatem referuntur (§. 31), adeoque ipſarum denominatores idem totum referunt (§. 53). Quare ſi fractiones ad ſuos denominatores eandem rationem habent, *ex hyp.* æquales ſunt (§. 169): cujus vero numerator ad denominatorem ſuum rationem majorem habet, ea major eſt; cujus numerator minorem habet, ea minor eſt (§. 188). *Q. e. d.*

E. gr. $\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$. Sed $\frac{3}{24} < \frac{2}{6}$.

SCHOLION.

208. *Intelligitur adeo identitas fractionum, ſi numerator unius toties contineatur in denominatore ſuo, quoties numerator alterius in ſuo continetur. Fractio minor eſſe intelligitur, ſi numerator ipſius pluries continetur in ſuo denominatore, quam numerator alterius in denominatore ſuo: id quod diviſio denominatoris per numeratorem prodit.*

COROLLARIUM.

209. Quodſi ergo tam numerator, quam denominator alicujus fractionis ($\frac{4}{6}$) per eundem numerum (2) multiplicetur vel dividatur; in caſu priore facta ($\frac{8}{24}$) in poſteriore quoti ($\frac{2}{3}$) conſtituunt fractionem datæ ($\frac{4}{6}$) æquivalentem (§. 170. 172).

PROBLEMA 18.

210. *Invenire communem menſuram maximam duorum numerorum.*

RESOLUTIO.

1. Dividatur numerus major per minorem.
2. Diviſor primæ diviſionis ſeu numerus datus minor denuo dividatur per reſiduum primæ diviſionis.
3. Similiter diviſor ſecundæ diviſionis dividatur per reſiduum ſecundæ & ita porro, donec nihil remaneat.

Dico,

Dico, diviſorem ultimum eſſe communem menſuram maximam numerorum datorum.

E. gr. Sint numeri dati 168 & 240, reperietur eorum communis menſura maxima 24 hunc in modum:

```
172      24        1
240(1   168(2    72(3
168      72       24
```

Similiter communis menſura maxima numerorum 95 & 47 reperitur 1.

DEMONSTRATIO.

Diviſor ultimus 24 metitur diviſorem antecedentis (in noſtro quidem caſu ſecundæ) diviſionis 72, *per hypoth. & §. 66.* Ergo & metitur dividendum antecedentis (hoc eſt, in noſtro caſu ſecundæ) diviſionis 168, quippe ex dividendo ultimæ diviſionis 72, aliquoties (hic quidem bis) ſumto & ejus diviſore 24 compoſitum. Metitur adeo numerum unum datorum 168 & reſiduum primæ diviſionis 72, adeoque & numerum alterum datorum 240, quippe ex minore 168 aliquoties (in noſtro caſu ſemel) ſumto & reſiduo primæ diviſionis 72 compoſitum. Eſt itaque communis numerorum datorum menſura (§. 70).

Eſſe vero communem menſuram maximam ratione reciproca per indirectum demonſtratur. Ponamus enim numero invento 24 majorem eſſe menſuram numerorum datorum 240 & 168 communem. Patet igitur ex antecedentibus, quod etiam metiri debeat reſiduum primæ ſeu diviſorem ſecundæ diviſionis 72, adeoque & reſiduum ſecundæ diviſionis ſeu diviſorem tertiæ, hoc eſt, in noſtro caſu inventam communem menſuram 24. Sed numerus is eadem major eſt, *ex hyp*: Ergo communem menſuram inventam 24 metietur numerus major, quam 24: Quod cum ſit abſurdum, (§. 66) major communis menſura non datur. Eſt igitur ea, quam invenimus, maxima. *Q. e. d.*

SCHOLION. 1.

211. *Qui demonſtrationem uno quaſi obtutu comprehendere cupiunt; illos hac numerorum datorum reſolutio juvabit.*

I. 72 = 3. 24, per diviſ. tert.
II. 168 = 2. 72 + 24, per diviſ. ſec. = 2. 3. 24 + 24, per num. I. = 7. 24
III. 240 = 1. 168 + 72 per diviſ. prim. = 7. 24 + 3. 24 per num. I & II = 10. 24.

SCHOLION 2.

212. *In lineis communis menſura maxima invenitur per mutuam earundem a ſe invicem ſubtractionem. In numeris autem compendii gratia diviſio ſubtractioni ſubſtituitur: ut exemplum oſtendit.*

240	96	48
168	72	24
72	24	24
96	48	0

PROBLEMA 19.

213. *Fractionem datam ad minores terminos reducere, h.e. invenire fractionem datæ* ($\frac{20}{48}$) *æquivalentem, ſed minoribus numeris expreſſam.*

RESOLUTIO.

Dividatur tam numerator 20, quam denominator 48 per eundem numerum 4, qui utrumque metitur: quoti 5 & 12 componunt fractionem quæſitam $\frac{5}{12}$ (§. 209).

COROLLARIUM 1.

214. Si ergo diviſio fit per communem menſuram maximam numeratoris ac denominatoris (§. 210); fractio ad terminos minimos reducitur.

COROLLARIUM 2.

215. Si numeratorem ac denominatorem fractionis datæ ſola unitas metitur; ad minores terminos reduci nequit.

SCHOLION.

216. *Moleſtius accidit inexercitatis communem menſuram maximam quarere; quam iterata per menſuras minores ſponte animadverſas diviſione fractiones reducere.*

PROBLEMA 20.

217. *Duas vel plures fractiones datas ad eandem denominationem reducere, h. e. invenire fractiones, quæ datis æquales ſunt & communi denominatore gaudent.*

RESOLUTIO.

Caſus I. Si fractiones duæ dentur, quælibet integra multiplicetur per denominatorem alterius.

E.gr. $5)\frac{2}{3}.\ 3)\frac{4}{5} = \frac{10}{15}.\ \frac{12}{15}$

Caſus II. Si plures dentur, tam numerator, quam denominator uniuscujusque ducatur in factum ex denominatoribus reliquarum.

E. gr. $24)\ \frac{2}{3}.\quad 12)\ \frac{1}{6}.\quad 18)\ \frac{3}{4} = \frac{48}{72}.\ \frac{12}{72}.\quad \frac{54}{72}.$

DEMONSTRATIO.

Fractiones communem habere denominatorem, patet per §. 85 & §. 191. 192. Quod vero æquivaleant primum propoſitis, manifeſtum eſt per §. 209. Conſtat ergo propoſitum. *Q. e. d.*

PROBLEMA 21.

218. *Fractiones addere.*

RESOLUTIO.

1. Si fractiones datæ diverſos denominatores habuerint, reducantur ad eandem (§. 217).
2. Addantur numeratores (§. 88) & ſummæ ſubſcribatur denominator communis.

E. gr. $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15}$ (§. 217) $= \frac{22}{15} = 1\frac{7}{15}$ (§. 205). $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{3}{4} = \frac{48}{72} + \frac{12}{72} + \frac{54}{72}$ (§. 217) $= \frac{114}{72} = 1\frac{42}{72}$ (§. 205) $= 1\frac{7}{12}$ (§. 213).

DEMONSTRATIO.

Cum denominatores ſint nomina unitatum, ex quibus numeratores componuntur (§. 53); numeratores tantum adduntur. Quoniam

niam vero addi nequeunt, niſi fuerint homogenei (§. 55); ad eandem denominationem ſunt reducendi (§. 31). *Q. e. d.*

PROBLEMA 22.

219. *Fractionem datam ex alia data ſubtrahere.*

RESOLUTIO.

1. Si fractiones datæ diverſos habent denominatores, reducantur ad eandem denominationem (§. 217).
2. Numerator unius ex numeratore alterius ſubducatur (§. 95) & reſiduo denominator communis ſubſcribatur.

E. gr. $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (§. 213) & $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{6}{10} - \frac{5}{10}$ (§. 217) $= \frac{1}{10}$.

PROBLEMA 23.

220. *Fractionem per fractionem multiplicare.*

RESOLUTIO.

Ducatur numerator unius fractionis in numeratorem, & denominator unius in denominatorem alterius; facta conſtituunt fractionem quæſitam.

E. gr. $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (§. 213).

DEMONSTRATIO.

Sit $A : B\ (\frac{2}{3}) = F$ & $C : D\ (\frac{1}{2}) = G$; erit $B : A = 1 : F$ & $D : C = 1 : G$ (§. 62). Ergo $BD : AC = 1 : FG$ (§. 197), hoc eſt, $AC : BD\ (\frac{2.1}{3.2}) = FG\ (\frac{2}{6})$, (§. 160). *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

221. *Non mirum, quod factum factoribus minus, cum revera diviſio ſit, quæ multiplicatio vocatur. E. gr. $\frac{2}{3}$ multiplicare per $\frac{1}{2}$ idem eſt ac invenire dimidium duarum partium tertiarum.*

SCHOLION 2.

222. *Vix autem opus eſt ut annotemus, ſi fractio per numerum integrum multiplicanda, ducendum eſſe ſolum numeratorem in integrum numerum datum. E. gr. factum ex $\frac{3}{7}$ in 2 eſt $\frac{6}{7}$.*

PROBLEMA 24.

223. *Fractionem $\frac{4}{5}$ per aliam fractionem $\frac{2}{3}$ dividere.*

RESOLUTIO.

1. Diviſor invertatur. E. gr. loco $\frac{2}{3}$ ſcribe $\frac{3}{2}$.
2. Diviſor inverſus ducatur in dividendum (§. 220): quod prodit $\frac{12}{10}$ ſeu $1\frac{1}{5}$ eſt quotus quæſitus.

DEMONSTRATIO.

Fractionem per fractionem diviſurus inveſtigare debet, quoties dividenda contineat dividentem (§. 62. 160). Sed ſi fractiones communi denominatore gaudent; dividenda toties continet dividentem, quoties numerator illius numeratorem hujus (§. 172). Quare fractiones datæ ad communem denominatorem reducendæ ſunt & numerator dividendæ per numeratorem dividentis dividi debet. Enimvero dum fractiones duæ ad eandem denominationem reducuntur,

cuntur, numerator primæ enaſcitur ex numeratore ipſius dato in denominatorem ſecundæ, numerator vero ſecundæ ex ipſius numeratore dato in denominatorem primæ ducto (§ 217). Obtinemus adeo numeros, ex quorum diviſione quotus quæſitus emergit, ſi diviſor inverſus juxta §. 220 in fractionem dividendam ducatur. *Q.e.d.*

SCHOLION.

224. *Neque vero mirum eſt, quod quoti numeri integri eſſe poſſint. Una enim fractio alteram ter, quater, millies &c. continere poteſt. Apparet adeo, cum fractiones ſint rationes (§. 120), eas dividere idem eſſe ac rationum rationes inveſtigare.*

CAPUT V.

De

POTENTIIS NUMERORUM, GENESI PRÆSERTIM AC ANALYSI NUMERORUM QUADRATORUM ET CVBICORVM.

DEFINITIO 51.

225. Si numerus quicunque 2 in ſeipſum ducatur, factum 4 *Numerus quadratus*; ipſe autem hujus intuitu *Radix quadrata* appellatur.

COROLLARIUM.

226. Cum ſit ut unitas ad radicem quadratam, ita radix ad ipſum quadratum (§ 59. 225); erit radix media proportionalis inter unitatem & quadratum (§. 145).

DEFINITIO 52.

227. Si numerus quadratus 4, porro per radicem 2 multiplicetur; factum 8 dicitur *Numerus Cubicus* ſeu *cubus*, & radix 2 ejus intuitu *Radix cubica*.

COROLLARIUM.

228. Cum ſit ut unitas ad radicem, ita radix ad quadratum (§. 225. 59) & ut unitas ad radicem ita quadratum ad cubum (59, 227); erit etiam radix ad quadratum ut quadratum ad cubum (§. 156), hoc eſt, unitas, radix, quadratum & cubus in continua proportione progrediuntur (§. 145) & radix cubica eſt primus ex duobus numeris mediis proportionalibus inter unitatem & cubum.

DEFI-

DEFINITIO 53.

229. Cum iſtiusmodi multiplicatio in infinitum continuari poſſit; facta inde genita generali *poteſtatum, potentiarum, dignitatum* nomine appellari ſolent.

DEFINITIO 54.

230. *Exponens dignitatis* eſt numerus, qui indicat, quoties dignitas data per radicem dividenda, antequam ad unitatem perveniatur. Ita exponens quadrati eſt 2, cubi 3 (§. 225. 227).

DEFINITIO 55.

231. Hodie tantum non omnes dignitates optime diſtinguunt per exponentes, ita ut radix dicatur *dignitas prima*, quadratum *ſecunda*, cubus *tertia* &c. Qui Arabes ſequuntur, ſingulis potentiis peculiaria imponunt nomina, diverſa tamen ab iis, quibus cum *Diophanto* (n) utuntur *Vieta* (o) & *Oughtredus* (p). Nomina Arabum ſunt: *Radix*, *Quadratum*, *Cubus*, *Quadratoquadratum*, ſeu *biquadratum*, *Surdeſolidum*, *Quadratum Cubi*, *Surdeſolidum ſecundum*, *Quadratiquadrati quadratum*, *Cubus cubi*, *Quadratum Surdeſolidi*, *Surdeſolidum tertium* &c. Nomina Diophanti ſunt: *Latus* ſeu *Radix*, *Quadratum*, *Cubus*, *Quadratoquadratum*, *Quadratocubus*, *Cubocubus*, *Quadratoquadratocubus*, *Quadratocubocubus*, *Cubocubocubus*; &c.

SCHOLION.

232. *Multi quadratum vocant* Zenſum. *Hinc compoſita:* Zenſizenſus, Zenſicubus, Zenſizenzenſus, Zenſurdeſolidus &c.

HYPOTHESIS 12.

233. *Qui Arabum denominationibus uſi, potentiarum ſignis ſequentibus utuntur:* 1. R 2. ʒ/ 3. C, 4. ʒʒ/ 5. ß/ 6. ʒ C, 7. Bß/ 8. ʒʒʒ/ 9. CC, 10. ʒß/ 11. Cß &c. *Multo commodius* Carteſius (q) *radici ſuperius a dextris jungit exponentem*, e. gr. *ſi* a *fuerit radix, erunt potententiæ ipſam ſequentes* a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 &c. *vel, ſi* $a = 2$, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, &c. *ita ut ſit* $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$ *&c.*

DEFINITIO 56.

234. *Quantitatem ad dignitatem deſideratam evehere* idem eſt ac invenire factum ex ipſa aliquoties in ſe ducta emergens. E. gr. 2 evehere ad dignitatem tertiam, idem eſt ac invenire factum 8, cujus factores 2. 2. 2.

DEFINITIO 57.

235. *Ex dignitate data radicem extrahere, vel latus educere* idem eſt ac invenire numerum, 2, qui aliquoties in ſe ipſum ductus datam potentiam (e. gr. tertiam) 8 producit.

(n) in libris Arithmeticorum. (o) in Iſagoge in Artem Analyt. c. 3. f. m. 3.
(p) in clave Mathem. c. 12 p. m. 34. (q) in Geometria.

SCHOLION.

236. *Cum dignitates ſuperiores nonniſi in Analyſi uſum habeant; in præſenti geneſin & analyſin quadratorum & cuborum tantum tradimus. Radices vero quadratas ac cubicas extracturus omnium unitatum numeros quadratos & cubicos noſſe debet, quos ſequens tabula exhibet:*

Radices.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrati	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubici	1	8	27	64	125	216	343	512	729

DEFINITIO 58.

237. *Radix* tam quadrata, quam cubica, aut dignitatis ſuperioris cujuscunque dicitur *binomia*, ſi ex duabus; *trinomia*, ſi ex tribus; *multinomia*, ſi ex pluribus, quam duabus partibus conſtat.

THEOREMA 47.

238. *Potentiæ ejusdem gradus ſunt in ratione tantuplicata laterum, quot unitates habet exponens earundem, hoc eſt, quadrata habent rationem duplicatam, cubi triplicatam, quadrato quadrata quadruplicatam &c. rationem ſuarum radicum.*

DEMONSTRATIO.

Rationes multiplicatæ oriuntur, ſi plurium rationum earundem antecedentes, pariterque earundem conſequentes in ſe invicem ducas (§. 148). Sed potentiæ oriuntur, ſi radices A & B aliquoties in ſeipſas ducas (§. 229). Quare cum eadem radix A ad eandem radicem B eandem habeat rationem; ratio quadratorum componitur ex duabus, cuborum ex tribus, quadrato-quadratorum ex quatuor &c. reliquarum potentiarum ex tot rationibus ſimilibus, quot exponens earundem habet unitates. Ergo quadrata habent rationem duplicatam, cubi triplicatam &c. ſuarum radicum (§. 148). *Q.e.d.*

THEOREMA 48.

239. *Quantitatum proportionalium potentiæ eædem ſunt etiam proportionales.*

DEMONSTRATIO.

Habent enim potentiæ eædem rationem multiplicatam ipſarum A:B, B:C, C:D, D:E &c. (§. 238). Sed hæ rationes omnes inter ſe eædem ſunt *per hypoth.* Ergo & rationes multiplicatæ earundem eædem ſunt (§. 202), conſequenter quantitatum proportionalium potentiæ eædem etiam proportionales ſunt (§. 145). *Q.e.d.*

THEOREMA 49.

240. *Numerus quadratus radicis binomiæ componitur ex quadrato partis primæ, ex facto dupli primæ in alteram & ex quadrato partis alterius.*

DEMONSTRATIO.

Prodit enim numerus quadratus

tus, ſi radix in ſeipſam ducitur (§. 225). Utraque vero pars radicis ſigillatim ducitur in utramque ſimul (§. 101). Quare productum componi debet 1. ex facto partis primae in ſeipſam, hoc eſt, ex quadrato partis primae (§. 225) 2. ex facto partis primae in ſecundam & ex facto ſecundae in primam, hoc eſt, ex duplo facto primae in ſecundam, ſeu ex facto dupli primae in ſecundam (§. 191 192), 3. ex facto partis ſecundae in ſeipſam, hoc eſt, ex quadrato partis ſecundae (§. 225). *Q. e. d.*

SCHOLION. I.

241. *Demonſtratio ocularis, ſi in quocunque exemplo ſingulari multiplicatio non actu peragitur, ſed ſaltem indicatur: quo in caſu exempli univerſalis vices tuetur, id nimirum non infelicius quam figurae in Geometria repraeſentans, quod ſingularia in univerſum omnia commune habent. E. gr. ſit radix binomia* 24 *aut* 20 + 4; *erit*

$$\begin{array}{l} 20+4 \\ 20+4 \\ \hline \quad +4.20+4^2 \\ 20^2+20.4 \\ \hline 20^2+2.4.20+4^2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 20^2=400 \\ 2.4.20=160 \\ 4^2=16 \\ \hline 24^2=576 \end{array}$$

Egregium hoc artificium vires imaginationis mire extendit & intellectum juvat tam in demonſtrationibus concipiendis, quam in propoſitionibus inveniendis.

COROLLARIUM 1.

242. Cum pars dextra inter unitates, ſiniſtra inter decades locum obtineat (§. 46); quadratum illius in loco dextimo, factum ex unius duplo in alteram in ſecundo, quadratum denique in tertio a dextimo terminari debet (§. 45. 102).

SCHOLION 2.

243. *Scilicet quadratum partis dextimae nullam adjunctam habet cyphram; duplo facto ex parte una in alteram cyphra una, quadrato autem partis ſiniſtrae duae adjunguntur.*

COROLLARIUM 2.

244. Si radix multinomia fuerit; partes duae aut plures ſiniſtimae habeantur pro una, & extemplo patebit, quadratum numeri cujuscunque componi ex quadratis ſingularum partium & factis ex duplo partis cujuslibet in omnes ipſo ſiniſteriores: ut adeo theorema unum compoſitioni omnium numerorum quadratorum ſufficiat.

SCHOLION 3.

245. *Sit radix* 243. *Sumatur* 240 *pro parte una & 3 pro altera, erit*

$$\begin{array}{lll} 240^2 = 57600 & (§. 241). \\ 2.240.3 = 1440 \\ 3^2 = 9 \\ \hline 243^2 = 59049 \end{array}$$

COROLLARIUM 3.

246. Quonam in loco ſingula producta terminentur, ex corollario primo & ejus ſcholio intelligitur (§. 242. 243). Habenda nimirum eſt ratio cyphrarum numeris in ſe invicem ductis adjungendarum, ſi ſolitarii ponantur.

SCHOLION 4.

247. *Extractio radicis quadratæ, alias tædii plena, facillima evadit, ubi quadratis per theorema præſens componendis operam prius impenderis.*

PROBLEMA 25.

248. *Ex numero quocunque dato radicem quadratam extrahere.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Numerus propoſitus diſtinguatur in claſſes, binas notas claſſi unicuique aſſignando, initio a dextera facto. Tot enim erunt partes radicis, quot claſſes habentur (§. 244, 246). Notandum vero, quod claſſi ſiniſtimæ interdum nonniſi nota unica relinquatur.

2. Jam cum in claſſe ſiniſtima reperiatur quadratum notæ ſiniſtimæ radicis (§. *cit.*); in Tabula radicum (§. 236) quæratur numerus quadratus ei, qui claſſem ſiniſtimam occupat, vel æqualis, vel eodem proxime minor; & ex ipſo ſubtrahatur; radix vero ejus poſt lunulam ſcribatur.

3. Quoti inventi duplum ponatur ſub nota ſiniſtima claſſis ſubſequentis & inde porro ſiniſtrorſum, ſi ex notis pluribus conſtiterit. Inveſtigetur novus quotus *per abacum Pythagoricum* (§. 107), inventusque poſt lunulam ſcribatur: eſt enim pars ſecunda radicis (§. 242, 194).

4. Idem quotus ponatur ſub nota dextima illius claſſis & factum ex numero ſubſcripto integro in diviſorem (§. 242) ſubducatur, ut in diviſione moris eſt.

5. Quodſi operatio juxta regulam tertiam & quartam in reliquis claſſibus iteretur; prodibit radix quæſita (§. 244, 246).

```
5 |90|49 (243          5|76 (24
4 |  |                 4|
--|--|                 -|
1 |90|                 1|76
  (44)|                 (44)
1 76  |                 176
----- |                 ---
   14|49                 0
  (4|83)
 -----
  1449
 -----
    0
```

SCHOLION 1.

249. *Quodſi numerus propoſitus non fuerit perfecte quadratus, partes decimæ, centeſimæ &c. inveniuntur, ſi 2, 4, &c. cyphræ ei dextrorſum adjungantur & operatio continuetur. Si enim unitas in numero quadrato in partes centeſimas dividitur (id quod obtinetur, ſi per* 100 *eum multiplices); radix in decimas dividitur* (§. 225).

```
3|45 (18 57/100
1|
-----
2|45
(28)
224|
-----
2.1.|0.0
(3|68)
18 25|
-----
2 7.5.|00
(37|07)
-----
25949
-----
1551
```

SCHOLION 2.

250. *Si tabulis numerorum quadratorum pro radicibus ab* 1 *usque ad* 1000 *utaris; in iis evolvi poteſt numerus quadratus proxime minor eo, qui tres claſſes ſiniſteriores occupat. Ita ſine ullo labore habentur tres notæ priores, e. gr. in noſtro caſu* 294. *Plures notæ una inveniuntur, ſi tabulæ longius extendantur.*

```
8|6 97.5 (294 2/10
8|64|3 6
-----
5 3 9|00
(58 |89)
530 01
-----
8 9 9
```

THEOREMA 50.

251. *Numerus cubicus radicis binomiæ componitur ex numeris cubicis duarum partium, ex facto tripli quadrati partis primæ in ſecundam & ex facto tripli quadrati partis ſecundæ in primam.*

DEMONSTRATIO.

Numerus cubicus prodit ſi quadratum per radicem multiplicetur (§. 227). Sed quadratum radicis binomiæ componitur ex quadratis partium & facto duplo ex parte una in alteram (§. 240). Quare cubus componitur ex cubo partis primæ, ex triplo facto quadrati partis primæ in ſecundam, ex triplo facto quadrati partis ſecundæ in primam, hoc eſt, ex facto tripli quadrati partis primæ in ſecundam, & facto tripli quadrati partis ſecundæ in primam (§. 191) atque ex cubo partis ſecundæ (§. 101. 225. 227). *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

252. *Demonſtrationem ocularem denuo ſiſtit exemplum ſingulare, in quo multiplicatio tantum indicatur. Sit e. gr. radix* 24 *ſeu* 20 + 4, *erit*

$$24^2 = 20^2 + 2.4.20 + 4^2$$
$$20 + 4$$
$$\overline{\quad + 4.20^2 + 2.4^2.20 + 4^3}$$
$$20^3 + 2.4.20^2 + 4^2.20$$
$$\overline{24^3 = 20^3 + 3.20^2.4 + 3.4^2.20 + 4^3}$$

$$20^3 = 8000$$
$$3.20^2.4 = 4800$$
$$3.4^2.20 = 960$$
$$4^3 = 64$$
$$\overline{24^3 = 13824}$$

CO-

COROLLARIUM I.

253. Cum pars dextra inter unitates, ſiniſtra inter decades locum obtineat (§. 46); numerus cubicus dextræ in loco dextimo, factum ex triplo quadrato ejus in ſiniſtram in ſecundo, factum ex triplo quadrato ſiniſtræ in dexteram in tertio, cubus denique partis ſiniſtræ in quarto loco terminatur (§. 45. 102).

COROLLARIUM 2.

254. Si radix multinomia fuerit, duæ vel plures notæ dextimæ pro una habentur, ut binomiæ formam mentiatur; extemplo patet, quod cubus quicunque componatur ex cubis ſingularum partium radicis & ex factis tripli quadrati quarumlibet ſiniſteriorum in proxime dexteriorem, itemque ex factis tripli quadrati cujuslibet dexterioris in omnes ſiniſteriores.

SCHOLION 2.

255. *Sit radix* 243. *Sume* 240 *pro parte una radicis, erit* 3 *pars altera, conſequenter* (§. 252).

$$240^3 = 13824000$$
$$3.240^2.3 = 518400$$
$$3.240.\ 3^2 = 6480$$
$$3^3 = 27$$
$$243^3 = 14348907$$

COROLLARIUM 3.

256. In quibus autem locis ſingula terminentur facta, ex corollario primo (§. 253) colligitur; habenda nimirum & hic eſt ratio cyphrarum numeris in ſe invicem ductis adjungendarum, ſi ſolitarii ponantur. *Vide exemplum in ſchol. præc.* (§. 255).

SCHOLION 3.

257. *Qui numerorum cubicorum compoſitionem ſibi familiarem reddit, is haud difficulter extractionem radicis cubicæ capiet.*

PROBLEMA 26.

258. *Ex numero dato radicem cubicam extrahere.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Numerus datus diſtinguatur in claſſes, tres notas unicuique aſſignando, initio a dextris facto. Etenim ex tot notis radix componitur, quot claſſes emergunt (§. 253. 256). Notandum vero, non repugnare, ut claſſi ſiniſtimæ una, vel duæ notæ cedant.
2. In Tabula radicum (§. 236) quæratur numerus cubicus eo proxime minor numero, qui in claſſe ſiniſtima continetur, niſi ipſe in eadem inveniatur, atque ab hoc ſubtrahatur; ejus vero radix poſt lunulam ſcribatur: eſt enim pars prima radicis (§. 253).
3. Quoti inventi quadratum triplum (§. 253. 256) ſcribatur ſub nota ſiniſtima claſſis ſubſequentis & inde porro ſiniſtrorſum, ſi ex pluribus notis conſtiterit: quo facto quæratur quotus, qui erit

erit pars ſecunda radicis (§. *cit.* & §. 194).

4. Diviſor ducatur in novum quotum & productum ſub eo deleto ſcribatur, ſub nota vero media claſſis ejusdem terminetur factum ex triplo quadrato novi Quoti in præcedentem; ſub dextima denique cubus novi quoti. Hæc tria facta in unam ſummam collecta ex notis numeri cubici ſupraſcriptis ſubtrahantur (§. *cit.*).

5. Quodſi operatio per reliquas claſſes juxta regulam tertiam & quartam continuetur; prodibit radix quæſita (§. 254).

E. gr. 47|437|928 (362
27|
20|437|
Diviſor (2|7)..|
Fact. ex D. in Q. 16 2 ..|
Fac. ex 3□N.Q. in pr. 3 2 4 .|
Cubus N.Q. 2 16|
Summa factor. 19656|
781|928
Diviſor (388|8)..
Fact. ex Div. in Q.N. 777 6 ..
Fact. ex 3□ N.Q. in pr. 4 3 2.
Cubus N.Q. 8
Summa factorum 781928
000000

SCHOLION. 1.

259. *Si numerus cubicus per* 1000 *multiplicetur, ſingulæ unitates, ex quibus conſtat, in partes* 1000 *dividuntur, adeoque in radice in* 10 (§. 227). *Quare ſi numerus datus non fuerit perfecte cubicus, tres cyphræ eidem adjungendæ ſunt & operatio continuanda, ut partes decimæ habeantur. Porro tres aliæ ſuperaddendæ, ubi centeſimæ deſiderantur &c.*

E. gr. Sit extrahenda radix cubica ex 3; eam reperies $1\frac{44}{100}$.

3 (1 $\frac{44}{100}$
1
2|000
|(3)..
1 2..
48.
64
1744
256|0.0.0
(58|8)..
2352..
672.
64
241984
14016

SCHOLION 2.

260. *Si tabulis numerorum cubicorum utaris, idem opera compendium facere licet, quod ſupra* (§. 250) *in extrahenda radice quadrata commendavimus.*

SCHOLION 3.

261. *Quoniam numerum fractum per numerum fractum multiplicans unius numeratorem in numeratorem alterius & denominatorem pariter unius in alterius denominatorem ducit* (§. 220), *potentiæ autem ex iterata ejusdem numeri per ſe ipſum multiplicatione oriuntur* (§. 229); *radicem ſive quadratam, ſive cubicam extracturus, eam ſigillatim ex numeratore ac denominatore extrahere tenetur. Ita radix quadrata ex* $\frac{4}{9}$ *eſt* $\frac{2}{3}$; *radix cubica ex* $\frac{8}{64}$ *eſt* $\frac{2}{4}$.

PROBLEMA 27.

262. *Probare extractionem radicis quadratæ ac cubicæ.*

RESOLUTIO.

I. Radix quadrata inventa ducatur in ſe ipſam & facto reſiduum, ſi quod fuerit, addatur. Quodſi numerus prodeat, ex quo radix extracta; erit numerus inventus radix quadrata dati vel exacta, vel (ſi talem non habeat) prope vera (§. 225).

18.57
18.57
———
12999
9285
14856
1857
———
3448449
1551
———
3450000

E. gr. Radicem quadratam prope veram ex 345 ſupra (§. 249) reperimus $18\frac{57}{100}$. Duc radicem 18. 57 in ſeipſam & facto 3448449 adde reſiduum 1551: prodibit numerus 345, ex quo extractio fieri debebat, quatuor cyphris auctus: ut in extractione ad inveniendas centeſimas factum erat.

II. Radix cubica inventa ducatur in ſeipſam, & factum denuo in eandem. Producto poſteriori addatur, ſi quod fuerit, reſiduum. Quodſi numerus prodeat, ex quo extractio facta, operatio rite peracta (§. 227).

1.44
1.44
———
576
576
144
———
20736
144
———
82944
82944
20736
———
2985984
14016
———
3000000

E. gr. Superius (§. 259) ex 3 extracta radix eſt $1\frac{44}{100}$. Duc hanc radicem 1. 44 in ſeipſam & factum 20736 denuo in 1. 44. Producto alteri 2985984 adde, quod ſupra reſiduum erat, 14016. Aggregatum eſt radix 3 ſex cyphris aucta, ut in operatione factum erat.

THEOREMA 51.

263. *Si numeri integri non datur radix in integris, nec dabitur per fractos.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus dari numerum fractum, qui ſit radix. Ex ejus itaque iterata multiplicatione per ſe ipſum produci debet numerus datus. (§. 229). Sed quotieſcunque fractum per ſeipſum multiplices, pro-

productum ſemper eſt fractus radice minor (§. 211). Quare cum numerus datus ſit integer, *ex hypoth.* fractus ejus radix eſſe nequit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

264. Jam cum numeri primi in ſe ex nullo alio numero in ſe aliquoties ducto oriantur (§. 67. 194); ex numeris primis in ſe nulla perfecta radix extrahi poteſt in integris (§. 235), adeoque nec per fractos dari poteſt (§. 263).

HYPOTHESIS 13.

265. *Interdum utile eſt, extractionem radicis tantum indicare, præſertim ſi perfecta haberi nequit. Eſt autem ſignum radicale ſequens* $\sqrt{}$: *cui in vertice jungitur exponens dignitatis, ſi altioris gradus, quam quadrata.* E. gr. $\sqrt{2}$ denotat radicem ex 2; $\sqrt[3]{5}$ denotat radicem cubicam ex 5.

SCHOLION.

266. *In Geometria & Analyſi demonſtrabitur, tales radices, quæ actu dari non poſſunt, eſſe ad unitatem ut rectam lineam ad rectam aliam, conſequenter numeros* (§. 10) *eosque irrationales, cum ex hypotheſi rationales non ſint. Dicuntur vulgo numeri* ſurdi: *quamvis olim hujus vocis ſignificatus ſtrictior fuerit* (r). *Et olim, & nunc interdum* radicales *nuncupari ſueverunt.*

CAPUT VI.

De

REGULIS PROPORTIONUM.

THEOREMA 52.

267. *Si fuerint quatuor quantitates proportionales; factum extremarum æquatur facto mediarum.*

DEMONSTRATIO.

6 : 3 = 8 : 4
4   3
———
24 = 24

A : B = C : D (*per hypoth.* & §. 142). Ergo AC : BC = C : D (§. 170), adeoque AC : C = BC : D (§. 164), conſequenter ACD : CD = BC : D (§. 170) hoc eſt, AD : D = BC : D (§. 172). Quare AD = BC (§. 169). *Q. e. d.*

THEOREMA 53.

268. *Si fuerint tres quantitates continue proportionales; factum extremarum eſt æquale mediæ quadrato.*

(r) Vid. Stifelius in Arithm. integra lib. 2. c. 12 p. 134.

DEMONSTRATIO.

$6:12 = 12:24$
$12 \quad 6$
$144 = 144$

Quoniam enim $A:B = B:C$ (*per hypoth.* & §. 145. 142); erit $AC = BB$ (§. 267). Sed BB eſt quadratum ipſius B (§. 225). Ergo factum extremarum AC æquatur quadrato mediæ. *Q. e. d.*

THEOREMA 54.

269. *Si quantitas AD producta ex duabus aliis ſe mutuo multiplicantibus A & D fuerit æqualis alteri BC ex duabus aliis B & C eodem modo productæ; erit $A:B = C:D$.*

DEMONSTRATIO.

$6 \quad 8$
$4 \quad 3$
$24 = 24$
$4:8 = 3:6$

$AC:AD = C:D$ (§. 170). Sed $AD = BC$, *per hypoth.* Ergo $AC:BC = C:D$ (§. 157), conſequenter $A:B = C:D$ (§. 172). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

270. Si ergo in ſerie quatuor quantitatum factum ex ſecunda in tertiam æquale facto ex prima in quartam; erunt quantitates iſtæ proportionales.

PROBLEMA 28.

271. *Inter duos numeros (8 & 72) medium proportionalem invenire.*

RESOLUTIO.

1. Datorum unus 72 multiplicetur per alterum 8 (§. 101).
2. Ex facto 576 extrahatur radix quadrata 24 (§. 248): quæ erit numerus quæſitus (§. 268).

PROBLEMA 29.

272. *Datis tribus numeris 3, 12, 5 quartum; aut duobus, tertium proportionalem invenire.*

RESOLUTIO.

1. Secundus 12 ducatur in tertium 5, aut in altero caſu ſecundus in ſeipſum.
2. Factum 60 dividatur per primum 3. Quotus 20 eſt quartus, in altero caſu tertius quæſitus.

DEMONSTRATIO.

Si enim terminum ſecundum per tertium, aut in altero caſu ſecundum per ſeipſum multiplicas; factum ex primo in quartum in caſu altero ex primo in tertium prodit (§ 267. 268). Quodſi ergo hoc per primum dividis; quotus eſt terminus quartus, in caſu altero tertius (§. 194). *Q. e. d.*

COROLLARIUM. 1.

273. Data quælibet fractio converti poteſt in aliam æqualem datæ denominationis. Quodſi enim *per probl. præſ.* ad denominatorem & numeratorem fractionis datæ atque denominatorem deſideratæ quæratur numerus quartus proportionalis; erit is numerator fractionis quæſitæ (§. 207). E.

gr.

3 — 2 — 24 gr. ſit fractio $\frac{2}{3}$ convertenda in aliam cujus denominator 24; reperietur ea $\frac{16}{24}$.

$$\begin{array}{rl} 3 - 2 - & 24 \\ & 2 \\ \hline & 48 \end{array}$$

$\not{1}$
$\not{4}\not{8}$ (16
$\not{3}\not{3}$

COROLLARIUM 2.

274. Quodſi numerus partium, in quas integrum aliquod communi more dividitur, pro denominatore aſſumitur; valor fractionis datæ in menſura vulgari reperitur. E. gr. Cum apud nos thalerus in 24 groſſos dividatur, ex ante allato exemplo apparet, 16 groſſos æquivalere duabus tertiis unius thaleri.

COROLLARIUM 3.

275. Si vero denominator aſſumitur 10, 100, 1000 &c. fractiones datæ in decimales convertuntur. Ita reperiemus $\frac{2}{3} = \frac{666666}{1000000}$ &c. in infinitum; $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$; $\frac{2}{7} = \frac{42857}{100000}$ fere.

SCHOLION 1.

276. *In fractionibus decimalibus denominator omitti ſolet, quia ex meris cyphris & præfixa unitate conſtat. Ejus vero loco punctum* (.) *numeratori præfigitur & loca vacua replentur cyphra, ita ut e. gr. duæ cyphræ præponantur, ſi fractio a milleſimis incipiat. Ita loco* $\frac{23}{100}$ *ſcribimus.* 023; *loco* 5 $\frac{47}{10000}$ *ſcribimus* 5. 0047. *Eſt vero harum fractionum non exiguus in Matheſi uſus, quas primus in condendis Tabulis ſinuum adhibuit* Johannes Regiomontanus.

SCHOLION 2.

277. *Reſolutio hujus problematis vulgo* Regula trium *appellatur, quia ex tribus numeris invenitur quartus. Uſus ejus ampliſſimus tam in vita communi, quam in ſcientiis. Hinc* Regula aurea *vocatur. Facile autem apparet, hac regula nullibi eſſe utendum, niſi ubi de numerorum datorum proportione conſtiterit.* E. gr. *Sit vas ingens aqua repletum per exiguum in fundo foramen effluxura, ſi aperiatur. Ponamus, intra* 2 *minuta prima effluere* 3 *congios. Inveniri debet, quanto tempore* 100 *congii effluant. Tres in hoc caſu dantur numeri; quartus inveniendus. Enimvero vel ipſa experientia docet, aquam ſub initium celerius, poſtea tardius effluere, conſequenter quantitatem aquæ effluentis non eſſe tempori proportionalem. Quamobrem hac quæſtio per regulam trium ſolvi nequit.*

SCHOLION 3.

278. *Quæ in commercium veniunt, pretiis ſuis proportionalia ſunt. Qui enim duplum mercis accipit, duplum; qui triplum accipit, triplum pretium ſolvit. Dato igitur pretio quantitatis cujusdam determinatæ mercis, per regulam trium invenitur pretium quantitatis cujuscunque alterius datæ, aut quantitas mercis dato cuicunque alteri pretio reſpondens. E. gr. pretium* 3 *librarum ſunt* 4 *thaleri, quantum eſt pretium* 17 *librarum? Cum ſit, ut* 3 *libræ ad* 17 *libras, ita illarum pretium (quod eſt* 4 *thalerorum) ad pretium harum; hoc quidem ita invenitur:*

3 L. — 17 L. — 4 Th.

$$\begin{array}{r} 4 \\ \hline 68 \end{array}$$

$\not{2}$
$\not{6}\not{8}$ (22 $\frac{2}{3}$ th.
$\not{3}\not{3}$

Item: 3 *libræ vaneunt* 4 *thaleris, quot* 22 $\frac{2}{3}$ *thaleris? Cum ſint ut* 4 *thaleri ad* 22 $\frac{2}{3}$, *ita* 3 *libræ ad quæſitas; harum numerus ita innoteſcit:*

4 Th. — $22\frac{2}{3}$ Th. — 3 L.
3 ... 7
68 ... 68(17 L.
... 44

Hinc ſimul patet, quomodo regula trium probetur, hoc eſt, inveniatur, utrum operatio per eam rite peracta, nec ne.

SCHOLION 4.

279. *Similiter merces operariorum eſt tempori proportionalis, quo labore defunguntur, etiam quantitas laboris eidem tempori proportionalis, ſi æqualibus articulis æqualia penſa abſolvuntur; eadem numero operariorum proportionalis, ſi penſa æqualia ſinguli abſolvant. E. gr. Intra 2 horas 4 libri folia perleguntur: Quanto horarum ſpatio 360 perlegi poterunt?*

6 F. — 360 F. — 2 H.
2 ... 7
720 ... 720(120 H.
... 666

SCHOLION 5.

280. *Si numeri dati fuerint heterogenei, non eandem proportionem habent, quam res ipſis reſpondentes: ad homogeneos igitur reducendi. Ita thaleri in groſſos, groſſi in nummos, libræ in ſemuncias, horæ in minuta &c. convertuntur. E. gr. 3 libræ & 4 ſemunciæ vaeneunt 2 thaleris & 4 groſſis, quanti libræ 2? Calculus talis eſt*

3. L. 4 S. — 2 L. — 2 Th. 4 gr.
32 ... 32 ... 24
100 S. — 64 S. — 52 gr.
52
128
320 ... 3328
3328 ... 1100(33 $\frac{28}{100}$ ſeu $\frac{7}{25}$ gr.

Quod ſi noſſe cupias, quot nummis conveniant $\frac{7}{25}$ groſſi, ita reperies (§. 274).

25 — 7 — 12
7 ... 79
84 ... 84(3 $\frac{9}{25}$ num.
... 75

Si nummus ulterius divideretur, poterat quoque valor $\frac{9}{25}$ unius nummi eodem modo reperiri: ſed cum tanti non ſit, ut inveniatur, fractio illa tuto negligitur.

SCHOLION 6.

281. *In ſcriptis Arithmeticorum* Regula trium inverſa *occurrit, qua vero opus non eſt, ſi numeri dati, prout proportio exigit, ordinentur. E. gr. 125 milites operi exſtruendo 6 menſes impendunt: quantus requiritur militum numerus, ut intra 2 abſolvatur. Evidens eſt, quod ſit, ut ſpatium 2 menſium ad ſpatium 6 menſium, ita numerus militum, qui opus intra ſex menſes abſolvunt, ad numerum militum, qui intra duos idem exſtruunt. Quo minore enim temporis intervallo exſtruitur, eo major militum numerus requiritur. En calculi typum:*

2 M. — 6 M. — 125 Mil.
6
750
11
750(375 Mil.
222

SCHOLION 7.

282. *Interdum gemina regulæ trium applicatione opus eſt, antequam numerus quæſitus innoteſcat. Ea vulgo pro peculiari regula venditatur & ab aliis* Regula de quinque, *ab aliis* Regula compoſita *appellatur. E. gr. 300 thaleri dant intra 2 annos uſuram 36 thalerorum, quantam dabunt 20000 thaleri intra 12 annos. Hic per regulam trium primum*

mum invenitur, quanta ſit uſura a 20000 *expectanda intra* 2 *annos. Dein per eandem inveſtigatur, quanta eadem intra* 12 *annos exiſtat:*

300 Th. — 20000 Th. — 36 Uſ.
36

720000 ~~7200000~~ (2400 Uſ.
~~333300~~

2 A. — 12 A. — 2400 Uſ.
12

4800
24

28800

~~28800~~ (14400 Uſ.
~~222~~

SCHOLION 8.

283: *Exemplis iſtiusmodi regula trium ſemel applicata ſatisfacere poteſt. Cum enim in noſtro caſu bis* 300 *thaleri eandem dent uſuram intra* 1 *annum, quam* 300 *intra* 2, *& duodecies* 20000 *tantam intra* 1 *annum, quanta* 20000 *intra* 12; *omiſſis temporis circumſtantiis ita inferatur; bis* 300, *id eſt* 600, *thaleri dant uſuram (intra annum ſcilicet)* 36, *quantam dabunt duodecies* 20000, *id eſt* 240000 *thaleri (itidem intra annum?)*

600 Th. — 240000 Th. — 36 uſ.
36

1440000
72

8640000

~~8640000~~ (14400
~~666600~~

Poſterior hæc methodus priori præfertur, quod in illa ad fractionum tædia ſæpe prolabimur.

SCHOLION 9.

284. *Dantur & alii caſus, in quibus iterata regula trium applicationi ſuperſedere non licet. Ita ſi commune ſociorum lucrum vel damnum inter eos diſtribuendum, toties applicatur, quot ſunt ſocii. Eſt enim ut ſumma collatorum ad lucrum vel damnum commune, ita collatum quodlibet partiale ad lucrum vel damnum partiale ipſi reſpondens. E. gr. Lucrum commune trium perſonarum eſt* 2000 *thalerorum, collatum primi* 1000, *ſecundi* 500, *tertii* 300: *inveniri debent lucra partialia ſingulis convenientia. En typum calculi:*

Collatum primi 1000 Th.
ſecundi 500
tertii 300

Summa Collatorum 1800 Th.

1800 Th. — 1000 Th. — 2000 Th.
2 000

2000000

~~2000000~~ (1111 $\frac{2}{18}$ Lucrum primi.
~~1888800~~

1800 Th. — 500 Th. — 2000 Th.
2 000

1000000

~~1000000~~ (555 $\frac{10}{18}$ Lucrum ſecundi.
~~188800~~

1800 Th. — 300 Th. — 2000 Th.
2 000

600000

```
  33
 3666
6000000(333 6/18 Lucrum tertii.
 188800
  11
```

PROBATIO.

1111 $\frac{2}{18}$	Lucrum primi
555 $\frac{10}{18}$	ſecundi
333 $\frac{6}{18}$	tertii

2000 Th. Lucrum commune.

SCHOLION 10.

285. *Non deſunt alia exempla, quæ calculum eundem requirunt, ut cum in Medicina aut artibus aliis ex data ratione, quam pondera miſcibilium inter ſe habent, inveniuntur pondera miſcibilium requiſita, ut mixtum integrum ſit ponderis dati. E. gr. Tria ſimplicia compoſitionem alicujus medicamenti ingrediuntur, doſis unius eſt 4, alterius 5, tertii 2 unciarum: inveniri debent doſes ſingulorum requiſita, ut pondus compoſiti ſit 8 librarum. En calculi typum:*

Pondus	primi	ſimplicis	4 Unc.
	ſecundi		5
	tertii		2

Summa 11 Unc.

```
11 Unc. — 8 L. — 4 Unc.
          16
         128 Unc.   1
           4       176
         ———       812(46 6/11 Pond.
         512       111  ſimp. primi.
                    1
```

```
11 Unc. — 128 Unc. — 5 Unc.
            5        1
          ———       102
          640       640(58 2/11 Pond. ſimp.
                    111      ſecund.
                     1
```

```
11 Unc. — 128 Unc. — 2
            2        33
          ———       256(23 3/11 Pond. ſimp.
          256       111      tertii.
                     1
```

PROBATIO.

Pondus ſimplicis primi	46 $\frac{6}{11}$	Unc.
ſecundi	58 $\frac{2}{11}$	
tertii	23 $\frac{3}{11}$	

Pondus mixti 128 Unc. = 8 lib.

SCHOLION 11.

286. *Subinde compendiis locus datur, quæ* Practicæ Italicæ *nomen ferunt. Ex iis utiliſſima commemoramus. Nimirum quoniam per regulam trium ad tres numeros datos invenitur quartus proportionalis,* (§. 272) *primus & ſecundus* (§. 172) *vel etiam primus & tertius* (§. 174) *per eundem, ſi fieri poteſt, numerum exacte dividantur & quoti in ipſorum loca ſurrogentur: ceu ex ſubſequente apparet exemplo.*

Pretium 3 Lib. *eſt* 9 Thal. *quantum* 7 Libr.

```
3)  1    3    3
              ——
      Fac. 21 Thal.
```

Pretium 14 Lib. *eſt* 26 Thal. *quantum* 7 Libr.

```
7)  2    2)—    1
      Fac. 13 Thal.
```

SCHOLION 12.

287. *Si numerus primus vel tertius fuerit,*

erit 1 & alter eorum non nimis magnus, medius autem heterogeneus, abſque reductione in ſchol. 5 (§. 280) *præſcripta Calculus initur, ut ſequens exemplum docet.*

Pret. 1 Lib. *eſt* 3 th. 8 gr. 6 num. *quantum* 5 L.

5

16 th. 18 gr. 6 num.

Manifeſtum ſcilicet eſt, bis 6 nummos conficere groſſum unum, adeoque quinquies 6 groſſos 2, & nummos 6. Similiter ter 8 groſſi thalerum 1, & inſuper bis 8 groſſos 16 efficiunt. Quodſi ergo thalerus iſte 15 reliquis, & 2 priores groſſi 16 reliquis addantur; prodibit pretium quæſitum 16 th. 18 gr. 6 num.

SCHOLION 13.

288. *Si terminus primus vel ſecundus fuerit 1, & in priore caſu ſecundus aut tertius, in poſteriore primus in factores reſolvi poteſt; integram ſæpe operationem ſine ſcriptionis ſubſidio mens abſolvit: id quod exempla quæ ſequuntur docent.*

Pretium 1 Libr. *eſt* 24 th. *quantum* 20 libr.

	4	4
	6	80
		6
		Fac. 480 th.

Pretium 12 libr. *eſt* 18 th. *quantum* 1 libr.

3 2

4 18 (6 ($1\frac{1}{2}$ th.

3 4

SCHOLION 14.

289. *Si numerorum datorum unus fuerit 1, multa compendia ſimilia multiplicatio & diviſio ſine abaci Pythagorici ſubſidio peragenda* (§. 106. 110). *ſuppeditat. E. gr. pretium 9 librarum eſt 20 thalerorum, quantum eſt pretium unius? Statim hic apparet, habe-ri pretium deſideratum, ſi parti decimæ illius, id eſt 2 thaleris, addatur pars nona hujus decimæ, id eſt,* $\frac{2}{9}$ *unius thaleri, ut adeo inveniatur* $2\frac{2}{9}$ *thal. Item: Pretium 5 librarum eſt 54 thalerorum, quantum erit pretium 1 libræ? R. Quoniam 5 eſt dimidium* 10, *duplum partis decimæ pretii dati* $10\frac{4}{5}$ *thal. erit quæſitum. Item: Pretium 1 libræ eſt 18 groſſorum, quantum erit librarum 19? R. Quoniam* 19 = 20 — 1, *a duplo pretii dati cyphra aucti 360 ſubducatur ſimplum 18, reſiduum erit pretium 342 groſſorum quæſitum.*

SCHOLION 15.

290. *Si duo termini ejuſdem denominationis unitate differant, ſingulari quodam compendio utimur, quod ex ſubjunctis exemplis manifeſtum. E. gr. Pretium 5 librarum eſt 30 thalerorum, quantum erit 4 librarum? R. Quoniam pretium 4 librarum una parte quinta deficere debet a pretio 5 librarum; pretium datum 30 dividatur per 5 & quotus* 6 *ab eodem ſubtrahatur, relinquitur quæſitum 24. Item: pretium 8 librarum eſt 24 thalerorum, quantum erit librarum 9? R. Quia pretium 9 librarum una parte octava excedit pretium* 8 *librarum, pretium datum 24 dividatur per* 8 *& quotus 3 eidem addatur, ſumma 27 erit quæſitum.*

SCHOLION 16.

291. *Nonnunquam compendiis pluribus una uti datur.* E. gr.

Pret. 100 libr. *eſt* 30 th. 4 gr. *quantum* 50 libr.

50) 2. 2) ——— 1

Fac. 15 th. 2 gr.

It: Pret. 60 libr. *eſt* 80 th. *quantum* 2520 libr.

60)	1	6	42
		480	6
		7	7
		Fac. 3360 thal.	

CAPUT VII.

De QUANTITATIBUS ÆQUI-DIFFERENTIBUS.

DEFINITIO 59.

292. Si in ſerie trium quantitatum eadem fuerit differentia primæ & ſecundæ, quæ ſecundæ ac tertiæ; eas *continue æquidifferentes* voco. Si vero in ſerie quatuor eadem fuerit differentia primæ & ſecundæ, quæ tertiæ ac quartæ, *diſcretim æquidifferentes* appello. Ita 3, 6, 7 & 10 ſunt numeri diſcretim æquidifferentes: 3, 6, & 9 numeri continue æquidifferentes.

SCHOLION.

293. *Dicuntur hæ quantitates vulgo* Arithmetice proportionales, & *vere proportionales, de quibus ante,* Geometrice proportionales *appellari ſolent, ut ab iis diſtinguantur: ſed minus proprie.*

COROLLARIUM 1.

294. Si termini ſemper creſcunt, in continue æquidifferentibus terminus ſecundus eſt aggregatum ex primo & differentia; tertius ſumma ex ſecundo & differentia: ſi decreſcunt, primus eſt aggregatum ex ſecundo & differentia; ſecundus aggregatum ex tertio & differentia (§. 98).

COROLLARIUM 2.

295. Similiter in diſcretim æquidifferentibus ſi termini creſcunt, ſecundus eſt aggregatum ex primo & differentia, quartus ex tertio & differentia: ſi vero decreſcunt, primus eſt aggregatum ex ſecundo & differentia; tertius ex quarto & differentia. (§. 98).

THEOREMA 55.

296. *Si fuerint tres quantitates continue æquidifferentes, ſumma primi & tertii eſt medii dupla.*

DEMONSTRATIO.

4.	7.	10
	7	4
14	=	14

Si enim termini creſcunt; ſecundus componitur ex primo, & differentia, tertius ex ſecundo & differentia (294), adeoque ex primo & differentia dupla. Quare ſi tertio addatur primus; ſumma primi & tertii conſtabit ex primo duplo & differentia dupla. Erit adeo ſecundi dupla. *Q. e. d.*

Eodem modo demonſtratio procedit, ſi termini decreſcunt.

THEOREMA 56.

297. *Si fuerint quatuor quantitates æquidifferentes, ſumma primi & quar-*

& quarti æqualis eſt ſummæ ſecundi & tertii.

DEMONSTRATIO.

3.5 : 8.10	
8	3
13 =	13

Si termini creſcunt, ſecundus componitur ex primo & differentia; quartus ex tertio & differentia (§. 295). Quare ſi primus quarto addatur, aggregatum ex primo, tertio & differentia conſtat: Si vero ſecundum tertio addas, aggregatum ex primo, differentia & tertio componitur. Sunt ergo aggregata inter ſe æqualia (§. 80). *Q. e. d.*

Eodem modo demonſtratio procedit, ſi conſequentes termini fuerint antecedentibus minores.

PROBLEMA 30.

298. *Inter duos numeros 9 & 13 medium æquidifferentem invenire.*

RESOLUTIO.

1. Addantur numeri dati 9 & 13.
2. Summa 22 dividatur bifariam ſive per 2. Quotus 11 erit numerus quæſitus (§. 296).

PROBLEMA 31.

299. *Datis tribus numeris 8, 5, 9, quartum æquidifferentem invenire.*

RESOLUTIO.

1. Numerus ſecundus 5 addatur tertio 9.
2. A ſumma 14 ſubtrahatur primus 8. Reſiduus 6 eſt quartus quæſitus. (§. 297).

CAPUT VIII.

De

LOGARITHMIS.

DEFINITIO 60.

300. Series quantitatum juxta eandem rationem creſcentium vel decreſcentium vocatur *Progreſſio Geometrica.* E. gr. 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128, vel 729. 243. 81. 27. 9, 3. 1.

DEFINITIO 61.

301. Series quantitatum ſecundum eandem differentiam creſcentium vel decreſcentium dicitur *Progreſſio Arithmetica,* E. gr. 3. 6. 9. 12, 15. 18. 21. 24. 27. 30 vel 32. 28. 24. 20. 16. 12. 8. 4.

DEFINITIO 62.

302. Si numeris in ratione Geometrica progredientibus ſubſcribantur totidem alii æquidifferentes; dicuntur hi illorum *Logarithmi:*

rithmi: Stifelius in Arithmetica ſua (s) *exponentes* vocat. E. gr. ſint duæ progreſſiones:

Geom. 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512.
Arithm. 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

erit 0 logarithmus termini primi 1; 5 logarithmus ſexti 32; 7 logarithmus octavi 128 &c.

THEOREMA 57.

303. *Si Logarithmus unitatis ſit* 0; *erit logarithmus facti æqualis aggregato ex logarithmis efficientium.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim ut unitas ad factorem unum ita factor alter ad factum (§. 59). Quare logarithmus facti eſt æquidifferentium quartus ad logarithmum unitatis & logarithmos efficientium (§. 302). Sed logarithmus unitatis eſt 0, *per hypoth.* Ergo ſumma ex logarithmis efficientium eſt logarithmus facti (§. 299). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

304. Cum factores quadrati ſint inter ſe æquales, hoc eſt, quadratum ſit factum ex radice in ſeipſam (§. 225); logarithmus quadrati eſt duplus logarithmi radicis.

COROLLARIUM 2.

305. Eodem modo patet, logarithmum cubi eſſe triplum (§. 227); biquadrati quadruplum; potentiæ quintæ quintuplum; ſextæ ſextuplum &c. logarithmi radicis (§. 229. 231).

COROLLARIUM 3.

306. Eſt ergo unitas ad exponentem dignitatis, ut logarithmus radicis ad logarithmum potentiæ ſeu ipſius dignitatis (§. 230. 231).

COROLLARIUM 4.

307. Quare logarithmus potentiæ prodit, ſi logarithmum radicis multiplices per exponentem ejus (§. 59); adeoque logarithmus radicis habetur, ſi logarithmus dignitatis per ejus exponentem dividitur (§. 194).

SCHOLION.

308. *E. gr. 3 ſumma logarithmorum 1 & 2 eſt logarithmus producti 8 ex 2 in 4. Similiter 7 ſumma logarithmorum 2 & 5 eſt logarithmus producti* 128 *ex 4 in* 32 *Porro 3 logarithmus radicis quadratæ 8 eſt dimidius logarithmi 6 quadrati 64, & 2 logarithmus radicis cubicæ 4 eſt ſubtriplus logarithmi 6 cubi 64.*

THEOREMA 58.

309. *Si logarithmus unitatis eſt 0, erit logarithmus quoti æqualis differentiæ logarithmorum diviſoris & dividendi.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim ut diviſor ad dividendum ita unitas ad quotum (§. 62). Quare logarithmus quoti eſt æquidiffe-

(s) lib. 3. c. 5. p. 249. b.

differentium quartus ad logarithmos diviſoris & dividendi atque logarithmum unitatis (§. 302). Sed logarithmus unitatis eſt 0, *per hypoth.* Ergo differentia logarithmi diviſoris a logarithmo dividendi eſt logarithmus quoti (§. 299). *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

310. *E. gr.* 2 *differentia inter* 7 & 5 *eſt logarithmus quoti* 4 *ex* 128 *per* 32; *Similiter* 5 *differentia inter* 8 & 3 *eſt logarithmus quoti* 32 *ex* 256 *per* 8.

SCHOLION 2.

311. *Progreſſiones Arithmeticas cum Geometricis confert, logarithmorum proprietates hactenus recenſitas recenſet, atque varios eorum uſus monſtrat* Stifelius (t): *qui tamen longe cedunt uſui logarithmorum in Trigonometria a* Johanne Nepero *ſupra laudato primum oſtenſo* (u).

PROBLEMA 32.

312. *Numeri cujuscunque logarithmum invenire ac Canonem Logarithmorum pro numeris naturalibus conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Quoniam 1. 10. 100. 1000. 10000 &c. Progreſſionem Geometricam conſtituunt (§. 300); eorum logarithmi arbitrario aſſumi poſſunt. (§. 301). Ut igitur intermediorum logarithmos per fractiones decimales exprimere liceat; aſſumantur 0. 00000000, 1. 00000000, 2. 00000000, 3. 00000000, 4. 00000000 &c.

2. Equidem manifeſtum eſt, (§. 302) numerorum, qui in ſcala progreſſionis Geometricæ non continentur, logarithmos accuratos haberi non poſſe; adeo tamen veris propinquos reperire licet, ut, ſi uſum ſpectes, accuratis æquipolleant. Quod ut appareat, ponamus inveniendum eſſe logarithmum novenarii ſeu 9. Inter 1. 0000000 & 10. 0000000 quæratur medius proportionalis C (§. 271) & inter eorum logarithmos 0. 00000000 atque 1 00000000 medius æquidifferens (§. 298), qui erit logarithmus ipſius C. (§. 302), hoc eſt, numeri ternarium ſuperantis $\frac{1622777}{100000000}$ adeoque a novenario multum diſtantis. Quæratur inter B & C alius medius proportionalis D, qui ad novenarium propius accedit, & inter B & D adhuc alius E & ita porro alii inter numeros novenario proxime majores & minores, donec tandem reperiatur . 9. 0000-

L 3

(t) in Arithmet. lib. 1. c. 4. p. 35 & ſeqq. & lib. 3. c. 5. p. 249, b. & 50.
(u) in Mirifici Logarithmorum Canonis deſcriptione.

0000000, hoc eſt, 9 $\frac{0000000}{100000000}$ (§. 275): qui cum a novenario ne unica quidem particula millioneſima differat; ejus logarithmus citra errandi periculum pro logarithmo novenarii habetur. Error enim ſemper minor eſſe debet unica millioneſima. Quærantur itaque in quolibet caſu logarithmi mediorum proportionalium & ita habebitur tandem logarithmus novenarii prope verus 0. 954251.

3. Si eodem modo inter A & C numeros medios proportionales quæras & convenientes logarithmos ſingulis aſſignes, invenietur tandem logarithmus numeri 2 & ita porro.

	Numeri medii proportionales	Logarithmi		Numeri medii proportionales	Logarithmi
A	1.0000000	0.0000000	O	9.0021388	0.95434570
C	3.1622777	0.5000000	Q	9.0008737	0.95428467
B	10.0000000	1.0000000	P	8 9996088	0.95422363
B	10.0000000	1.0000000	Q	9.0008737	0.95428467
D	5.6234132	0.7500000	R	9.0002412	0.95425415
C	3.1622777	0.5000000	P	8.9996088	0.95422363
B	10.0000000	1.0000000	R	9 0002412	0.95425415
E	7.4989421	0.87500000	S	8.9999250	0.95421889
D	5.6234132	0.75000000	P	8 9996088	0.95422363
B	10.0000000	1.00000000	R	9.0002412	0.95425415
F	8.6596432	0.93750000	T	9.0000831	0.95424652
E	7.4989421	0.87500000	S	8.9999250	0.95423889
B	10.0000000	1.00000000	T	9.0000831	0.95424652
G	9.3057204	0.96875000	V	9.0000041	0.95424271
F	8.6596432	0.93750000	S	8.9999250	0.95423889
G	9.3057204	0.96875000	V	9.0000041	0.95424271
H	8.9768713	0 95312500	X	8.9999650	0.95424080
F	8.6596432	0.93750000	S	8.9999250	0.95423889
G	9.3057204	0.96875000	V	9.0000041	0.95424271
I	9.1398170	0 96093750	Y	8.9999845	0.95424217
H	8.9768713	0.95312500	X	8.9999650	0.95424080
I	9.1398170	0.96093750	V	9.0000041	0.95424271
K	9.0579777	0.95703125	Z	8.9999943	0.95424223
H	8 9768713	0.95312500	Y	8.9999845	0.95424217

	Numeri medii proportionalis.	Logarithmi		Numeri medii proportionales.	Logarithmi
K	9.0579777	0.95703125	V	9.0000041	0.95424271
L	9.0173333	0.95507812	a	8.9999992	0.95424247
H	8.9768713	0.95312500	Z	8.9999943	0.95424223
L	9.0173333	0.95507812	V	9.0000041	0.95424271
M	8.9970796	0.95410156	b	9.0000016	0.95424259
H	8.9768713	0.95312500	a	8.9999992	0.95424247
L	9.0173333	0.95507812	b	9.0000016	0.95424259
N	9.0072008	0.95458984	c	9.0000004	0.95424253
M	8.9970796	0.95410156	a	8.9999992	0.95424247
N	9.0072008	0.95458984	c	9.0000004	0.95424253
O	9.0021388	0.95434570	d	8.9999998	0.95424250
M	8.9970796	0.95410156	a	8.9999992	0.95424247
O	9.0021388	0.95434570	c	9.0000004	0.95424253
P	8.9996088	0.95422363	e	9.0000000	0.95424251
M	8.9970796	0.95410156	d	8.9999998	0.95424250

4. Enimvero non opus eſt, ut omnium numerorum logarithmi tanto labore inveſtigentur; compoſiti enim cum per alios numeros dividi poſſint (§. 68) adeoque & ex aliis ſe mutuo multiplicantibus, (§. 196) oriantur, eorum logarithmi *per theor. 57 & 58.* (§. 303 *& ſeqq.*) inveniuntur. E gr. ſi logarithmus numeri 9 biſecetur, prodit logarithmus 0. 4771212 numeri 3 (§. 304).

COROLLARIUM.

313. Characteriſtica igitur logarithmorum pro numeris ab 1 ad 10 eſt 0, pro numeris a 10 ad 100 eſt 1, pro numeris a 100 ad 1000 eſt 2 &c.

SCHOLION.

314. *Canonem Logarithmorum pro numeris naturalibus ab* 1 *usque ad* 20000 *& a* 90000 *ad* 100000 *primus conſtruxit* Henricus Briggius, *Profeſſor Geometriæ Savilianus in Academia Oxonienſi, ex conſilio tamen primi inventoris* Neperi (x), & *methodum conſtruendi una expoſuit in ſua Arithmetica Logarithmica. Lacunam inter* 20000 *&* 90000 *mox explevit* Adrianus Vlaccus (y). *In libellis vulgaribus habetur tantum Canon Logarithmorum pro numeris ab* 1 *usque ad* 10000.

PROBLEMA 1.

315. *Invenire logarithmum pro numeris majoribus, quam in Canone con-*

(x) vide præfat. ad Arithmeticam Logarithm.
(y) in altera editione Arithmeticæ Logarithmicæ Briggii.

continentur, *minoribus tamen* 10 000000. *RESOLUTIO.*

1. Reſecentur 4 notæ ad ſiniſtram numeri dati & earum ex canone excerpatur logarithmus.
2. Characteriſticæ tot addantur unitates, quot notæ ad dextram reſiduæ (§. 313).
3. Logarithmus inventus ſubtrahatur a proxime ſequente in canone.
4. Inferatur: ut differentia numerorum in canone evolutorum ad differentiam tabularem logarithmorum ipſis reſpondentium; ita notæ reſiduæ numeri dati ad differentiam logarithmicam *per probl. 29.* (§. 272) inveniendam: quæ ſi
5. Addatur logarithmo *per n. 1 & 2* invento; ſumma erit logarithmus quæſitus.

E. gr. quæritur logarithmus numeri 92375. Reſeca quatuor notas 9237 & characteriſticam 3 logarithmi iis in tabulis minoribus reſpondentis 3.9655309 auge unitate. Hinc

e logarith. numeri 9238 =	3.9655780
ſubduc log. num. 9237 =	3.9655309
relinquitur differ. tabul.	471

Inferatur: 10 — 471 — 5 (§. 286).
5) 2 —— 1
235

Jam logarithmo	4.9655309
addatur different. inventa	235
Summa eſt logar. quæſ.	4.9655544

SCHOLION.

316. *Differentiæ quidem logarithmorum non ſunt differentiis numerorum proportionales: ad praxin tamen, ubi in minimis ſcrupuloſi non ſumus, methodus tradita ſufficit, ſi præſertim notæ reſiduæ numeri dati non fuerint adeo multæ. Certe in noſtro caſu adeo exactum reperimus, ut accuratior in tabulis majoribus* Briggii *non occurrat.*

PROBLEMA 34.

317. *Invenire logarithmum fractionis, cujus numerator minor denominatore.*

RESOLUTIO.

1. Logarithmus numeratoris ſubtrahatur a logarithmo denominatoris.
2. Reſiduo præfigatur ſignum ſubtractionis —.

E. gr. Quærendus eſt logarithmus fractionis $\frac{3}{7}$.

Logarithmus 7 =	0.8450980
Logarithmus 3 =	0.4771213
Logarithmus $\frac{3}{7}$ =	— 0.3679767

DEMONSTRATIO.

Cum fractio ſit quotus, ex diviſione numeratoris per denominatorem emergens (§. 132); logarithmus ejus eſt differentia logarithmorum numeratoris ac denominatoris (§. 309), adeoque ſi numerator minor denominatore, major logarithmus e minore ſubtrahendus, quo in caſu differentia evadit negativa (§. 97). *Q. e d.*

SCHO-

SCHOLION.

318. *Logarithmum fractionis propriæ eſſe negativum ſi unitatis ſit* 0, *jam notavit* Stifelius (z), *& mirum non eſt. Fractio enim minor unitate* (§. 203). *Sed unitatis logarithmus eſt* 0 (§. 312). *Ergo fractionis logarithmus eſt nihilo minor.*

COROLLARIUM. 1.

319. Cum in fractione ſpuria $\frac{9}{5}$ numerator ſit major denominatore; ejus logarithmus habetur, ſi logarithmus denominatoris a logarithmo numeratoris ſubtrahitur (§. 132. 309).

Logarithmus 9 = 0. 9542425
Logarithmus 5 = 0. 6989700

Logarithmus $\frac{9}{5}$ = 0. 2552725

COROLLARIUM 2.

320. Quoniam integra cum adhærente fractione $3\frac{2}{7}$ in fractionem ſpuriam $\frac{23}{7}$ reduci poſſunt (§ 206); eodem modo invenietur eorum logarithmus.

Logarithmus 23 = 1. 3617278
Logarithmus 7 = 0. 8450980

Logarithmus $3\frac{2}{7}$ = 0. 5166298

PROBLEMA 35.

321. *Invenire numerum logarithmo reſpondentem, qui in tabulis accuratus non occurrit.*

RESOLUTIO.

I. Si numerus, cui convenit logarithmus inter 1000 & 10000 cadit, hoc eſt, ſi characteriſtica fuerit 3 (§. 313).

1. Logarithmus proxime minor dato ſubtrahatur a proxime majore, itidemque a logarithmo dato.
2. Inferatur: ut differentia prior ad 100, ita ſecunda ad partes centeſimas *per probl. 26.* (§. 272) inveniendas & numero, qui logarithmo proxime minori in tabulis reſpondet, addendas, ut habeatur numerus prope verus, cui logarithmus datus convenit.

E. gr. Quæratur numerus reſpondens Logarithmo 3. 7589982

Logarithmus proxime major 3.7590632
minor 3.7589875

Differentia prima 757

Logarithmus datus 3.7589982
proxime minor 3.7589875

Differentia ſecunda 107

757 — 100 — 107   107.00 (14
           100   757
         10700   313.0
                    3028
                     102

Cum numerus logarithmo minori conveniens ſit 5741; quæſitus erit $5741\frac{14}{100}$.

M   II. Si

(z) in Arithmet. integra lib. 3 c. 5. p. 249 b.

II. Si numerus, cui convenit logarithmus datus, inter 1 & 1000 locum reperiat, hoc eſt, ſi characteriſtica fuerit 0, 1 vel 2 (§. 313) characteriſtica mutatur in 3 & logarithmus quæritur inter 1000 & 10000: qui enim ibi eidem reſpondet numerus, tot fractiones decimales adjunctas habet, quot characteriſticæ unitates acceſſere (§. 312).

E. gr. Quæratur numerus logarithmo 1. 9201662 conveniens. Cum in tabulis proxime minori reſpondeat numerus 83; logarithmus idem evolvitur ſub characteriſtica 3 poſt 8300, ubi proxime minori reſpondet numerus 83.21. Eſt itaque quæſitus $83\frac{21}{100}$. Quodſi fractionibus his non fueris contentus per caſum primum minores iſtis inveniri poſſunt.

PROBLEMA 36.

322. *Invenire numerum convenientem logarithmo majori iis, qui in tabulis continentur.*

RESOLUTIO.

1. A logarithmo dato ſubtrahatur logarithmus numeri 10, vel 100, vel 1000, vel 10000, donec relinquatur logarithmus ultimo tabulæ minor.
2. Quæratur numerus ei reſpondens (§. 321) &
3. Multiplicetur per 10, vel 100, vel 1000, vel 10000.

Factum eſt numerus quæſitus (§. 312). E. gr. Quærendus eſt numerus logarithmi 7. 7589982. Subtrahatur logarithmus numeri 10000, qui eſt, 4. 0000000, ut relinquatur 3. 7589982, cui reſpondens numerus $5741\frac{11}{100}$ ducatur in 10000 factum 57411100 erit numerus quæſitus.

SCHOLION.

323. *Facile apparet, ſubtrahi poſſe logarithmum numeri cujuscunque in tabula occurrentem, modo per eundem numerum multiplicetur, qui logarithmo reſiduo reſpondet. Sed operatio tædioſa evadit.*

PROBLEMA 37.

324 *Invenire numerum dato logarithmo defectivo reſpondentem.*

RESOLUTIO.

1. Dato logarithmo defectivo addatur logarithmus ultimus tabulæ ſive numeri 10000, hoc eſt, ille ab hoc ſubtrahatur.
2. Logarithmo reſiduo conveniens numerus quæratur (§ 321).

Dico, hunc eſſe numeratorem fractionis, cujus denominator eſt 10000.

E. gr. Quæratur fractio reſpondens Logar. defectivo — 0. 3679767. Hic ex 4. 0000000 ſubd.

relinquit 3. 6320233, cui convenit numerus $4285\frac{71}{100}$. Eſt ergo fractio quæſita $\frac{428571}{1000000}$.

DE-

DEMONSTRATIO.

Cum fractio ſit quotus ex diviſione numeratoris per denominatorem emergens (§. 132); erit unitas ad fractionem ut denominator ad numeratorem (§. 61). Sed ut unitas ad fractionem dato logarithmo defectivo reſpondentem, ita 10000 ad numerum logarithmo reſiduo convenientem (§. 303. 59). Ergo ſi 10000 ſumatur pro denominatore, erit numerus iſte numerator fractionis quæſitæ. *Q. e. d.*

PROBLEMA 38.

325. *Datis tribus numeris invenire quartum proportionalem.*

RESOLUTIO.

1. Logarithmus ſecundi addatur logarithmo tertii.
2. Ab aggregato ſubtrahatur logarithmus primi.

Reſiduus eſt logarithmus quarti quæſiti (§. 272. 303. 309).

E. gr. Sint numeri dati 4, 68 & 3.

Logarithm. 68	= 1. 8325089
Logarithm. 3	= 0. 4771213
Aggregatum	= 2. 3096302
Logarithmus 4	= 0. 6020600
Logarithm. quæſ.	1. 7075702,

cui in Tabulis reſpondet numerus 51.

SCHOLION.

326. *Problematis hujus uſus præſtantiſſimus in Trigonometria elucet; cujus gratia pro numeris etiam naturalibus quæſiti ſunt a* Briggio & Vlacco *Logarithmi, cum* Neperus *tantum canonem utut diverſæ indolis logarithmorum pro ſinibus & tangentibus conſtruxiſſet. Tyrones igitur hanc de Logarithmis doctrinam tantisper ſeponant, donec ad Trigonometriam pedem promoverint.*

FINIS ARITHMETICÆ.

ERRATA.

P. 44. §. 115. (192. 193) l. 194. 196. p. 49. §. 140 (39) l. 41.

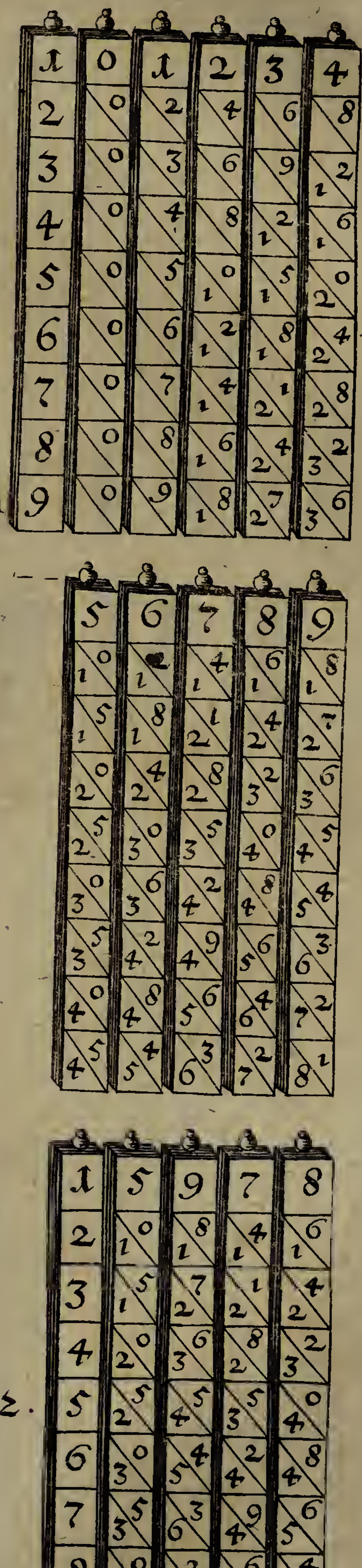


Fig: 1.

Fig:2.

A. Fig. Arithm.

ELEMENTA
GEOMETRIÆ.

PRÆFATIO.

Perexiguus eſt eorum numerus, qui Geometriæ pretium ſuum ſtatuunt: notatione enim deluſi cum arte agrimenſoria eam peſſime confundunt, nec ea animo ipſorum obverſatur idea, quæ nomen tam auguſtum excitare debebat. Omnis nimirum cognitionis diſtinctæ fundamenta jacit Geometria cum Arithmetica, ita ut non minor in ſcientiis, quam in artibus ejus ſit uſus. Equidem ob problemata, quorum reſolutionem trado, nonniſi ad locorum diſtantias variorumque objectorum altitudines, agrorum & camporum areas, corporumque molem dimetiendum conducere videtur; contrarium tamen luce meridiana clarius elucebit, cum ad reliquas Matheſeos partes inferius applicabitur. Non hic repeto, quæ de vi Geometriæ in perficiendo intellectu jam ſuperius (*) dicta ſunt. Ne vero hoc fructu careret Geometriæ ſtudium; a rigore in demonſtrando recedendum minime fuit. Hinc definio, quæ vulgo definiri non ſolent, & paſſim demonſtro, quæ ſine probatione ab aliis aſſumuntur. Equidem haud difficulter prævideo, fore ut imperitis improbetur hic auſus; ſed ſufficit eum probari peritis, & quod majus eſt, methodum noſtram præſtare,

(*) in Commentat. de methodo §. 52. 53 p. 15.

ſtare, ne extra Matheſin ratiocinaturi in ſcopulos incidamus, in quos plerumque omnes hactenus incidiſſe, ſupra etiam (**) annotavimus. EVCLIDES & ejus exemplo hactenus omnes ex principio congruentiæ ſolo demonſtrarunt omnia: ſed cum ingenioſisſimus LEIBNITIVS Similitudinis notionem mecum communicaret, atque moneret, multum ejus in Geometria eſſe uſum, ego vero meditatus ampliſſimum deprehenderem; ſimilitudinis principium in Geometriam introducere nullus dubitavi. Multa igitur ex eo facillime demonſtrata deprehendes, quæ alias ex principio congruentiæ nonniſi per ambages demonſtrari ſolent. Nec injucundum arbitror, quod figurarum conſtructiones inter principia demonſtrandi nunc obtineant locum, quæ alias praxi tantum inſerviebant. Tyrones definitionibus evolutis neglecta demonſtratione problemata ſolvant. Hoc labore perfuncti ex theorematum hypotheſibus figuras conſtruant & demonſtrationes empiricas ſuper addant, quarum in ipſa pertractatione fit mentio. (***) Tandem eo ordine elementa relegant, quo conſcripta ſunt. Qui vero mentis acie pollent, illamque diu poſſunt habere attentam; difficultates non ſentient, etiamſi prima ſtatim vice ad ſingula animum advertant.

ELE-

(**) l. c. §. 52 p. 15. (***) in ſchol. theor. 6 §. 155.

ELEMENTA GEOMETRIÆ.

PARS PRIOR

Elementa Geometriæ planæ exhibet.

CAPUT I.

De PRINCIPIIS GEOMETRIÆ.

DEFINITIO 1.

1.

GEometria eſt ſcientia extenſorum, quatenus extenſa ſunt, hoc eſt, Linearum, ſuperficierum & ſolidorum.

SCHOLION.

2. *Quemadmodum extenſio ex ſimultanea alicujus rei per locum diffuſione oritur; ita in mente repræſentatur, dum multa in uno continuo ſimul percipimus. Hinc notio extenſionis non modo totius ac partium notiones involvit;* (§. 9. Arith.) *ſed eadem in rerum aliarum notiones irrepit, quæ ideo per lineas, ſuperficies ac ſolida repræſentari poſſunt. Unde eſt, quod Geometria rebus plurimis applicari poſſit, ejusque adeo quam latiſſime pateat uſus.*

DEFINITIO 2.

3. *Congruere* dicuntur, quorum iidem termini eſſe poſſunt.

DEFINITIO 3.

4. *Eundem ſitum habere* dicuntur, inter quæ idem extenſum poni poteſt.

DEFINITIO 4.

5. *Punctum* eſt, quod quaquaverſum ſeipſum terminat, ſeu quod non habet terminos alios a ſe diſtinctos.

COROLLARIUM 1.

6. Ergo omne punctum alteri cuicunque congruit (§. 3).

COROLLARIUM 2.

7. Nec ullas in eo diſtinguere licet partes.

SCHOLION.

8. *Hinc* Euclides: *Punctum eſt, inquit, cujus pars nulla eſt. Nec ſine ratione punctum ut individuum concipiunt Geometræ, utut tale quid nec imaginari, nec pingere valeamus. In praxi enim ipſa Geometrica ſummo cum ſtudio cavendum, ne punctum pars lineæ habeatur, cujus terminus exiſtit.*

DEFINITIO 5.

9. *Linea* deſcribitur, ſi punctum ab uno puncto A ad alterum B movetur. Tab. I. Fig. 1.

COROLLARIUM 1.

10. Termini igitur lineæ ſecundum

 longi-

longitudinem ſunt puncta A & B; ſecundum latitudinem & profunditatem ipſa ſui terminus eſt (§. 5).

COROLLARIUM 2.

11. Quoniam punctum partes nullas habet (§. 7), linea nec lata, nec profunda eſſe poteſt, ſed in ſolam longitudinem extenditur.

SCHOLION 1.

12. *Quid ergo mirum, quod ſecundum latitudinem & profunditatem non habeat terminos a ſe diſtinctos,* vi Cor, 1. (§. 10)?

SCHOLION 2.

13. *Quamvis corpus omne tribus dimenſionibus praditum exiſtat, nec una a reliquis actu ſeparari queat; neceſſarium tamen ac perutile eſt, ut unam absque reliquis conſideremus. Neceſſitatem intellectus finitudo injungit, qui ad multa una diffundi nequit & hinc per abſtractionem divellere tenetur, qua nexu indivulſo natura conjunxit. Utilitatem hujus abſtractionis caſus innumeri perſuadent, in quibus unam dimenſionem neglectis cæteris cognoſcere jubemur, e. gr. altitudinem turris ſine latitudine ac profunditate ipſius, latitudinem fluminis ſine longitudine ac profunditate ipſius.*

DEFINITIO 6.

14. *Diſtantia* eſt linea breviſſima inter duo.

SCHOLION.

15. *Ita e. gr. diſtantia arboris a domo eſt linea breviſſima, qua ab illa ad hanc duci poteſt.*

DEFINITIO 7.

Tab. I. Fig. 1. 16. *Linea recta* AB eſt, cujus ſingula puncta verſus eandem plagam poſita ſunt.

AXIOMA 1.

17. *Si puncta duo unius rectæ ſint in recta altera, omnia puncta, quæ in illa aſſumi poſſunt, reliqua in eadem hac altera, producta ſi opus ſit, erunt.*

POSTULATUM 1.

18. *A quovis puncto A ad quodvis punctum B poſſe duci lineam rectam.* Tab. I. Fig. 1.

POSTULATUM 2.

19. *Lineam rectam terminatam AB utrinque produci poſſe.*

DEFINITIO 8.

20. *Linea curva* eſt, in qua puncta diverſa verſus plagas diverſas poſita ſunt.

DEFINITIO 9.

21. *Metiri* idem eſt ac quantitatem aliquam pro unitate aſſumere ac aliarum homogenearum rationem ad eandem exprimere. Quantitas, quæ pro unitate aſſumitur, *Menſura* dicitur.

SCHOLION.

22. *Hæc definitio latior praxi reſpondet: ſtrictius* Euclides *menſuram definit per quantitatem, qua aliquoties repetita alteri fit æqualis: quam nos in Arithmetica partem aliquotam diximus.*

DEFI-

DEFINITIO 10.

23. Hinc *Menſura linearum* eſt linea recta arbitrariæ longitudinis, in partes minores pro lubitu dividenda & ſubdividenda. Dividitur autem hodie a Geometris in 10 partes æquales, qui *Pedes* vocantur: unde ipſa *decempeda* appellatur. Pes ſubdividitur in 10 *Digitos*; digitus in 10 *Lineas* & ita porro.

SCHOLION 1.

24. *Menſuræ longitudo & diviſio non eadem eſt ubivis gentium. Varias differentias præter* Willebrordum Snellium (a) *exponunt* Ricciolus, (b) Malletus, (c) Cl. Eiſenſchmidius (d) *aliique. Aliquas celebrium menſurarum varietates repræſentat tabula ſequens in particulis iſtiusmodi, qualium pes regius Pariſinus eſt* 1440. *Continet is nempe* 12 *digitos, digitus* 12 *lineolas, lineola* 10 *particulas, adeoque pes integer particulas* 1440.

PesRegius Pariſinus	1440	Conſtantinopolitanus	3120
Rhenanus	$1391\frac{3}{10}$	Bononienſis	$1682\frac{2}{5}$
Romanus	1320	Argentorat	$1282\frac{3}{4}$
Londin.	1350	Norimberg.	$1346\frac{3}{4}$
Suecicus	1320	Dantiſcanus	$1721\frac{1}{2}$
Danicus	$1403\frac{2}{5}$	Halenſis	1320
Venetus	1540		

SCHOLION 2.

25. *Diviſionem menſuræ decimalem primus introduxit* Stevinus, *teſte ipſius Geometria practica, dubio procul exemplo* Regiomontani. *Indicem autem decempedarum conſtituit* 0, *pedum* 1, *digitorum* 2, *linearum* 3 *&c. Nempe cum menſura in ratione decupla ſubdividatur, partes in Geometrica ratione progredientes per logarithmos indicat* (§. 302. Arithm.) *quos circello incluſos numeris adſcribit. Sed commodius* Johannes Bayerus *in Logiſtica decimali & Stereometria logarithmos characteribus Romanis expreſſos apicibus numerorum adſcribit. E. gr. tres perticæ, quinque pedes, ſeptem digiti & octo lineæ ita ſcribuntur:* 3° 5′ 7″ 8‴. *Commodiſſimum ſæpe accidit, ſi numeri integra ſive decempedas deſignantes a fractionibus decimalibus, pedibus nempe, digitis, lineis &c. puncto ſeparentur, uti monuimus in Arithmetica* (§. 276). *Ita loco* 3° 5′ 7″ 8‴ *ſcribemus* 3. 578. *Admodum R. P.* Franciſcus Noel *autor eſt*, (e), *diviſionem decimalem non modo in menſuris, ſed & ponderibus Sinicis adhiberi.*

DEFINITIO 11.

26. *Superficies* eſt magnitudo duabus dimenſionibus prædita, ſeu in longitudinem & latitudinem extenſa.

COROLLARIUM.

27. Termini ſecundum longitudinem & latitudinem ſunt lineæ, ſecundum profunditatem ipſamet terminus ſui exiſtit.

SCHOLION.

28. *Nimirum in longitudine nullum aſſumi poteſt punctum, cui non reſpondeat aliqua linea ſecundum latitudinem & contra.*

a) in Eratoſthene Batavo lib. 2. c. 2. usque ad 5. b) in Geogr. Reform. lib. 2. c. 7. f. 43 & ſeqq. c] Geometrie practique lib. 1. p. 108. d] in diſquiſit. nova de ponderibus & menſuris veterum Rom. Græc. & Hebr. Sect. 3. c. 1. p. 93. & ſeqq. e] in Obſervationibus Mathematico Phyſicis in India & China factis c. 7. p. 104. & ſeqq.

DEFINITIO 12.

29. Per *Perimetrum* intelligimus continuum, quo aliud continuum terminatur.

DEFINITIO 13.

30. *Figura* eſt continuum perimetro terminatum.

SCHOLION.

31. *Dicitur tam de ſuperficiebus, quam de ſolidis. In priori caſu perimetri ſunt lineæ; in poſteriori ſuperficies.*

DEFINITIO 14.

32. *Figura rectilinea* eſt, cujus perimeter ex lineis rectis; *Curvilinea*, cujus perimeter ex curvis; *Mixtilinea*, cujus perimeter partim ex rectis, partim ex curvis conſtat.

DEFINITIO 15.

33. *Latus* eſt linea, quæ eſt pars perimetri figuræ ſuperficialis.

DEFINITIO 16.

34. *Planum* ſeu *figura plana* eſt, ſi e quovis puncto perimetri ad quodlibet ejusdem rectam in eadem ducere licet.

DEFINITIO 17.

Tab. I. Fig. 2. 35. *Circulus* eſt figura plana, linea in ſe redeunte terminata, ex cujus ſingulis punctis ad punctum intermedium C, quod *Centrum* vocari ſolet, ductæ rectæ ſunt inter ſe æquales. Linea illa *Peripheria* dicitur.

DEFINITIO 18.

36. *Chorda* AB eſt recta a peripheria ad peripheriam ducta.

DEFINITIO 19.

37. *Diameter* AE eſt chorda per centrum C tranſiens. Ejus dimidium AC ſive recta CD ex centro C ad peripheriam ducta dicitur *Semidiameter*, item *Radius*.

COROLLARIUM.

38. Radii ergo unius circuli inter ſe æquales ſunt (§. 35).

DEFINITIO 20.

39. *Arcus* eſt pars quantalibet peripheriæ AB: *Gradus* vero eſt pars ejusdem trecenteſima ſexageſima. Quilibet gradus in 60 *Minuta prima*; minutum quodlibet in 60 *ſecunda*; ſecundum unumquodque in 60 *tertia* &c. ſubdividitur.

COROLLARIUM.

40. Cum peripheria cujuslibet circuli in 360 gradus dividatur; circuli majoris gradus ſunt majores gradibus minoris.

SCHOLION.

41. *Scrupula graduum ſunt fractiones, quarum denominatores in ratione ſexagecupla progrediuntur, hoc eſt, minutum primum* $= \frac{1}{60}$, *ſecundum* $= \frac{1}{3600}$, *tertium* $= \frac{1}{216000}$ &c. *Sed cum hi denominatores ſint moleſti; in eorum locum ſurrogati ſunt tanquam indices ipſorum logarithmi. Atque hinc gradui tanquam integro ſeu unitati ceſſit 0, minuto*

primo

primo 1, ſecundo 2, tertio 3 *&c.* [§. 302. Arithm.], *conſequenter gradus cum ſuis ſcrupulis eodem modo ſcribuntur, quo decempeda cum ſuis* (§. 25). *E. gr.* 3 *gradus,* 25 *minuta;* 16 *ſecunda ita ſcribis:* 3° 25′ 16″. *Etſi autem Ægyptii veteres, quibus hanc diviſionem acceptam ferunt, hoc artificio computum Aſtronomicum a fractionibus liberaverint, cum fractiones ſexageſimales inſtar numerorum integrorum tractari poſſint, nec ſine prudenti conſilio eundem in finem eum graduum numerum fecerint, qui per* 2. 3. 4. 5. 6. 8. 9 *exacte dividitur, nec minus eum fecerint exponentem rationis, juxta quam ſcrupula decreſcunt, quem* 2. 3. 4. 5 *&* 6 *metiuntur; non tamen ſine ratione ſuaſerunt poſt* Stevinum f) Oughtredus g], Wallifius h) *aliique, ut ſepoſitis fractionibus ſexageſimalibus, decimales reciperentur: nulla enim in decimalibus reductione minorum fractionum ad majores, vel majorum ad minores opus eſt; ſexageſimales vero non ſine tædio reducuntur. Id conſilium ſecuti ſunt* Henricus Briggius *in Canone triangulorum artificiali apud* Henricum Gellibrand *in Trigonometria Britannica,* Johannes Nevvton *in Aſtronomia pariter ac Trigometria Britannica &* Nicolaus Mercator *in Inſtitutionibus Aſtronomicis.* Stevinus i] *contendit, eandem circuli diviſionem antiquitus, in* ſeculo ſapiente, *quod adſtruere conatur, obtinuiſſe.*

DEFINITIO 21.

42. *Circuli concentrici* ſunt, qui idem centrum habent: *Eccentrici* vero, qui habent diverſa.

DEFINITIO 22.

Tab. I. Fig. 2. 43. *Segmentum circuli* eſt pars ipſius AFBA arcu AFB & chorda AB comprehenſa. Dicitur *Segmentum majus,* quod ſemicirculo majus eſt; *minus* vero, quod minus eſt.

DEFINITIO 23.

44. *Sector circuli* eſt pars ejus ACD duobus radiis AC & CD atque arcu AD comprehenſa. Tab. I. Fig. 3. 4. 5.

DEFINITIO 24.

45. Recta HI circulum in L *tangit,* ſi ipſi ita occurrit, ut producta tota extra circulum cadat. Circulus vero circulum *intus tangit,* ſi totus intra hunc; *extus vero tangit,* ſi totus extra hunc cadit.

COROLLARIUM 1.

46. Recta CL ex centro C ad contactum L ducta eſt radius circuli (§. 37).

COROLLARIUM 2.

47. Circuli ergo ſe extus tangentes in L diverſa centra C & *c* habent, adeoque eccentrici ſunt (§. 42).

DEFINITIO 25.

48. Linea AB lineam CD *ſecat* in E, ſi eam dirimit in partes CE & ED cis & ultra ipſam ſitas. Tab. I. Fig. 6.

COROLLARIUM 1.

49. Cum etiam CD ipſam AB dirimat in partes AE & EB cis & ultra CD ſitas; ſi AB ſecet CD in E, etiam viciſ-

f] in præf. ad Tractat. de Logiſtica decimali. g] Clavis Mathemat. c. 1. p. m. 2.
h] Algebræ c. 9. f. 39. Vol. II Oper. Math.
i] in Coſmographia lib. 1. def. 6. p. 109 Operum Gallice editorum.

viciſſim CD ſecabit AE in eodem puncto E.

COROLLARIUM 2.

Tab. I. Fig. 7. 50. Si recta MN circulum in O ſecet, pars ejus ON intra circulum cadit. (§. 35.)

COROLLARIUM 3.

51. Si circulus circulum ſecet, cum utriusque peripheria in ſe redeat (§. 35), pars peripheriæ unius circuli intra alterum cadat neceſſe eſt. Tab. I. Fig. 8.

DEFINITIO 26.

52. *Angulus* eſt duarum linearum AB & AC in uno puncto A concurrentium mutua inclinatio. Lineæ AB & AC dicuntur *crura*; punctum concurſus A *Vertex*. Tab. I. Fig. 19.

SCHOLION.

53. *Angulus hic vel unica littera A vertici ejus adſcripta, vel ad evitandam in caſibus nonnullis confuſionem tribus litteris BAC indigitatur, ita ut vertici adſcripta medio loco ponatur. Sæpe nomen angulo imponit littera minor x eidem inſcripta. Utimur vero angulis ad linearum ſitum determinandum.*

DEFINITIO 27.

54. *Angulus inſiſtere* dicitur lineæ, in qua crura ejus terminantur.

DEFINITIO 28.

55. *Menſura anguli* BAC eſt arcus DE ex vertice A radio prorſus arbitrario AE intra crura ejus AC & AB deſcriptus. Tab. I. Fig. 9.

COROLLARIUM.

56. Anguli ergo diſtinguuntur per rationem arcuum ex vertice intra crura deſcriptorum ad peripheriam: diſtinguuntur enim per illos arcus, arcus vero non aliter niſi per rationem ad peripheriam diſtinguere licet (§. 39. *Geom.* & §. 123. *Arithm.*)

SCHOLION.

57. *Tot ſcilicet graduum dicitur eſſe angulus, quot graduum eſt arcus DE.*

DEFINITIO 29.

58. *Anguli contigui* FGH & HGI ſunt, quorum idem eſt vertex G & crus unum commune GH. Tab. I. Fig. 10.

DEFINITIO 30.

59. *Angulus deinceps poſitus* AEC dicitur, qui oritur, anguli AED latere uno ED in C producto. Tab. I. Fig. 6.

COROLLARIUM.

60. Anguli deinceps poſiti ſunt contigui, ſed non contra (§. 58).

DEFINITIO 31.

61. *Angulus rectus* KLM eſt, cui deinceps poſitus KLN æqualis eſt. Tab. I. Fig. 11.

DEFINITIO 32.

62. *Angulus acutus* AEC eſt, qui minor recto. *Angulus obtuſus* AED eſt, qui recto major. Communi nomine *obliqui anguli* dicuntur. Tab. I. Fig. 6.

DEFINITIO 33.

63. *Rectæ lineæ* AE & EB *in directum*

Tab. I. Fig. 6. *rectum* ſitæ ſunt, ſi ejusdem rectæ AB partes exiſtunt.

DEFINITIO 34.

64. *Anguli verticales* o & x ſunt, ſi crura unius AE & EB, in directum jacent cruribus alterius EC & ED.

DEFINITIO 35.

65. Si lineæ ST duæ aliæ OA & RB a diverſis plagis in diverſis punctis A & B occurrant, *anguli*, quos cum ea efficiunt, *x* & *y* dicuntur *alterni*. Tab. I. Fig. 12.

DEFINITIO 36.

66. Si vero lineæ ST duæ aliæ AP & BR itidem in diverſis punctis A & B, ſed ab eadem plaga occurrant, *anguli*, quos cum ea efficiunt, *u* & *y*, item z & *y*, dicuntur *oppoſiti*: & quidem *u* dicitur *oppoſitus externus*, z vero *oppoſitus internus* ipſius *y*.

DEFINITIO 37.

Tab. I. Fig. 13. 67. *Angulus ad peripheriam* eſt angulus ABD cujus vertex B & crura BA atque BD in peripheria terminantur. Dicitur etiam *Angulus in ſegmento*.

COROLLARIUM.

68. Intercipitur adeo a duabus chordis AB & BD (§. 36 & 52) atque arcui AB inſiſtit (§. 54).

DEFINITIO 38.

69. *Angulus ad centrum* eſt angulus ACD, cujus vertex in centro circuli C eſt, crura vero AC & CD in peripheria terminantur.

COROLLARIUM.

70. Angulus ad centrum a duobus radiis intercipitur (§. 37), adeoque arcui AB inſiſtit (§. 39. 54) conſequenter arcus AD ejus menſura (§. 55).

DEFINITIO 39.

71. *Angulus extra centrum* HKI eſt, cujus vertex K extra centrum eſt, crura vero HK & IK in peripheria terminantur. Tab. I. Fig. 14

COROLLARIUM.

72. Inſiſtit ergo arcui HI (§. 39. 54).

DEFINITIO 40.

73. *Angulus contactus* HLM eſt, quem arcus circuli ML cum tangente HL ad contactum efficit. Tab. I. Fig. 3.

DEFINITIO 41.

74. *Angulus ſegmenti* MLH vel MLI eſt, quem chorda ML cum tangente HL vel LI ad contactum L efficit.

DEFINITIO 42.

75. *Linea* KL *perpendicularis* aut *normalis* eſt ad alteram LM, ſi cum ea efficit rectum. Tab. I. Fig. 11.

COROLLARIUM.

76. Si igitur LK ad NM perpendicularis, anguli ad L deinceps poſiti æquales ſunt (§. 61) & contra.

DE-

DEFINITIO 43.

Tab. I. Fig. 9. 77. *Linea* AB eſt ad alteram AC *obliqua*, ſi cum ea efficit angulum obliquum.

DEFINITIO 44.

Tab. I. Fig. 12. 78. *Linea* QP *parallela* eſt alteri QR, ſi ubique eandem ab ea diſtantiam ſervat.

AXIOMA 3.

79. *Lineæ parallelæ in infinitum continuatæ non concurrunt.*

DEFINITIO 45.

Tab. I. Fig. 15. 80. *Lineæ convergentes* ſunt TO & VQ, quarum diſtantia continuo fit minor.

DEFINITIO 46.

81. *Lineæ divergentes* ſunt TN & VP, quarum diſtantia continuo fit major.

DEFINITIO 47.

82. *Opponi* dicuntur, e quorum uno ad alterum perpendicularem ducere licet.

DEFINITIO 48.

83. *Triangulum* eſt figura tribus lineis terminata.

DEFINITIO 49.

Tab. I. Fig. 16. 84. *Triangulum æquilaterum* ABC eſt, cujus omnia latera inter ſe æqualia ſunt. In genere *Figura æquilatera* dicitur, cujus latera ſingula inter ſe æqualia.

DEFINITIO 50.

85. *Triangulum æquicrurum* ſive *Iſoſceles* DEF eſt, quod duo latera æqualia habet. Tab. I. Fig. 17.

DEFINITIO 51.

86. *Triangulum ſcalenum* ACB eſt, cujus nullum latus alteri æquale. Tab. I. Fig. 18.

DEFINITIO 52.

87. *Triangulum rectangulum* KML eſt, cujus angulus unus K rectus eſt. Tab. I. Fig. 19.

DEFINITIO 53.

88. *Triangulum obtuſangulum* PNO eſt, cujus angulus unus N eſt obtuſus. Tab. I. Fig. 20.

DEFINITIO 54.

89. *Triangulum acutangulum* ACB eſt, cujus omnes anguli ſunt acuti. Tab. I. Fig. 16.

DEFINITIO 55.

90. *Triangulum obliquangulum* eſt, cujus omnes anguli ſunt obliqui.

DEFINITIO 56.

91. *Hypothenuſa* ML eſt latus in triangulo rectangulo angulo recto L oppoſitum. Tab. I. Fig. 19.

DEFINITIO 57.

92. *Catheti* ſunt latera trianguli rectanguli MK & KL angulum rectum K intercipientes.

DEFI-

DEFINITIO 58.

93. *Figura quadrilatera* eſt, cujus perimeter ex quatuor lateribus conſtat. *Rectangula* dicitur, ſi anguli ejus ſinguli fuerint recti; *obliquangula*, ſi obliqui.

Tab. I. Fig. 21. DEFINITIO 59.

94. *Quadratum* ABCD eſt figura quadrilatera, æquilatera, rectangula.

Tab. I. Fig. 22. DEFINITIO 60.

95. *Rhombus* EFHG eſt figura quadrilatera, æquilatera, obliquangula.

Tab. I. Fig. 23. DEFINITIO 61.

96. *Rectangulum* ſive *oblongum* MLIK eſt figura quadrilatera, rectangula, latera oppoſita ML & IK, item IM & LK æqualia habens.

Tab. I. Fig. 24. DEFINITIO 62.

97. *Rhomboides* NOPQ eſt figura quadrilatera, obliquangula, latera oppoſita OP & NQ, item ON & PQ, æqualia habens.

DEFINITIO 63.

98. *Parallelogrammum* eſt figura quadrilatera, cujus latera oppoſita ſunt parallela.

Tab. I. Fig. 25. DEFINITIO 64.

99. *Trapezium* RTVS eſt figura quadrilatera non parallelogramma.

DEFINITIO 65.

100. *Figura polygona* ſeu *multilatera* eſt, cujus perimeter ex pluribus, quam quatuor, lateribus componitur. Quodſi latera fuerint quinque, *Pentagonum*; ſi ſex, *Hexagonum*; ſi ſeptem, *Heptagonum*; ſi octo, *Octogonum* &c. dicitur. Tab. I. Fig. 26. 27.

DEFINITIO 66.

101. *Figura æquiangula* eſt, cujus ſinguli anguli æquales ſunt.

DEFINITIO 67.

102. *Figura regularis* eſt figura æquilatera & æquiangula.

DEFINITIO 68.

103. *Figura irregularis* eſt, quæ non ſimul æquilatera & æquiangula.

DEFINITIO 69.

104. *Figuræ inter ſe æquilateræ* dicuntur, ſi ſingula latera unius fuerint ſigillatim æqualia ſingulis lateribus homologis alterius.

DEFINITIO 70.

105. *Figuræ inter ſe æquiangulæ* ſunt, ſi ſinguli anguli unius ſingulis angulis homologis alterius æquales ſunt.

DEFINITIO 71.

106. Dicuntur vero tam *anguli* quam *latera homologa*, ſi eundem ordinem a primo in utraque figura ſervent.

DEFINITIO 72.

Tab. I. Fig. 24. 107. *Diagonalis* PN eſt recta ex vertice anguli unius P in verticem alterius N intra crura utriusque ducta.

DEFINITIO 73.

Tab. I. Fig. 19. 108. *Baſis figuræ* eſt perimetri pars ima KL.

COROLLARIUM.

109. Cum ſitus figuræ ipſi non ſit eſſentialis, quamlibet perimetri partem ſeu latus figuræ quodlibet pro baſi aſſumere licet.

DEFINITIO 74.

Tab. I. Fig. 19. 110. *Vertex figuræ* M eſt vertex anguli baſi KL oppoſitus.

DEFINITIO 75.

111. *Altitudo figuræ* eſt diſtantia verticis a baſi.

DEFINITIO 76.

Tab. VI. Fig. 107. 112. *Figura* dicitur *circulo inſcripta*, ſi peripheria per vertices ſingulorum angulorum ipſius tranſit.

DEFINITIO 77.

113. *Figura* dicitur *circulo circumſcripta*, ſi ſingula ejus latera peripheriam tangant.

DEFINITIO 78.

114. *Menſura figuræ* eſt quadratum, cujus latus perticæ æquale, diciturque *pertica quadrata*, & in *pedes quadratos*, ſicut pes quadratus in *digitos quadratos* dividitur.

DEFINITIO 79.

115. *Eodem modo determinari* dicuntur, ſi data, ex quibus unum determinatur, diſcerni nequeant a datis, ex quibus determinatur alterum, niſi per compræſentiam, & utrobique ex datis per easdem regulas reliqua determinantur.

COROLLARIUM.

116. Quæ itaque eodem modo determinantur, diſcerni non poſſunt, niſi fuerint compræſentia, adeoque ſimilia ſunt (§. 22. *Arithm.*)

CAPUT II.
De
PROPOSITIONIBUS QUIBUSDAM FUNDAMENTALIBUS.

PROBLEMA 1.

117. *A dato puncto A ad datum punctum B lineam rectam ducere.*

RESOLUTIO.

I. In charta

Linea recta ducitur juxta regulam Tab. I. Fig. 28.

lam EF ad puncta data A & B applicatam graphio HI, penna aut plumpagine.

II. In ligno vel ſaxo

Recta delineatur etiam ſine regula, ſi filum creta vel ceruſſa delibutum punctis datis A & B apprimatur & medio digitis prehenſo ſurſum trahatur moxque iterum demittatur.

Tab. I. Fig. 29. III. In campo

Recta deſignatur per baculos LK in punctis datis beneficio libellæ M ad horizontem perpendiculariter defixos, quorum ſummitati muccinium aut folium chartæ mundæ alligatur, ſi e longinquo videri debeant.

SCHOLION 1.

118. *Cum regulæ orichalceæ & argenteæ chartam facile nigrent; iis præferuntur, quæ ex lignis Indicis parantur, ut ebeninæ. His enim accuratam politiem inducere licet, ne ſordes facile adhæreſcant, nec fibræ exiguæ calami graphiique motum uniformem impediant: quod quernis, nuceis & his ſimilibus familiare vitium.*

SCHOLION 2.

Tab. I. Fig. 29. 119. *Pennæ optimæ ſunt, quæ ex corvorum alis evelluntur: propterea quod anſerinis duriores lineis ſubtilioribus & purioribus ducendis inſerviunt. Baculi vero LK cuſpide ferrea muniuntur, ut eo facilius in terra præſertim duriore defigi queant.*

SCHOLION 3.

120. *Utendum vero eſt atramento non communi, ſed Sinico, tum quia commune ob corroſivitatem vitrioli, quod ipſum ingreditur, chalybeam graphii cuſpidem arrodit; tum quia Sinicum facilius effluit, etiamſi atrius ſit communi. Accedit, quod Sinico lineæ nitidiores ducantur, quam communi.*

PROBLEMA 2.

121. *Duobus baculis in ſolo defixis, tertium vel plures in eadem recta cum iis infigere.*

RESOLUTIO.

Baculus ita infigitur, ut oculo in unum directo cæteri non appareant.

Ratio a luminis rectilinea propagatione petenda, de qua in Opticis.

PROBLEMA 3.

122. *Lineam rectam metiri.*

RESOLUTIO.

Ad manus ſit neceſſe eſt menſura (§. 21). Nimirum pro lineis in charta datis abſcindantur ex RT 10 partes æquales longitudinis arbitrariæ, quæ pedes deſignent: intervallum vero 10 pedum RS in reſiduum lineæ transferatur, quoties fieri poteſt (§. 23). In campo vel catena, vel fune cannabino, vel pertica in digitos, pedes & decempedas legitime diviſis utimur. Sufficit autem ultimam decempedam in pedes & pedem ultimum in digitos dividi. Quodſi ergo lineam rectam metiri jubearis. Tab. I. Fig. 30.

I. In charta

1. Ponatur crus circini unum in

A & eousque aperiatur, donec alterum extremum B attingat.

2. Mox circini crus unum in fine decempedæ alicujus, e. gr. in 1, ponatur & notetur, quemnam pedem menſuræ alterum attingat, e. gr. 5. Erit linea AB 1°5′.

II. In Campo,

1. In utroque lineæ extremo erigantur baculi (§. 117) & , ſi ea menſuræ longitudinem ſuperet, conſtituantur cum iis alii in eadem recta (§. 121).

2. Funis cannabinus aut catena menſuram largiens ab uno baculo usque ad alterum ita extendatur, ut utrumque ad angulos rectos ſecet (§. 223): quod perpendiculo appenſo evidens redditur.

3. Decempedæ, pedes atque digiti inter utrumque intercepti numerentur.

SCHOLION 1.

123. *Si catena utrinque in annulos deſinat, per quos baculos trajicere licet; lineam metimur, baculis hiſce cum cæteris in eadem recta continuo collocatis* (§. 121). *Notandum tamen, dum baculus ex A in B transfertur non in veſtigio baculi B, ſed prope ipſum in D eundem infigi atque annulorum crasſitiem longitudini menſuræ non accenſeri debere. Quodſi tamen hæc ſit pars menſuræ eaque ſubdupla Diametri baculi; baculus ex A ablatus in ipſo B defigi poterit. Parantur autem catenæ PQ ex filis ferreis pedalibus, earumque longitudo tres decempedas excedere vix debet, ne pondere ſiant moleſtæ: quam ob rationem nec filis ferreis nimium craſſis utendum.*

Tab. I. Fig. 31.

Tab. I. Fig. 32.

SCHOLION 2.

124. *Si pertica circa alterum ſui extremum tanquam centrum per quadrantem circuli elevata & per alterum rurſus demiſſa lineam metimur; craſſities ejus longitudini lineæ repertæ toties addenda, quoties ad eam applicata fuit, aut longitudo perticæ particula craſſitiei congruente imminuenda. Cæterum quia perticæ ab inæqualitate extenſionis prorſus liberæ prærogativam quandam præ catenis & funibus habent; earum extremitates annulis ferreis inſtrui oportet, ut obſervantibus, quæ in ſcholio præcedente diximus, tanto minus periculi ſuperſit, ne a recta dimetienda declinetur.*

SCHOLION 3.

125. *Funes cannabinos humor contrahit & vires diverſæ inæqualiter tendunt.* Schvventerus (k) *autor eſt, cum aliquando exercitiis Geometricis in campo vacaret, longitudinem funis, quæ erat 16 pedum, cadente pruina, horæ unius intervallo, ad pedes 15 rediiſſe. Ut igitur hi nævi tollantur, funiculi, ex quibus conficiuntur, in gyros contrarios contorquendi; ipſe autem funis oleo ad ignem ferventi immittendus & poſtquam exſiccatus fuerit, per ceram liquefactam trahendus, tandemque cerandus. Nullum longitudinis decrementum notabis, etiamſi funem iſtiusmodi per diem integrum ſub aquis demerſum detineas. Ne autem funis humum contingat, ſuſtentaculum Z ipſi ſupponendum. Perpendiculum, quo horizontaliter extenditur, ex filo & appenſo globo vel pondere plumbeo conſtat.* Tab. I. Fig. 33.

PROBLEMA 4.

126. *Data longitudine lineæ in menſura e. gr. Pariſina, invenire eandem*

(k) Geometr. pract. lib. 1. Tract. 1. p. 381.

dem in menſura alia, e. gr. Londinenſi, cujus ad priorem nota eſt ratio.

RESOLUTIO.

Sit e. gr. linea data 186 pedum Pariſinorum, quæritur quot eadem ſit pedum Londinenſium? Quoniam pes Londinenſis eſt ad Pariſinum ut 135 ad 144 (§. 24); inferatur (§. 281 *Arithm.*):

```
135·144·186   26784 ( 198 54/135 ped.
    186    135) 135        Londin.
    ———         ————
    864         1328
   1152         1215
   144          ————
 ———————        1134
  26784         1080
                ————
                  54
```

PROBLEMA 5.

127. *Ex dato quovis centro C dato radio quocunque AC circulum deſcribere.*

RESOLUTIO.

Tab. II. Fig. 34. I. In charta

1. Collocetur circini crus unum in centro dato C & aperiatur intervallo radii dati AC.
2. Moveatur circinus circa centrum C: ita crus alterum peripheriam deſignabit (§. 38).

II. In ſolo & quotieſcunque circini apertura tanta fieri nequit, quanta requiritur, radii vice fungitur filum, funiculus, aut virga ſive lignea, ſive ferrea.

SCHOLION 1.

128. *Si fune aut filo utimur, cavendum eſt, ne ſtylus FA; quo peripheria deſignatur, e ſitu perpendiculari dimoveatur: id quod impedit filum transverſum FE, ſi fuerit AF* = 3 *AE* = 4 & *FE* = 5. *Ratio infra patebit* (193). Tab. II. Fig. 35.

SCHOLION 2.

129. *Circini, ut inſtrumenta Geometrica reliqua, ex orichalco parantur ob durabilitatem, tractabilitatem & nitorem hujus metalli. Cuſpides tamen crurum ex chalybe fiunt: fert enim ejus durities, ut ſubtilius exacuantur. Circini, quo ad lineas metiendas & dividendas utimur, crura eadem ſunt & invariata. Sed circini, qui peripheriis & arcubus deſcribendis inſervit, crus alterum variari poteſt, ut tam plumbagine, quam atramento Sinico uti detur, prout commodum viſum fuerit. Plumbagine nempe utimur, quoties arcus delineantur abſoluta operatione rurſus delendi. Longitudo vel 3 vel 6 digitorum eſſe ſolet.* Tab. II. Fig. 37.

COROLLARIUM.

130. Quoniam unius circuli peripheria eodem modo determinatur, quo peripheria alterius cujuſcunque (§. 115); omnes peripheriæ ſunt inter ſe ſimiles (§. 116).

THEOREMA 2.

131. *Diameter AE dividit tam peripheriam, quam circulum ipſum in duas partes æquales.* Tab. I. Fig 2.

DEMONSTRATIO.

Moveatur AC circa C per D in E, donec CE ipſi AC in directum jaceat: hoc pacto determinabitur

tum arcus ADE, tum ſegmentum ADECA (§. 127). Similiter ſi idem radius AC circa idem centrum C per B in E moveatur, donec denuo CE indirectum jaceat ipſi AC, arcus ABE & ſegmentum ABECA determinatur (§. 127): Ergo tam arcus uterque, quam ſegmentum utrumque eodem modo determinatur (§. 115) conſequenter ABE ∽ ADE & ABECA ∽ ADECA (§. 116). Sunt vero arcus peripheriæ (§. 39), ſegmenta circuli partes (§. 43). Quamobrem illi ad peripheriam, hæc ad circulum eandem rationem habent (§ 161. *Arithm.*), conſequenter tum illi, tum hæc inter ſe æquantur (§. 169. *Arithm.*). *Q.e.d.*

COROLLARIUM.

132. Super quavis igitur linea AE ex aſſumto in ea puncto C (producta, ſi opus ſit, §. 19) deſcribi poteſt ſemicirculus.

THEOREMA 3.

Tab. II. Fig. 34. 133. *Si ex centro C duorum circulorum concentricorum ducantur radii CDA & CEB; tum arcus DE & BA ad peripherias, tum ſectores DCE & ACB ad areas ſuorum circulorum eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

Cum circuli concentrici *per hypoth.* idem centrum C habeant (§. 41), in recta vero CDA puncta D & A, in recta CEB puncta E & B verſus eandem plagam ſita ſint (§. 16), ſectores DCE & ACB cum ſuis arcubus DE & AB motu rectæ circa idem centrum ab eadem plaga usque ad eandem plagam, hoc eſt, eodem modo determinantur (§. 115). Quare cum arcus DE & AB peripheriarum (§. 39), ſectores DCE & ACB ſuorum circulorum (§. 44) partes exiſtant; illi peripheriarum, hi circulorum partes ſimiles ſunt (§. 116) adeoque illi ad peripherias, hi ad circulos eandem rationem habent (§. 161. *Arithm.*). *Q.e.d.*

COROLLARIUM 1.

134. Cum arcus DE & AB intra crura ejusdem anguli ACB ex ejus vertice C deſcripti ſint arcus circulorum concentricorum (§. 42); ad ſuas quoque peripherias eandem rationem habent, conſequenter inter ſe ſunt ut peripheriæ (§. 164 *Arithm.*). Quoniam itaque peripheriæ eundem numerum graduum continent (§. 39); ipſi quoque eundem continere debent. Tab. II. Fig. 34.

COROLLARIUM 2.

135. Quia anguli quantitas æſtimatur per rationem arcus ex vertice intra crura deſcripti ad totam peripheriam (§. 56); perinde eſt, quocunque radio arcus iſte deſcribatur (§. 133) & angulorum æqualium menſuræ ſunt arcus vel æquales, vel ſimiles ac contra.

COROLLARIUM 3.

136. Eadem ergo manet anguli quantitas, ſive crura producantur, ſive minuantur.

THEOREMA 4.

Tab. I. Fig. 11. 137. *Anguli recti KLM menſura eſt quadrans circuli.*

DEMONSTRATIO.

Producatur LM in N (§.19); erit $x = o$ (§. 61). Sed cum ex L ſuper recta AB deſcribi poſſit ſemicirculus (§. 132); angulorum x & o menſuræ junctim ſumtæ conficiunt ſemicirculum (§. 55). Ergo unius menſura eſt dimidius ſemicirculus, hoc eſt circuli quadrans. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

138. Cum quadrans circuli 90° complectatur (§. 39); angulus rectus eſt 90° (§. 57):

COROLLARIUM 2.

139. Omnes adeo recti ſunt inter ſe æquales & æqualis recto etiam rectus eſt.

COROLLARIUM 3.

140. Acutus igitur minor, obtuſus major eſt quam 90° (§. 62).

THEOREMA 5.

Tab. I. Fig. 6. 141. *Duo anguli deinceps poſiti x & y, aut quotcunque ad idem punctum E ſuper eadem recta CD conſtituti ſunt æquales duobus rectis.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam in caſu priore anguli x & y ſunt deinceps poſiti, *per hypoth.* EC cum ED eandem rectam conſtituit (§. 59). In caſu poſteriore omnes anguli conſtituti ſunt ſuper eadem recta CD ad idem punctum E, *per hypoth.* Quare cum ex E ſuper CD deſcribi poſſit ſemicirculus (§. 132); in utroque caſu menſura omnium angulorum eſt ſemicirculus (§. 55). Sed idem eſt menſura duorum rectorum (§. 137). Ergo anguli iſti ſunt duobus rectis æquales (§. 135). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

142. Anguli, qui ſunt deinceps, x & y, aut plures circa idem punctum ejusdem rectæ conſtituti, ſi junctim ſumantur, conficiunt 180° (§. 138.)

COROLLARIUM 2.

143. Augulorum contiguorum dato uno, alter itidem datur; relinquitur nimirum, ſi ex 180° ſubducatur.

COROLLARIUM 3.

144. Si in campo angulum inacceſſum metiri jubemur & eum, qui eſt deinceps, accedere licet; illius loco hunc metimur: ex 180° enim ſubductus quæſitum relinquit (§. 143).

COROLLARIUM 4.

145. Certus evades, te omnes figuræ rectilineæ angulos in campo exacte dimen-

dimenſum eſſe, ſi finita operatione deinceps poſitos etiam metiaris & hos ſingulos illis ſingulis addas: quodſi enim ubique prodierit ſumma 180°, operatio rite peracta (§. 142).

PROBLEMA 6.

Tab. II. Fig. 36. 146. *Angulum metiri.*

RESOLUTIO.

Cum anguli ACB menſura ſit arcus DE ex centro C intra crura AC & CB deſcriptus (§. 55), totum negotium huc redit, ut numerus graduum, qui arcui DE competunt, determinetur; id quod fit ope ſemicirculi in 180° exactisſime diviſi. Nimirum

I. In charta

1. centrum Semicirculi ad verticem anguli C applicatur & radius ejus CE cruri BC admovetur.
2. Gradus in arcu DE inter crura anguli AC & CB intercepto numerantur.

II. In campo

Tab. II. Fig. 38. 1. Inſtrumentum goniometricum ita collocatur, ut radius ejus CG uni cruri anguli; centrum vero C vertici ejusdem immineat. Prius obtinetur collineando per dioptra F & G, ſeu pinnulas immobiles ad diametrum perpendiculariter erectas, verſus baculum in extremo cruris defixum; poſterius vero perpendiculum ad centrum inſtrumenti applicando.
2. Regula HI circa centrum mobilis verſus crus anguli alterum promovetur, donec per pinnulas ipſi affixas baculus in extremo ejus defixus collineanti occurrat.
3. Gradus, quem regula in inſtrumento indicat, notatur.

SCHOLION 1.

147. *Semicirculus minor, quo in charta utimur, inſtrumentum transportatorium vulgo appellatur. In campo quidam circulo integro; quidam nonniſi quadrante utuntur.*

SCHOLION 2.

148. *Diameter transportatorii eſt trium fere digitorum Rhenanorum; majorum vero inſtrumentorum goniometricorum unius pedis aut ad ſummum unius cum dimidio. Diviſio accurata fieri debet. In transportatoriis gradus dimidii ſatisfaciunt; in majoribus dena prima. Angulos in campo inſtrumento majore captos, quantum fieri poteſt, accuratisſime in charta deſignaturi, diametrum transportatiorio non multo minorem diametro ejus inſtrumenti, quo in campo uſi ſunt, & regulam circa centrum mobilem indulgent.*

PROBLEMA 7.

149. *Data quantitate anguli, ipſum deſcribere.* Tab. II. Fig. 36.

RESOLUTIO.

I. In charta

1. Ducatur recta CB &
2. Super alterum ejus extremum C ponatur centrum inſtrumenti transportatorii, ita ut radius ejus cum recta CB coincidat,

3. Nume-

3. Numerentur gradus dati ab E verſus D & ad gradum ultimum notetur punctum D.
4. Ducatur recta CA. Erit ACB angulus quæſitus (§. 57).

Tab. II. Fig. 38. II. In campo
1. Collocetur inſtrumentum goniometricum ut in probl. præc. (§. 146).
2. Regula HI circa centrum C ad gradum datum promoveatur.
3. Baculus ita erigi jubeatur, ut per dioptra collineanti occurrat.

THEOREMA 6.

Tab. I. Fig. 6. 150. *Si recta AB alteram CD ſecet in E, anguli verticales x & o, item y & E, ſunt æquales.*

DEMONSTRATIO.

$x + y = 180^\circ$, $y + o = 180^\circ$ (§. 142). Ergo $x + y = y + o$ (§. 79 *Arithm.*) adeoque $x = o$ (§. 83 *Arithm.*). Eodem modo oſtenditur, eſſe $y = E$. *Q.e.d.*

COROLLARIUM.

151. Quodſi in campo aut alio in caſu angulum inacceſſum *x* metiri jubeamur; acceſſum vero non neget verticalis *o*; hunc ejus loco metiri licet.

SCHOLION.

152. *Cum tyrones ſub initium ſtudii Mathematici ſenſibus atque imaginationi nimis adhuc indulgeant; figuras per data ex hypotheſibus theorematum aſſumta conſtruere ac reliquarum linearum & angulorum per conſtructionem determinatorum quantitatem explorare (§. 146.) juvat, ita ſenſus & veritas propoſitionis eluceſcit, & animus ad demonſtrationes genuinas percipiendas excitatur: cum enim ſit ſcire avidus, rationes veritatis noſſe deſiderat. In demonſtratione magis acquieſcunt tyrones, probatione ratiocinationis legitimæ ſic facta, non ſecus ac theoriæ phyſicæ magis ſatisfaciunt, ubi factis experimentis decretoriis conſona deprehenduntur.*

THEOREMA 7.

153. *Omnes anguli x, y, o, E &c. circa punctum aliquod E conſtituti ſunt æquales quatuor rectis.* Tab. I. Fig. 6.

DEMONSTRATIO.

Cum enim ex quovis puncto intervallo quocunque circulus deſcribi poſſit (§. 127); menſura angulorum *x, y, o, E* &c. junctim ſumtorum eſt circulus integer (§. 55). Sed circulus eſt menſura quatuor rectorum (§. 137). Ergo omnes iſti anguli æquales ſunt quatuor rectis (§. 135). *Q.e.d.*

COROLLARIUM.

154. Omnes itaque anguli circa idem punctum conſtituti junctim 360° conficiunt (§. 39. 57).

THEOREMA 8.

155. *Quæ ſibi mutuo congruunt, ea & æqualia, & ſimilia ſunt.*

DEMONSTRATIO.

Quæ ſibi mutuo congruunt, eorum iidem eſſe poſſunt termini (§. 3). Ergo unum in locum alterius ſalva quantitate ſubſtituere licet:

conſequenter æqualia ſunt (§. 15. *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Porro quoniam, quæ ſibi mutuo congruunt eosdem terminos habere poſſunt (§. 3): quin eodem modo determinari queant dubitandum non eſt. Sunt igitur ſimilia (§. 116). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 9.

156. *Si linea lineæ congruit, ſingula puncta unius ſingulis punctis alterius congruere debent.*

DEMONSTRATIO.

Linearum enim, quæ ſibi mutuo congruunt, iidem termini eſſe poſſunt (§. 3). Sed termini linearum ſecundum longitudinem ſunt duo puncta; ſecundum latitudinem & profunditatem ipſæmet ſui termini exiſtunt (§. 10). Ergo ſi lineæ congruunt, non modo puncta extrema, ſed etiam omnia intermedia congruere debent. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

157. Si centra & radii duorum circulorum congruunt; etiam peripheriæ (§. 38), conſequenter circuli ipſi congruere debent (§. 3).

COROLLARIUM 2.

158. Ex uno itaque puncto eodem radio circulus nonniſi unicus deſcribi poteſt.

COROLLARIUM 3.

159. Æquales ſunt circuli quorum radii æquales ſunt (§. 155): minor vero eſt, cujus minor radius; major vero, cujus radius major eſt. (§. 13. *Arithm.*)

THEOREMA 10.

160. *Si fuerint duo anguli* BAC *&* bac *æquales, & vertex unius a ponatur ſuper verticem alterius* A; *præterea crus illius* ac *ſuper crus hujus* AC; *etiam crus alterum* ab *ſuper alterum* AB *cadet.* Tab. II. Fig. 39.

DEMONSTRATIO.

Si negas, neceſſe eſt ut *ab* vel intra angulum BAC, vel extra eum cadat. Ducatur ex A radio AD arcus Df (§. 127): erit DE menſura anguli BAC, *De* vel *Df* menſura anguli *bac* (§. 55). Ergo in caſu priore *De* menſura anguli *bac* minor; in poſteriore eadem menſura *Df* major foret menſura anguli BAC (§. 18 *Arithm.*). Quod utrumque cum ſit abſurdum (§. 135): crus *ab* ſuper AB cadit. *Q. e. d.*

THEOREMA 11.

161. *Si vertex & crura anguli unius* DAE *ſupra verticem & crura alterius* BAC *cadant; angulus unus* DAE *alteri* BAC *æqualis eſt.* Tab. I. Fig. 9.

DEMONSTRATIO.

Deſcribatur enim ex communi vertice A intra crura DA & DE arcus DE (§. 127); erit is menſura anguli DAE (§. 55). Sed quoniam crura DA & DE ſupra crura alterius anguli BA & AC cadunt, per

per hypoth. idem arcus DE inter crura AB & AC intercipitur. Eſt igitur & menſura anguli BAC (§. 55), conſequenter DAE = BAC (§. 135). *Q. e. d.*

THEOREMA 12.

Tab. II. Fig. 40. 162. *Lineæ rectæ æquales ſibi mutuo congruunt.*

DEMONSTRATIO.

Sit *ab* = AB, *per hypoth.* Applicetur *ab* ad AB ita ut *a* ſit in A, & aliud quodvis punctum rectæ *ab* in altera AB. Ergo omnia puncta rectæ *ab* erunt in altera AB, (§. 17). Sed quoniam AB = ab, *per hypoth.* recta *ab* alteri AB ſalva quantitate ſubſtitui poteſt (§. 15. *Arithm.*). Neceſſe igitur eſt, ut punctum *b* in B cadat. Quare *ab* ipſi A B congruit (§. 3. 10). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

163. Ergo ſi recta *ab* alteri æquali AB ita applicetur, ut punctum *a* ſupra A & *ab* ſupra AB cadat; etiam *b* ſupra B cadet (§. 3. 10).

THEOREMA 13.

Tab. I. Fig. 2. 164. *Si centro circuli C applicetur lineæ rectæ CD, radio AC æqualis, extremum unum; alterum peripheriam attinget.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam CD radio æqualis, *per hyp.* ipſi congruet (§. 162) adeoque eosdem cum eo terminos habere debet (§. 3). Sed radius ex centro eductus in peripheria terminatur (§. 37). Ergo & recta CD ipſi æqualis, ſi alterum extremum in C hæreat, altero peripheriam attinget. *Q. e. d.*

THEOREMA 14.

165. *Anguli ſimiles ſunt etiam æquales.*

DEMONSTRATIO.

Anguli ſimiles non poſſunt diſcerni niſi per compræſentiam (§ 22 *Arithm.*). Quare cum anguli diſtinguantur per rationem arcuum ex vertice intra crura deſcriptorum ad peripheriam (§. 56), ſi anguli ſunt ſimiles, arcus iſti ad ſuas peripherias eandem rationem habere, hoc eſt, & ipſi ſimiles eſſe debent (§. 38 *Geom.* & §. 161 *Arith.*) Sunt igitur anguli æquales (§. 135). *Q. e. d.*

THEOREMA 15.

166. *In figuris ſimilibus anguli homologi ſunt æquales & latera homologa proportionalia.*

DEMONSTRATIO.

Figuræ ſimiles non poſſunt diſtingui niſi per compræſentiam (§. 22 *Arithm.*). Ergo nec ab angulis, nec a lateribus homologis ullum diſcrimen petere licet, conſequenter illi æquales (§. 165), hæc proportionalia eſſe debent (§. 123. *Arithm.*). *Q. e. d.*

P 2 SCHO-

SCHOLION.

167. *Sermo nobis tantum eſt de figuris rectilineis, quarum latera in ſe ſpectata omnia inter ſe ſimilia ſunt. Alias addendum foret, latera homologa debere eſſe inſuper inter ſe ſimilia & ſimiliter poſita, e. gr. arcus circulorum ſimiles convexitatem centro figuræ obvertentes.*

THEOREMA 16.

Tab. I. Fig. 25. 168. *Figurarum ſibi mutuo congruentium* RTVS & rtus *anguli & latera homologa inter ſe æqualia ſunt.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam figuræ RTVS & *rtus* ſibi mutuo congruunt, *per hypoth.* iidem utriusque termini eſſe poſſunt (§. 3). Quare cum termini earum ſint perimetri (§. 30); una *rtus* ſupra alteram RTVS ita poni poteſt, ut *tu* ipſi TV, *tr* ipſi TR, *rs* ipſi RS &c. congruat. Ergo latera homologa ſunt inter ſe æqualia (§. 155). *Quod erat unum.*

Sunt vero T & *t*, R & *r*, S & *s* &c. vertices; TV, TR, RS, SV & *tu*, *tr*, *rs*, *sv* crura angulorum homologorum (§. 52). Quamobrem & anguli homologi æquales ſunt (§. 161). *Quod erat alterum.*

CAPUT III.

De LINEARUM RECTARUM ET TRIANGVLORVM SYMPTOMATIS.

THEOREMA 17.

Tab. II. Fig. 41. 169. *Si in duobus triangulis* ABC *&* abc *fuerit* A = a, AB = ab, AC = ac; *erit etiam* BC = bc, C = c, B = b *totaque triangula æqualia & ſimilia erunt.*

DEMONSTRATIO.

Concipiamus triangulum *abc* ita poni ſuper alterum ABC, ut punctum *a* ſuper A & recta *ab* ſuper AB cadat. Quoniam *ab* = AB, *a* = A & *ac* = AC, *per hypoth.* punctum *b* ſuper B (§. 163), recta *ac* ſuper AC (§. 160) & punctum *c* ſuper C (§. 163), conſequenter *bc* ſuper BC (§. 17) cadit, adeoque Δ *abc* alteri ABC congruit (§. 3), conſequenter *bc* = BC [§. 155] *c* = C & *b* = B (§. 161), totaque triangula æqualia & ſimilia ſunt (§. 155). *Q. e. d.*

PROBLEMA 8.

170. *Datis duobus lateribus* AB *&* AC *cum angulo intercepto* A; *triangulum conſtruere.* Tab. II. Fig. 41.

RESO-

RESOLUTIO.

1. Aſſumta AB pro baſi in A conſtituatur angulus datus (§. 149).
2. In crus ejus alterum transferatur altera datarum AC.
3. Tandem ducatur recta BC.

Erit ABC triangulum deſideratum (§. 169).

SCHOLION.

171. *Tyrones latera & angulos datos in numeris aſſumant: quod in aliquibus caſibus ad demonſtrationes empiricas diſtinctius percipiendas proderit, quas ſupra* (§. 152) *commendavimus.*

COROLLARIUM 1.

172. Determinatis adeo duobus lateribus cum angulo intercepto, tota triangula determinantur.

COROLLARIUM 2.

173. Quare ſi in duobus triangulis ACB & *acb* fiat *a*=A & *ab*:*ac*=AB AC; triangula eodem modo determinantur (§. 115) adeoque ſimilia ſunt (§. 116) conſequenter etiam *c*=C & *b*=B, *ab*:*bc*=AB:BC &c. (§. 166).

THEOREMA 18.

Tab. II. Fig. 44. 174. *In triangulo æquicruro DFE. 1. anguli ad baſin* y *&* u *ſunt æquales, 2. recta FG, quæ angulum DFE bifariam ſecat, baſin quoque DE, & 3. triangulum ipſum bifariam ſecat: immo 4. FG ad baſin DE perpendicularis.*

DEMONSTRATIO.

Nam o=x, *per hypoth.* DF=FE (§. 85) & FG=FG (§. 73. *Arithm.*) Ergo 1. *y*=*u*, 2. DG=GE, 3. Δ DFG=Δ GFE (§. 169). Et quia etiam anguli ad G æquales, *per* §. *cit.* 4. FG ad DE normalis eſt (§. 76) *q. e. d.*

COROLLARIUM.

175. Cum triangulum æquilaterum ſit etiam æquicrurum (§. 84. 85); theorema præſens de æquilatero itidem verum eſt.

THEOREMA 19.

176. *In triangulo æquilatero ABC omnes anguli ſunt inter ſe æquales.* Tab. I. Fig. 16.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim AC=CB (§. 84). Ergo A=B (§. 174). Eſt vero etiam AC=AB (§. 84). Ergo C=B (§. 174), quare A=C (§. 79. *Arithm.*) *q. e. d.*

THEOREMA 20.

177. *Si trianguli ABC latus unum AC continuetur in D; erit angulus externus DAB major quolibet interno oppoſito B vel C.* Tab. III. Fig. 55.

DEMONSTRATIO.

Concipiatur AB bifariam diviſa in F ductaque recta CF (§. 117) producenda in G (§. 19), donec fiat GF=FC. quoniam GC ſecat AB in F (§. 48); erit z=*y* (§. 150), conſequenter o=x (§. 169). Sed DAB > o (§. 76. *Arithm.*). Ergo & DAB > x (§. 81. *Arithm.*). Eodem modo oſtenditur eſſe DAB, aut, quod

perinde eſt (§. 150), ejus verticalem HAC $>$ ACB. *q. e. d.*

THEOREMA 21.

Tab. III. Fig. 57. 178. *In omni triangulo ABC latus majus AC opponitur majori angulo B; minus AB minori C & contra.*

DEMONSTRATIO

Quoniam AB $<$ AC, *per hypoth.* parti hujus AD æqualis eſt (§. 18. *Arithm.*). Ducatur recta BD (§. 117): erit BAD triangulum æquicrurum (§ 85), adeoque $o = x$ (§. 174). Sed $o >$ C (§. 177). Ergo $x >$ C (§. 81. *Arithm.*), conſequenter multo magis B $>$ C. *quod erat unum.*

Sit B $>$ C, *per hypoth.* Si non ſit AC $>$ AB, erit vel AC $=$ AB, vel AC $<$ AB, adeoque in caſu primo B $=$ C (§. 174.), in altero B $<$ C, *per demonſtr.* ſed cum utrumque hypotheſin evertat; abſurdum eſt, conſequenter majori angulo majus latus, minori minus opponitur. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 22.

Tab. III. Fig. 57. 179. *In omni triangulo ABD duo latera AD & BD ſimul ſumta, ſunt tertio AB majora.*

DEMONSTRATIO.

Producatur AD in C (§. 19), donec fiat BD $=$ DC, adeoque AC $=$ AD $+$ DB (§. 78. *Arithm.*): erit △ BDC æquicrurum (§. 85) & hinc $y =$ C (§. 174), conſequenter C $< x + y$ (§. 76. *Arithm.*). Quare AC ſeu AD $+$ DB $>$ AB (§. 178.). *Q. e. d.*

THEOREMA 23.

180. *Linea recta AB eſt breviſſima omnium, quæ intra eosdem terminos A & B continentur.* Tab. I. Fig. I.

DEMONSTRATIO.

Sit curva quæcunque ACB. Ducantur rectæ AC & CB (§. 117): erit AC $+$ CB $>$ AB (§. 179). Ducantur porro rectæ AD & DC, item CE & EB (§. 117): erit AD $+$ DC $>$ AC & CE $+$ EB $>$ CB (§. 179), conſequenter AD $+$ DC $+$ CE $+$ EB $>$ AC $+$ CB (§. 81. *Arithm.*), adeoque multo magis AD $+$ DC $+$ CE $+$ EB $>$ AB. Quodſi plures ducas ſubtenſas; erit earum aggregatum majus ipſa AB. Quare cum curva haberi poſſit pro aggregato innumerarum rectarum infinite parvarum (§. 20.); erit ea major recta AB intra eosdem terminos contenta. Eſt ergo recta AB minor curva quacunque intra eosdem terminos contenta, hoc eſt omnium linearum breviſſima, quæ ab A usque ad B duci poſſunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

181. Diſtantia ergo puncti A a puncto B in plano eſt linea recta (§ 14. 34), cumque inter duo puncta nonniſi unica linea recta contineri poſſit (§. 17); via breviſſima eſt numero unica.

CO-

COROLLARIUM 2.

182. Singula itaque peripheriæ puncta a centro circuli æqualiter diſtant (§. 38).

PROBLEMA 9.

183. *Metiri diſtantiam duorum locorum A & B ex eodem tertio C acceſſorum.*

RESOLUTIO.

Tab. II. Fig. 42.
1. In loco C ad arbitrium electo defigatur baculus.
2. Linea AC transferatur ope funis & catenæ ex C in *a*, ita ut baculus in *a* defigendus ſit cum C & A in eadem recta (§ 121).
3. Eadem ratione ex C in *b* transferatur linea CB.
4. Inveſtigetur longitudo rectæ *a b* (§. 122). Dico, *a b* eſſe æqualem diſtantiæ quæſitæ.

DEMONSTRATIO.

Cum loca A & B punctorum inſtar in eodem plano ſitorum conſiderentur, eorum diſtantia eſt recta AB (§. 181). Quoniam vero A *a* & B*b* ſunt lineæ rectæ *per conſtr.* & ſe mutuo ſecant in C (§. 48).

erit $x = y$ (§. 150).
Præterea $aC = CA$, $bC = CB$ } *per conſtr.*
Ergo $ba = AB$ (§. 169). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Collocato inſtrumento goniometrico in C inveſtigetur quantitas anguli x (§. 146.).
2. Quæratur porro longitudo rectarum AC & BC (§. 122).
3. Ex datis cruribus AC & CB cum angulo intercepto x conſtruatur juxta ſcalam geometricam modicam triangulum *a c b* (§. 170).
4. Inveniatur in eadem menſura longitudo baſis *ab* (§. 122).

Iidem numeri indicabunt diſtantiam AB in ea menſura, qua in campo uſus es.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim $x = x$ & $ac : cb = AC : CB$, *per conſtr.* conſequenter $cb : ab = CB : AB$ (§. 173). Ergo iidem numeri, qui reſpondent rectis *c b* & *a b* in menſura modica, etiam rectis CB & AB in majore reſpondent (§. 141. *Arithm.*) *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. II. Fig. 43.
1. In menſula Geometrica in D horizontaliter collocata aſſumatur punctum *c*, & in eo acicula defigatur, ad quam
2. applicata regula cum dioptris tam diu huc illucque moveatur donec per ea proſpicienti punctum B occurrat, ducaturque in hoc regulæ ſitu recta *c b*.
3. Similiter collineatio fiat in punctum A ducaturque *c a*.
4. Inveſtigetur longitudo rectarum CA & *c*B (§. 122). &
5. Ex menſura modica transferantur.

tur lineæ iſtis proportionales ex *c* in *a* & *b*.

6. Tandem in eadem menſura inveniatur longitudo ipſius *a b* (§. 122).

Iidem numeri indicabunt diſtantiam AB in menſura majore, qua in campo uſus es.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum proxime præcedente.

SCHOLION 1.

Tab. II. Fig. 42. 184. *Quodſi anguſtia ſpatii non permittit ut integræ AC & BC in* a *&* b *transferantur; poterunt* a c *&* b c *fieri* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ *&c. ipſarum AC & BC: quo in caſu eodem modo ut in reſolutione ſecunda demonſtrabitur, eſſe* a b $=$ $\frac{1}{2}$, *vel* $\frac{1}{3}$, *vel* $\frac{1}{4}$ *&c. ipſius AB.*

SCHOLION 2.

185. *Notent tyrones artificium, quo demonſtrationes Geometricas non modo ad facillimam intelligentiam reducere, ſed & proprio Marte invenire poſſunt. Nimirum quicquid vel ex conſtructione problematis aut hypotheſi theorematis, vel ex conſpectu figuræ utramque repræſentantis, diſtincte cognoſcitur, per characteres diſtincte exprimatur, veluti in demonſtratione prima præſentis, quod* x $=$ y, a c $=$ AC & b c $=$ BC. *Quo facto diſpiciatur, cujus nam theorematum antecedentium hypotheſis in iis contineatur: theſis enim illius theorematis oſtendit, quid ex iis conſequatur, veluti in noſtro exemplo, quod* ab $=$ AB. *Cum vero maxima demonſtrationum pars ex paucis de congruentia & ſimilitudine triangulorum derivetur; eorundem recordatio tandem familiariſſima evadat opus eſt.*

THEOREMA 24.

Tab. I. 186. *Si ex punctis extremis C & O rectæ alicujus radiis, CP & OP, qui junctim ſumti recta CO majores ſunt, deſcribantur circuli; ii ſe mutuo ſecabunt.* Fig. 8.

DEMONSTRATIO.

Quoniam CP < CO, *per hypoth.* parti hujus CN æqualis eſt (§. 18. *Arithm.*), adeoque ipſi congruit (§. 162). Quare ſi ex centro C radio C P circulus PNQP deſcribatur (§. 127); erit punctum N in peripheria ipſius (§. 164). Eodem modo oſtenditur, ſi ex centro O radio O P deſcribatur circulus; fore punctum M in peripheria ipſius. Cum ergo CN + NO < CP + PO, *per hypoth.* & CP = CN (§. 38); erit N O < PO (§. 84. *Arithm.*). Sed P O = MO (§. 38 & *per demonſt.*). Ergo NO < MO (§. 81. *Arithm.*), Quare punctum N peripheriæ circuli PNQP cadit intra circulum PMR P, conſequenter circuli ſe mutuo ſecant (§. 50). *Q. e. d.*

PROBLEMA 10.

187. *Super data recta AB triangulum æquilaterum conſtruere.* Tab. I. Fig. 16.

RESOLUTIO.

1. Ex A tanquam centro intervallo ipſius AB deſcribatur arcus *y* &
2. Ex B eodem intervallo alius *x*, (§. 127), qui priorem in C interſecabit (§. 186).

DE-

DEMONSTRATIO.

Etenim AC = AB & BC = AB (§. 38). Ergo AC = BC (§. 79 *Arithm.*). Quare triangulum ABC eſt æquilaterum (§. 84). *Q. e. d.*

PROBLEMA 11.

Tab. I. Fig. 17. 188. *Data baſi DE & crure DF, quod illa dimidia majus ſit, triangulum æquicrurum conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Ex uno baſis extremo D intervallo cruris dati DF deſcribatur arcus &
2. ex altero extremo E eodem intervallo arcus alius (§. 127), qui ob DF + EF > DE *per hypoth. & conſtr.* priorem in F interſecabit (§. 186).
3. Ducantur rectæ DF & EF (§. 117). Dico, DFE eſſe triangulum æquicrurum.

DEMONSTRATIO.

DF = FE, *per conſtr.* Ergo DFE eſt triangulum æquicrurum (§. 85). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

189. Determinatis ergo baſi DE & crure DF totum triangulum æquicrurum determinatur.

COROLLARIUM 2.

190. Duo igitur triangula æquicrura DFE & *dfe* eodem modo determinantur, ſi ſiat DF : DE = *df* : *de* (§. 115) conſequenter ſimilia (§. 116), adeoque ſibi mutuo æquiangula ſunt (§. 168 & 105).

THEOREMA 24.

191. *Duo ſemicirculi CLE & DGF nonniſi in puncto unico G ſe mutuo ſecare poſſunt.* Tab. II. Fig. 45.

DEMONSTRATIO.

Secent enim, ſi fieri poſſit, præterea ſe etiam in L. Ducantur ex centris A & B ad puncta interſectionum L & G rectæ AL, AG, BL, BG; puncta item interſectionum connectantur recta GL (§. 117). Quoniam BL = BG (§. 38); erit BGL = BLG (§. 174). Sed BGL > AGL (§. 76 *Arithm.*): ergo BLG > AGL (§. 81 *Arithm.*). Porro quia AL = AG (§. 38); AGL = ALG (§. 174). Quare BLG > ALG (§. 81 *Arithm.*). quod cum ſit abſurdum (§. 76 *Arithm.*); duo ſemicirculi nonniſi unico in puncto ſe mutuo ſecare poſſunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

192. Ergo duo integri circuli non niſi duobus in punctis ſe mutuo ſecare poſſunt.

THEOREMA 25.

193. *Si in duobus triangulis* ACB *&* acb *fuerit* AC = ac, AB = ab, BC = bc; *etiam* A = a, B = b, C = c, *totaque triangula æqualia ſunt & ſimilia.* Tab. II. Fig. 41.

DEMONSTRATIO.

Ex centro A radio AC deſcriptus concipiatur arcus *y* & ex centro B radio BC alius *x* (§. 127). Concipiamus porro △ *acb* ita poni ſupra △ ACB, ut punctum *a* ſuper A & recta *ab* ſuper AB cadat. Quoniam *ab* = AB, *per hypoth.* punctum *b* ſuper B cadet (§. 163). Et quia *ac* = AC & *bc* = BC, *per hypoth.* recta *ac* in arcu *y* & *bc* in arcu *x* terminabitur (§. 164), conſequenter punctum *c* ſuper C cadet (§. 191) & rectæ *ac*, *bc* rectis AC, BC congruent (§. 17 & 156). Quare *a* = A, *b* = B, *c* = C (§. 161); cumque △ *acb* alteri ACB congruat (§. 3), △ *acb* = & ∽ △ ACB (§. 155) *Q. e. d.*

PROBLEMA 12.

Tab. I. Fig. 38. 194. *Datis tribus lateribus AB, BC, CA, quorum duo ſimul ſumta AC & BC tertio AB majora ſunt; triangulum conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Aſſumta AB pro baſi ex A intervallo ipſius AC deſcribatur arcus *y* &
2. ex B intervallo ipſius BC arcus alius *x* (§. 127), qui ob AC + BC > AB priorem in C ſecabit (§. 186).
3. Ducantur rectæ AC & BC (§. 117). Ita factum eſt, quod petebatur.

COROLLARIUM 1.

195. Cum ex tribus datis rectis nonniſi unicum triangulum conſtrui poſſit (§. 193); determinatis tribus lateribus, totum triangulum determinatur.

COROLLARIUM 2.

196. Quare ſi in duobus triangulis ACB & *acb* fiat AC : AB = *ac* : *ab*, AC : BC = *ac* : *bc*; triangula eodem modo determinantur (§. 115), conſequenter ſimilia (§. 116) adeoque ſibi mutuo æquiangula ſunt (§. 168 & 105).

PROBLEMA 13.

197. *Angulo dato DAE æqualem hac conſtituere.* Tab. II. Fig. 46.

RESOLUTIO.

I. In charta

1. Ex A intervallo AC deſcribatur arcus BC, erit AB = AC (§. 38).
2. Ducatur recta *ac* = AC & ex *a* intervallo ipſius AB deſcribatur arcus *x*, item
3. Ex *c* intervallo ipſius CB alius *y*, qui ob AB + BC > AC ſeu *ab* + *bc* > *ac* (§. 15 *Arithm.*) priorem in *b* interſecabit (§. 186).
4. Ducatur recta *ab* (§. 117).

Dico eſſe *a* = A.

II. In Solo

1. Defigatur baculus in C cum A & E, itemque alius in B cum A & D in eadem recta (§. 121).

2. In

2. In *a* & *c* defigantur baculi ea lege, ut ſit $ac = AC$.
3. Ad eos funis vel catena ita applicetur, ut pars ipſius $ab = AB$ & altera $cb = CB$ fiat.
4. In *b* defigatur baculus.

Dico eſſe $bac = BAC$.

Interdum etiam in ſolo uti licet modo priore.

DEMONSTRATIO.

In utroque caſu $ac = AC$, $ab = AB$, $cb = CB$, *per conſtruct.* Ergo $bac = BAC$ (§. 193). *Q. e. d.*

PROBLEMA 14.

Tab. I. Fig. 7. 198. *Angulum datum HIK in duas partes æquales dividere.*

RESOLUTIO.

1. Ex centro I ducatur radio quocunque arcus LM (§. 127).
2. Ex L & M intervallo dimidia LM majore ducantur arcus ſe mutuo ſecantes in N (§. 186).
3. Ducatur recta IN (§. 117).

Dico eſſe $HIN = NIK$.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim $IL = IM$ (§. 38), $LN = MN$ *per conſtr.* $IN = IN$ (§. 73 *Arithm.*). Ergo $HIN = NIK$ (§. 193). *Q. e. d.*

PROBLEMA 15.

199. *Lineam rectam AB in duas partes æquales dividere & in medio ejus perpendicularem erigere.*

RESOLUTIO.

I. In charta

1. Ex A & B intervallo dimidia AB majore ducantur arcus ſe mutuo in C ſecantes (§. 186).
2. Fiat ſimilis interſectio infra lineam in D (*§. cit.*).
3. Ducatur recta DC (§. 117).

Dico eſſe $AE = EB$.

DEMONSTRATIO.

△ ACB eſt æquicrurum (§. 187). & recta CED dividit angulum ACB bifariam (§. 198). Ergo eadem recta CD dividit AB bifariam in E & ad AB in E perpendicularis, (§. 169). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Ponatur circinus in A & eo usque aperiatur, donec medium lineæ attingere videatur in D. Fig. 51.
2. Intervallum AD transferatur ex B in E: quo facto
3. Non difficile erit determinare punctum medium F.

II. In Solo.

1. Filum longitudini lineæ AB æquale complicetur, ut punctum medium inveniatur.
2. Hoc acicula infixa notetur & lineæ datæ rurſus coextendatur.
3. Ad punctum medium baculus in terra defigatur.

Sic factum eſt, quod petebatur.

SCHOLION.

200. *Duo modi poſteriores equidem ſecandi re-*

di rectam bifariam mechanici dicuntur, non Geometrici, quia tentando res peragitur: illorum tamen in praxi egregius eſt uſus.

PROBLEMA 16.

201. *Ex puncto G in recta ML dato perpendicularem GI excitare.*

RESOLUTIO.

I. In charta.

Tab. II. Fig. 49. 1. Poſito circino in G arbitrario intervallo reſecentur utrinque partes æquales GK & GH.

2. Ex punctis K & H intervallo dimidia KH majore fiat interſectio in I (§. 186).

3. Ducatur recta GI (§. 117), quæ erit ad ML perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Nam KG = GH & KI = IH, *per conſtruct.* IG = IG (§. 73 *Arithm.*). Ergo anguli ad G ſunt æquales (§. 193), conſequenter IG ad ML perpendicularis (§. 76). *Q. e. d.*

RESOLUTIO alia.

Tab. II. Fig. 52. 1. Normæ, hoc eſt, inſtrumenti ex duabus regulis ad angulum rectum junctis compoſiti crus unum ita applicetur ad rectam ML, ut anguli vertex ſupra punctum datum G cadat.

2. Ducatur juxta crus alterum recta FG (§. 117), quæ erit ad ML perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Angulus normæ eſt rectus, *per hypoth.* ſed ipſi æqualis eſt IGL (§. 161): ergo IGL eſt itidem rectus (§. 139), adeoque IG ad ML perperpendicularis (§. 75).

II. In ſolo

Norma utimur majore & juxta crus GI filum extenditur. Aut Tab. II. Fig. 52.

1. Filum KIH in duas partes æquales in I diuiſum ex punctis KIH extenditur & Tab. II. Fig. 49.

2. In I baculus defigitur, tandemque.

3. KH bifariam ſecatur in G (§. 199). Dico eſſe GI ad KH perpendicularem.

DEMONSTRATIO.

Cum KI = HI, & KG = GH, *per conſtruct.* GI = GI (§. 73. *Arith.*). Anguli ad G deinceps poſiti ſunt æquales (§. 193), conſequenter IG ad ML normalis (§. 76). *Q. e. d.*

THEOREMA 26.

202. *Ex uno puncto D ſuper eadem recta AB nonniſi perpendicularis unica CD erigi poteſt in eodem plano.* Tab. III. Fig. 53.

DEMONSTRATIO.

Si fieri poteſt, ſit præterea DE ad idem punctum D perdendicularis, quæ intra crura anguli ADC cadat: erit ADE angulus rectus (§. 75). Et quoniam CD perpendicularis ad AD, *per hypoth.* CDA ſimiliter rectus eſt (§. 75), conſequen-

quenter ADE = ADC (§. 139): quod cum ſit abſurdum (§. 76. *Arithm*), ED ad AB perpendicularis eſſe nequit. *Q. e. d.*

TEOREMA 27.

Tab. III. Fig. 53. 203. *Si perpendicularis CD continuetur in F, erit etiam DF ad DB perpendicularis.*

DEMONSTRATIO.

Ad DB *per hypoth.* angulus *x* rectus eſt (§. 75). Ergo *y* ſimiliter rectus eſt (§. 61), conſequenter DF perpendicularis ad DB (§. 75). *Q. e. d.*

THEOREMA. 28.

Tab. III. Fig. 54. 204. *Si duo puncta H & Q alicujus rectæ HI a duobus punctis K & L alterius rectæ MN utrinque æqualiter diſtent; erit HI ad MN perpendicularis.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam puncta H & Q utrinque a punctis K & L æqualiter diſtant, *per hypoth.* HK = HL & QK = QL (§. 181). Eſt vero etiam QH = QH (§. 73. *Arithm.*). Ergo *o* = *x* (§. 193), conſequenter cum HI = HI (§. *cit. Arithm.*), anguli ad I æquales (§. 169), adeoque HI ad MN perpendicularis (§. 76). *Q. e. d.*

PROBLEMA 17.

Tab. III. Fig. 54. 205. *A dato puncto H ad rectam MN penpendicularem HI demittere.*

RESOLUTIO.

I. In charta

1. Poſito circino in H intervallo arbitrario, eodem tamen interſecetur MN in K & L.
2. Ex K & L fiat interſectio in Q (§. 186).
3. Ducatur per Q recta HI (§. 117). Hæc erit ad MN perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Quoniam KH = LH & KQ = LQ, *per conſtruct.* puncta H & Q a punctis K & L utrinque æqualiter diſtant (§. 181). Ergo HI ad MN perpendicularis (§. 204). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Applicetur norma ad lineam datam ML; ita ut crus unum eandem ſtringat: alterum vero punctum datum I attingat. Tab. II. Fig. 52.
2. Ducatur recta GI [§. 117], quæ ad ML, perpendicularis erit.

DEMONSTRATIO.

Eadem eſt, quæ in caſu ſimili problematis 16 [§. 201].

II. In ſolo

Aut utimur norma majore, ut in probl. 16. aut Tab. III. Fig. 54.

1. Fune ex H extenſo deſignantur puncta K & L & in iis baculi defiguntur.
2. Intervallum KL dividitur bifariam in I [§. 199].

Dico, baculos in H & I defixos per perpendicularem HI deſignare.

DEMONSTRATIO.

Quoniam KH = LH & KI = LI, *per conſtruct.* HI = HI (§. 73. *Arithm.*); anguli ad I ſunt æquales [§. [193], adeoque HI ad MN perpendicularis [§. 76]. *Q. e. d.*

THEOREMA 29.

Tab. III. Fig. 56. 206. *Ab uno puncto H ad eandem rectam LM nonniſi unica perpendicularis HI duci poteſt.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur, ſi fieri poteſt, adhuc alia HK ad LM itidem perpendicularis, quoniam $o > x$ [§. 177]; x vero rectus eſt [§. 75], quia HI ad LM perpendicularis, *per hypoth.* erit o recto major: quod cum ſit abſurdum [§. 75], a puncto I ad LM nonniſi unica perpendicularis duci poteſt. *Q. e. d.*

THEOREMA. 30.

Tab. III. Fig. 56. 207. *In omni triangulo rectangulo HIK angulus nonniſi x rectus eſt; reliqui H & K ſunt acuti.*

DEMONSTRATIO.

Angulus y rectus eſt [§. 287]. Sed $y > m$, item $> H$ [§. 177]. Ergo K & H ſunt recto minores adeoque acuti [§. 62] *Q. e. d.*

COROLLARIUM. 1.

208. Angulorum igitur maximus in triangulo rectangulo eſt rectus.

COROLLARIUM 2.

209. In triangulo rectangulo latus maximum eſt hypothenuſa (§. 91. 1; 8].

THEOREMA. 31.

210. *In triangulo obtuſangulo PNO angulus obtuſus nonniſi unicus eſt, reliqui P & O ſunt acuti.* Tab. I. Fig. 20.

DEMONSTRATIO.

$y + x = 2$ rectis [§. 141]. Sed y, utpote obtuſus *per hypoth.* major recto [§. 62]. Ergo x recto minor. Quoniam vero $x > O$, item $> P$ [§. 177]; erunt O & P multo magis recto minores, adeoque acuti [§. 62]. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

211. In triangulo obtuſangulo angulorum maximus eſt obtuſus.

COROLLARIUM 2.

212. Ergo latus maximum, quod obtuſo opponitur (§. 178).

THEOREMA. 32.

213. *Linea perpendicularis HI eſt breviſſima omnium, quæ a puncto H ad eandem rectam LM duci poſſunt.* Tab. III. Fig. 56.

DEMONSTRATIO.

Producatur HI in N (§. 19), donec IN = HI. Et ducatur alia quæcunque obliqua HK (§. 117). Quoniã porro HI perpendicularis ad LM, *per hypoth.* adeoque x = u (§. 76), & præterea KI = KI (§. 73. *Arithm.*); erit HK = KN (§. 169).

Sed

Sed HK + KN > HN (§. 179). Ergo ½ (HG + KN) > ½ HN (§. 172. *Arithm.*), hoc eſt HK > HI. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

214. Ergo diſtantia puncti a linea vel plano eſt recta ab illo puncto ad lineam vel planum perpendicularis (§. 14).

COROLLARIUM 2.

Tab. III. Fig. 58. 215. Quare ſi linea HI fuerit ipſi KL parallela, erunt perpendicula quævis ex illa in hanc demiſſa GE, AB, CD inter ſe æqualia & contra (§. 78).

COROLLARIUM 3.

216. Altitudo figuræ eſt perpendiculum ex vertice in baſin demiſſum (§. 111).

COROLLARIUM 4.

Tab. I. Fig. 19. 217. In triangulo rectangulo angulus K rectus (§. 87) & hinc cathetus unus MK ad alterum KL perpendicularis (§. 75). Ergo ſi KL ſumatur pro baſi, erit M vertex (§. 110), adeoque MK altitudo (§. 216).

COROLLARIUM 5.

Tab. I. Fig. 21. 23. 218. Similiter in quadrato & oblongo latus unum cum altero efficit rectum C vel K (§. 94. 97), adeoque unum ad alterum perpendiculare (§. 75). Quod ſi ergo latus unum CD vel IK ſumatur pro baſi; erit A vel L vertex (§. 110), conſequenter AC vel LK altitudo (§. 216).

THEOREMA 33.

219. *Si HI fuerit parallela &* BA *perpendicularis ad KL; erit eadem* AB *etiam perpendicularis ad HI.* Tab. III. Fig. 58.

DEMONSTRATIO.

Fiat EB = BD & erigantur ex E & D perpendiculares EG & DC (§. 201); erit GE = CD (§. 215) & E = D (§. 75. 139), conſequenter BG = BC & $y = u$ (§. 169). Sed quoniam AB perpendicularis ad KL, *per hypoth.* ideo $u + x = o + y$ (§. 76). Ergo & $x = o$ (§. 83. *Arithm.*). Quare cum porro ſit AB = AB (§. 72. *Arithm.*); erit & m = n (§. 169), adeoque BA ad HI perpendicularis (§. 76). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

220. Sunt ergo EG, AB, CD diſtantiæ tum rectæ KL a recta HI, tum rectæ HI a recta KL (§. 214), adeoque ſi HI parallela ipſi KL, etiam KL parallela eſt ipſi HI [§. 78].

THEOREMA 34.

221. *Parallelæ* AB *&* EF *eidem tertiæ* CD *ſunt etiam parallelæ inter ſe.* Tab. III. Fig. 59.

DEMONSTRATIO.

Ducantur GI & KM perpendiculares ad CD [§. 205]: erunt eædem perpendiculares ad EF [§. 203. 219]. Ergo GH = KL & HI = LM [§. 215], conſequenter GH +

HI

HI = KL + LM [§. 80. *Arithm.*], hoc eſt, GI = KM [§. 78. *Arithm.*], adeoque AB parallela ipſi EF [§. 214. 78]. *Q. e. d.*

THEOREMA 35.

Tab. III. Fig. 60. 222. *Si duas parallelas* AB *&* CD *ſecet transverſa* EF *in* G *&* H, *erunt 1. anguli alterni* y *&* u *æquales; 2. angulus externus* x *æquatur interno oppoſito* u; 3. *duo interni oppoſiti* o *&* u *ſunt æquales duobus rectis;*

DEMONSTRATIO.

Si recta EF ſecet parallelas AB & CD ad angulos rectos, omnia manifeſta ſunt per theorema 33 (§. 219). Si vero oblique ſecet; ducantur perpendiculares GI & HK (§. 201). Producatur GI in M & HK in L (§. 19), donec fiat IM = GI & KL = HK.

1. Quoniam GI perpendicularis ad CD *per conſtruct.* erunt anguli ad I æquales (§. 76). Porro GI = IM *per conſtr.* & IH = IH (§. 73 *Arithm.*). Ergo HG = HM & *u* = z (§. 169). Eodem modo oſtenditur eſſe HG = GL & *y* = *t*. Quamobrem & GL = HM [§. 79 *Arithm.*]. Eſt vero etiam HK = GI [§. 215] & hinc HK + KL = GI + IM [§. 80 *Arithm.*], hoc eſt, HL = GM [§. 78 *Arithm.*] & GH = GH [§. 73 *Arithm.*]: Unde *t* + *y* = *u* + z [§. 193]. Cum itaque *t* = *y* & *u* = z, *per demonſtrata*: erit *y* = *u* [§. 86 *Arithm.*]: *Quod erat primum.*

2. *x* = *y* [§. 150] & *u* = *y* [*per n.* 1.]. Ergo *x* = *u* [§. 79 *Arithm.*]: *Quod erat alterum:*

3. *x* + *o* = 180° [§. 142]. Sed *x* = *u* [*per num.* 2.]. Ergo *u* + *o* = 180° (§. 80 *Arithm.*]. *Quod erat tertium.*

THEOREMA 36.

223. *Perpendicula KH & GI æquales parallelarum partes KG & HI intercipiunt.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam HM = GL & *n* + z = *t* + *y per demonſtr. n* 1 *theor. præc*, HG = HG (§. 73 *Arithm.*]; erit etiam *n* = *m* [§. 169], conſequenter ob IM = LK, *per demonſtr. n.* 1. *theor. præc.* IH = KG [§. 169]. *Q. e. d.* Tab. III. Fig. 60.

THEOREMA 37.

224. *Si trianguli cujuscunque* ACB *latus unum* AC *continuetur in* D; *erit angulus externus* DCA *æqualis duobus internis oppoſitis y & z ſimul ſumtis.* Tab. III. Fig. 61.

DEMONSTRATIO.

Ducatur CE baſi AB parallela, erit *x* = *y* & *o* = z [§. 222], conſequenter *x* + *o* = *y* + z [§. 80 *Arithm.*]. *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA 38.

Tab. III. Fig. 61. 225. *In quovis triangulo ACB tres anguli* y, u, z *junctim ſumti ſunt æquales duobus rectis ſeu* 180°.

DEMONSTRATIO.

Nam $o + x = y + z$ (§. 224). Ergo $o + x + u = y + z + u$ (§. 80 *Arithm.*). Sed $o + x + u = 180°$ (§. 142): ergo $y + z + u = 180°$ (§. 79 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

Tab I. Fig. 19. 226. In triangulo igitur rectangulo MKL duo anguli obliqui M & L junctim ſumti efficiunt rectum ſeu 90° adeoque ſemirecti ſunt, ſi fuerit æquicrurum (§. 174).

COROLLARIUM 2.

227. Si unus angulus eſt obliquus, duo reliqui ſimul ſumti conficiunt itidem obliquum (§. 62).

COROLLARIUM 3.

Fig. 16. 228. In triangulo æquilatero ACB quilibet angulus eſt 60°; nimirum 180 : 3 (§. 176).

COROLLARIUM 4.

229. Cum itaque in triangulo rectangulo neceſſario angulus unus ſit rectus (§. 87); triangulum rectangulum æquilaterum eſſe nequit.

COROLLARIUM 5.

230. Si unus trianguli angulus ex 180° ſubtrahitur, ſumma duorum reliquorum relinquitur; &, ſi ſumma duorum ex 180° aufertur, reſiduus ſit tertius.

COROLLARIUM 6.

231. Si duo anguli unius trianguli æquentur duobus alterius ſive ſigillatim, ſive junctim; etiam tertius unius æqualis eſt tertio alterius.

COROLLARIUM 7.

232. In quovis triangulo anguli ad baſin *y* & *z* junctim ſumti ſunt duobus rectis minores. Tab. III. Fig. 61.

COROLLARIUM 8.

233. Quoniam in triangulo æquicruro DFE anguli ad baſin *y* & *u* æquales ſunt (§ 174), ſi angulus ad verticem F ſubtrahitur a 180° & reſiduum biſecatur, unus angulorum æqualium *y* vel *u* prodit. Similiter ſi duplum anguli unius ad baſin *y* a 180° ſubtrahitur, angulus ad verticem F relinquitur. Tab. I. Fig. 17.

PROBLEMA 18.

234. *In extremitate F lineæ FG perpendicularem FH excitare.* Tab. III. Fig. 62.

RESOLUTIO.

1. Super FG conſtruatur △ æquilaterum FIG (§. 187).
2. Producatur GI in H (§. 19), donec fiat HI = GI.
3. Ducatur recta HF (§. 117): quæ erit ad FG perpendicularis.

DEMONSTRATIO

Quoniam △ FIG eſt æquilaterum, *per conſtr.* $o = 60°$ & $u = 60°$ (§. 228).

(§. 228). Ergo $y = 120°$ (§. 224); conſequenter ob FI = HI *per conſtr.* $x = 30°$ (§. 233). Cum adeo $x + o = 90°$; angulus ad F rectus (§. 148) & HF ad FG perpendicularis eſt (§. 75). *Q. e. d.*

THEOREMA 39.

Tab. III. Fig. 63. 235. *Si recta DE ſecet rectam AB in C; non alibi eandem denuo ſecabit.*

DEMONSTRATIO.

Occurrat enim, ſi fieri poteſt, recta DE alteri AB in alio adhuc puncto, e. gr. in A: erunt rectæ ADCE puncta duo A & C in recta altera AB, conſequenter recta ADCE tota ſupra AB cadit (§. 17) atque adeo eam non ſecat (§. 48): quod cum hypotheſi repugnet, DE non alibi, quam in C, ipſam AB ſecare poteſt. *Q. e. d.*

THEOREMA 40.

Tab. II. Fig. 41. 236. *Si in duobus triangulis* ABC *&* abc *fuerit* AB = ab, A = a *&* B = b; *erit etiam* AC = ac, BC = bc, C = c & Δ ACB = & ∽ Δ acb.

DEMONSTRATIO.

Concipiamus Δ *abc* poni ſupra alterum ABC, ita ut punctum *a* ſuper A & recta *ab* ſuper AB cadat. Quoniam *ab* = AB, *a* = A & *b* = B, *per hypoth.* punctum *b* ſuper B (§. 163), recta *ac* ſuper AC & *bc* ſuper BC (§. 161); conſequenter *c* ſuper C (§. 235) cadit. Cum adeo Δ *abc* alteri ABC congruat (§. 3); erit *ac* = AC *bc* = BC, c = C (§. 168) & Δ *abc* = & ∽ Δ ABC (§. 155). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

237. Si in duobus triangulis ACB & *acb* fuerit A = *a*, B = *b* & BC = *bc*; erit etiam C = *c* (§. 231), conſequenter AC = *ac*, AB = *ab* & Δ ACB = Δ *acb* (§. 236).

THEOREMA 41.

238. *Si in triangulo DFE anguli ad baſin y & u æquales; triangulum eſt æquicrurum.* Tab. II. Fig. 41.

DEMONSTRATIO.

Secet FG angulum F bifariam (§. 198); erit DF = FE (§. 237). Eſt ergo Δ DFE æquicrurum (§. 85). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

239. Si ergo tres anguli fuerint æquales; æquilaterum eſt (§. 84). Fig. 42.

THEOREMA 42.

240. *Si duas lineas AB & CD ſecet transverſa EF in G & H, ita ut vel* 1. y = u; *vel* 2. x = u; *vel* 3. o + u = 180°; *erunt lineæ iſtæ inter ſe parallelæ.* Tab. III. Fig. 60.

DE-

DEMONSTRATIO.

1. Demittantur ex H & G perpendiculares HK & GI (§. 201); erit K = I (§. 75. 139). Eſt vero & *y* = *u, per hypoth.* & HG = HG (§. 73 *Arithm.*). Quare HK = GI (§. 237), conſequenter cum HK & GI ſint diſtantiæ linearum AB & CD (§. 214); lineæ AB & CD ſunt inter ſe parallelæ (§. 78). *Quod erat primum.*

2. *x* = *u*, *per hypoth.* *x* = *y* (§. 150). Ergo y = x (§. 79 *Arithm.*), conſequenter AB & CD ſunt inter ſe parallelæ, *per num. 1.* *Quod erat ſecundum.*

3. o + u = 180°, *per hypoth.* Sed o + x = 180° (§. 142). Ergo u = x (§. 83 *Arithm.*), conſequenter AB & CD ſunt inter ſe parallelæ, *per num. 2.* *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM.

Tab. III. Fig. 58. 241. Quodſi EG & AB fuerint perpendiculares ad eandem tertiam HI ſiatque AB = GE; erit EB ipſi GA parallela (§. 215), conſequenter EB = GA (§. 223), adeoque y = u (§. 193). Quare EG ipſi AB parallela (§. 240).

THEOREMA 43.

Tab. III. Fig. 64. 242. *Parallelæ DF & GA inter eaſdem parallelas FA & DG ſunt æquales. Et contra ſi DF & GA fuerint parallelæ & æquales; erit etiam FA ipſi DG parallela & æqualis.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur recta DA (§. 117): erit *x* = *y* & *o* = *u* (§. 221). Quare cum AD = AD (§. 73 *Arithm.*) DF = GA (§. 236). *Quod erat unum.*

FD = AG, *per hypoth.* & *o* = *u* (§ 212) & DA = DA (§. 73 *Arith.*). Ergo *x* = *y* (§. 169), conſequenter FA ipſi DG parallela (§. 240) adeoque etiam æqualis *per num. 1.* *Quod erat alterum.*

PROBLEMA 19.

243. *Per datum punctum V parallelam rectæ RS ducere.* Tab. III. Fig. 65.

RESOLUTIO.

I. In charta

1. Ex V demittatur perpendicularis IK (§. 205).
2. Ex puncto quolibet T erigatur perpendicularis TA = KV (§. 201).
3. Per V & A ducatur recta MN, quæ erit ipſi R S parallela.

DEMONSTRATIO.

Quoniam VK & AT perpendiculares ad RS, & inter ſe æquales, *per conſtr.* recta MN ab altera RS, ubique æqualiter diſtat (§. 214), conſequenter ipſi parallela eſt (§. 78). *Q. e. d.*

R 2 *Aliter.*

Aliter.

1. Regula ad rectam RS applicetur & circinus intervallo VK aperiatur.
2. Crus unum circini juxta ductum regulæ ab R verſus S promoveatur.

Ita crus alterum per V parallelam ipſi RS deſcribet.

DEMONSTRATIO.

Tab. III. Fig. 65. Eadem fere eſt, quæ proxime præcedens.

Aliter.

1. Per datum punctum V ducatur utcunque recta RG.
2. In V fiat $o = x$ (§. 197).

Erit VN ſeu MN parallela ipſi RS (§. 240).

Aliter.

Tab. III. Fig. 66. Ex modo præcedente enatus eſt ſequens.

1. Triangulum rectangulum AVN ex ligno ebenino aut alio Indico paratum ita applicetur ad rectam RS, ut baſis ejus VN parti ipſius congruat.
2. Hypothenuſæ ejusdem Trianguli AV applicetur regula RG quæ altera manu in hoc ſitu immota detineatur.
3. Triangulum AVN juxta ductum regulæ promoveatur, donec baſis punctum V attingat.

Erit enim in quovis ſitu baſis VN ob $y = x$ ipſi RS parallela (§. 240). *Q. e. d.*

Aliter.

Utimur interdum *Paralleliſmo*, ex duabus regulis ligneis potius, quam orichalceis (§. 118) AB & CD, compoſito, quæ ejusdem ubique latitudinis retinaculis EF & GH inter ſe æqualibus ita conjunguntur, ut variis intervallis diduci queant. Nimirum Tab. III. Fig. 67.

1. Regula una debite applicetur ad rectam RS.
2. Altera ad datum punctum V adducatur &
3. Juxta hujus ductum recta AB per V ducatur: quæ erit ipſi RS parallela.

DEMONSTRATIO.

Ducatur obliqua linea EH (§. 117). Quoniam EG = FH, EF = GH *per conſtr.* & EH = EH (§. 73 *Arith.*); erit $o = x$ (§. 193) adeoque FH parallela ipſi EG (§. 243). Sed AB ipſi EG & RS ipſi FH parallela, *per conſtr.* Ergo AB parallela ipſi RS (§. 221). *Q. e. d.*

II. In campo

Commode utimur modo primo antecendentium, vel Tab. III. Fig. 68.

1. In puncto quolibet K defigatur baculus cum aliis in R & S defixis in eadem recta (§. 121).
2. Ad V fiat $o = x$ (§. 197).

Erit MU, quæ facile produci poteſt

teſt in N (§. 121), ipſi RS parallela (§.240).

Aliter.

Tab. III. Fig. 68. 1. In punctis K & T defigantur baculi cum aliis in R & S defixis in eadem recta (§. 121).

2. Fiat u = x & TA = VK (§. 197).

3. In M & N defigantur baculi cum aliis in V & A defixis in eadem recta (§. 121).

Erit MN parallela ipſi RS.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $x = u$ *per conſtr.* erit TA parallela ipſi KV (§.240), conſequenter $z = y$ (§. 222). Eſt vero etiam TA = KV, *per conſtruct.* & TV = TV (§. 73 *Arithm.*). Ergo $m = n$ (§. 169), conſequenter MN parallela ipſi RS (§. 240). *Q.e.d.*

SCHOLION.

244. *Si paralleliſmis crebro utaris, retinacula continuo affrictu nimis efforantur & a rectitudine nimis cito recedunt ipſi paralleliſmi: Huic malo præſens remedium attulit* Jacobus Leupoldus, *artifex inſignis, qui retinacula ex geminis lamellis Orichalceis elaſticis, in medio firmiter connexis, & capita clavorum, quibus regulis affiguntur, conica parare ſolet. Notum vero eſt, orichalcum ad elaſticitatem usque vehementi contuſione indurari.*

THEOREMA 44.

Tab. III. Fig. 69. 245. *Per idem punctum C eidem rectæ DE parallela nonniſi unica AB duci poteſt.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur enim ſi fieri poteſt adhuc alia HG, priorem ſecans in C, cujus adeo pars GC efficit cum parte alterius CB angulum BCG. Ex I erigatur perpendicularis IL (§. 201); erit tum IK ad CG, tum IL ad CB, perpendicularis (§.219), conſequenter anguli CKL & CLK recti (§. 75. 203): quod cum ſit abſurdum (§. 207), per C nonniſi AB ipſi DE parallela duci poteſt. *Q. e. d.*

THEOREMA 45.

246. *Si recta NO ſecet duas re-* Tab.
ctas alias HG & DE in C & Q, ita III.
ut duo anguli interni oppoſiti HCO Fig.
& DQN fuerint ſimul ſumti duobus 69.
rectis majores; lineæ HG & DQ verſus eam plagam divergunt.

DEMONSTRATIO.

Ducatur ACB parallela ipſi DE per C (§. 243); tum angulus ACO cum angulo DQN efficiet duos rectos (§. 222). Sed HCO & DQN ſimul ſunt duobus rectis majores, *per hypoth.* Ergo HCO > ACO (§. 84 *Arithm.*), conſequenter AC intra ſpatium HCQD cadit. Erigatur perpendicularis PS (§. 201): erit PR = CF (§. 215), conſequenter PS > PR (§. 76 *Arithm.*) < CF (§. 81 *Arithm.*). Diſtantiæ igitur rectarum HC & DQ verſus H & D creſcunt (§. 214), adeoque lineæ

HC & DQ verſus eam plagam divergunt (§. 81). *Q. e. d.*

THEOREMA 46.

Tab. III. Fig. 69. 247. *Si duas rectas HG & DE ſecet transverſa NO in C & Q, ita ut anguli GCO & EQN ſimul ſumti ſint duobus rectis minores; lineæ CG & QE verſus eam plagam convergunt.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur AB parallela ipſi DE per C (§. 243): tum angulus BCQ cum angulo EQN efficiet duos rectos (§. 222). Sed GCO & EQN ſimul ſumti ſunt duobus rectis minores *per hypoth.* Ergo GCO < BCO, (§. 84 *Arithm.*), conſequenter CB extra ſpatium GCQE cadit. Demittantur perpendiculares LI & CF (§. 205); erit CF = IL (§. 215), conſequenter IK < IL (§. 76 *Arithm.*) < CF [§. 81 *Arith.*]. Diſtantiæ igitur rectarum CG & QE decreſcunt verſus G & E [§. 214], adeoque lineæ CG & QE verſus eam plagam convergunt [§. 80]. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

248 Si anguli GCQ & EQN ſimul ſumti fuerint duobus rectis minores; erunt ipſi deinceps poſiti duobus rectis majores (§. 141). Quare lineæ, quæ verſus unam plagam convergunt (§. 247), verſus oppoſitam divergunt (§. 246).

PROBLEMA 20.

249. *Datis recta AB & angulis adjacentibus, A & B, qui junctim ſumti duobus rectis minores ſunt, triangulum ABC deſcribere.* Tab. I. Fig. 18.

DEMONSTRATIO.

1. Ad datam rectam AB excitentur anguli dati A & B [§. 149].
2. Crura AC & BC continuentur, donec ſibi mutuo occurrant in C [§. 232. 247]. ABC triangulum erit deſideratum.

COROLLARIUM 1.

250. Data ergo linea una datisque duobus angulis, triangulum determinatur.

COROLLARIUM 2.

251. Quare ſi in duobus triangulis fiat A = *a* & B = *b*; triangula eodem modo determinantur [§. 115], adeoque ſimilia ſunt [§. 116]. Tab. II. Fig. 41.

COROLLARIUM 3.

252. Si in duobus triangulis fuerit A = *a* & B = *b*; conſequenter in rectangulis unus obliquorum in uno æqualis uni in altero [§. 139]; erit etiam C = *c* [§. 231], hoc eſt, ΔΔ ACB & *acb* ſibi mutuo æquiangula [105]. Quare ΔΔ ſibi mutuo æquiangula ſimilia ſunt [§. 251] & hinc latera homologa ſeu æqualibus angulis oppoſita proportionalia habent [§. 168].

THEO-

THEOREMA 47.

Tab. III. Fig. 70. 253. *Si in Triangulo ABC recta DE baſi AC parallela ducatur,* erit BA:BC = BD:BE = AD:EC & BA:AC = BD:DE, atque △BDE ∽ △BAC.

DEMONSTRATIO.

Quoniam DE parallela ipſi AC, erit $y = x$ & $u = o$ (§. 221), adeoque △BDE ∽ △BAC & BA : BC = BD : BE & BA : AC = BD : DE [§. 252]. Ergo & BA : BD = BC : BE [§. 164 *Arithm.*] conſequenter AD : BD = EC : BE [§. 183 *Arithm.*] ſeu BD : AD = BE : EC [§. 160 *Arithm.*], vel denique BD : BE = AD : EC [§. 164 *Arithm.*) *Q. e. d.*

THEOREMA 48.

Tab. I. Fig. 254. *Recta FH angulum GFE bifariam ſecans baſin GE cruribus adjacentibus EF & GF proportionaliter ſecat.*

DEMONSTRATIO.

Producatur EF in I [§. 19], donec fiat FI = GF, erit $o + x = y + u$ [§. 224]. Sed $o = x$, *per hypoth.* & $y = u$ (§. 174). Ergo $o = y$ [§. 86 *Arithm.*]; conſequenter HF ipſi GI parallela [§. 240]. Quare EF : EH = FI : GH [§. 253] = GF : GH [§. 157 *Arithm.*]. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

255. Eſt ergo & EF : GF = EH : GH [§. 164 *Arithm.*], conſequenter EF + FG : EF = GE : EH [§. 181 *Arithm.*] ſeu EF + FG : GE = EF : EH [§. 164 *Arithm.*]. *Q. e. d.*

PROBLEMA 21.

256. *Datis tribus lineis* AB, AC *&* BD, *invenire quartam proportionalem.* Tab. III. Fig. 72.

RESOLUTIO.

1. Ducatur angulus non nimis acutus FAG pro arbitrio.
2. Ex A in B transferatur linearum datarum prima; ex A in C altera; ex B in D tertia.
3. Ducatur recta BC [§. 117].
4. In D conſtituatur angulus ipſi ABC æqualis [§. 197].

Dico, eſſe AB : AC = BD : CE.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $o = x$, *per conſtr.* erit BC ipſi DE parallela [§. 240]. Quamobrem AB : AC = BD : CE [§. 253]. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

257. Quodſi duabus lineis AB & AC datis tertia inveniri debet; etiam BD ipſi AC æqualis fieri, hoc eſt, AC bis poni debet. Erit nimirum AB : AC = AC : CE.

COROLLARIUM 2.

258. Si DB ſumatur pro unitate; reſpondebit CE exponenti rationis AC : AB [§. 131 *Arithm.*).

PRO-

PROBLEMA 22.

Tab. IV. Fig. 73. 259. *Datam rectam* AB *in quotcunque partes æquales dividere.*

RESOLUTIO.

1. Ex recta CD pro arbitrio aſſumta reſecentur tot partes æquales, in quot data AB dividenda, e. gr. 5.
2. Super harum partium intervallo conſtruatur triangulum æquilaterum CED [§. 187].
3. Ex E in *a* transferatur recta AB, itidemque ex E in b.
4. Ducatur recta AB : ducantur itidem aliæ ex E in 1.2.3.&c.

Dico eſſe $ab = AB$, $a1 = \frac{1}{5} AB$, $A2 = \frac{2}{5} AB$ &c.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $Ea = Eb$ & $EC = ED$, *per conſtruct.* erit $Ea : Eb = EC : ED$. [§. 139 *Arithm*] Quare cum angulus E utrique triangulo ECD & E*ab* communis ſit : erit $EC : CD = Ea : ab$ & $o = x$ [§. 173]. Sed $EC = CD$, *per conſtruct.* Ergo $Ea = ab$. *Quod erat unum.*

Quoniam $o = x$, *per demonſtr.* erit *a* 1 parallela ipſi C 1 [§. 240], conſequenter $EC : C1 = Ea : a1$ [§. 253], hoc eſt, ob $EC = CD$, *per conſtruct.* & $Ea = ab$, *per demonſtr.* $CD : E1 = ab : a1$ [§ 157 *Arithm.*]. Sed $C1 = \frac{1}{5} CD$, *per conſtruct.* Ergo $a1 = \frac{1}{5} ab$ (§. 139 *Arithm.*) *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

260. Quodſi ergo CD fuerit utcunque diviſa in 1 & 2; eodem modo recta *a b* ſecabitur in eadem ratione. Eſt nempe $CD : C1 = ab : a1$, $CD : C2 = ab : a2$ &c. Tab. IV. Fig. 74.

SCHOLION.

261. *Corollarii hujus uſus ampliſſimus eſt in architectura tam civili, quam militari, præſertim ubi ichnographia vel amplianda, vel contrahenda.*

PROBLEMA 23.

262. *Scalam Geometricam conſtruere.* Tab. IV. Fig. 75.

RESOLUTIO.

1. Ducatur recta AF & in eam transferantur partes 10 æquales B 1, 1.2, 2.3, 3.4 &c. intervallum vero 10 partium AB totidem ex B in E, ex E in F &c. quoties libuerit.
2. In A excitetur perpendicularis AC, arbitrariæ longitudinis, in partes 10 æquales diviſa (§. 234).
3. Per puncta diviſionum 1. 2. 3. 4. 5 &c. agantur parallelæ cum AF (§ 243).
4. In ultimam CD transferantur partes 10 partibus ipſius AB æquales.
5. Tandem puncta 10 & 9, 9 & 8, 8, & 7 &c. lineis transverſis connectantur (§. 117).

Dico, ſi AB fuerit decempeda, fore B1, 1.2, 2.3, 3.4 &c. pedes, 9.9 digitum

gitum unum, 8. 8 digitos duos, 7. 7 tres, 6. 6 quatuor &c.

DEMONSTRATIO.

B 1 = 1. 2 = 2. 3 &c = $\frac{1}{10}$ AB, *per conſtruct.* Sed pes eſt decempedæ pars decima (§. 23). Ergo cum AB ſit decempeda, *per hypoth.* erunt B 1, 1. 2, 2. 3 &c. pedes. *Quod erat unum.*

Porro quia 9, 9 eſt parallela ipſi A 9, *per conſtruct.* C. 9 : CA = 9. 9 : A 9 (§. 253). Sed C 9 = $\frac{1}{10}$ CA, *per conſtruct.* Ergo 9. 9 = $\frac{1}{10}$ A 9 (§. 139 *Arithm.*). Quare cum A 9 ſit pes, *per demonſtr.* erit 9. 9 digitus (§. 23). Eodem modo oſtenditur eſſe 8. 8 duos, 7. 7 tres &c. digitos. *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

263. *Quemadmodum hic linea exigua* A 9 *in 10 partes æquales dividitur; ita eadem in quotcunque alias eodem artificio dividi poteſt. Neque opus eſt, ut angulus A ſit rectus; ſed idem obliquus eſſe poteſt.*

COROLLARIUM.

264 Quodſi ergo circini crus unum collocatur in I & alterum in K, erit intervallum IK = 1° 4′ 5″ & ita porro.

PROBLEMA 24.

Tab. IV. Fig. 76. 265. *Invenire diſtantiam duorum locorum AB, quorum unus B tantum accedi poteſt.*

RESOLUTIO.

1. Baculo ad arbitrium in E defixo, recta BE transferatur ex E in C, ita ut baculus in C defixus ſit cum E & B in eadem recta (§. 121).
2. In C conſtituatur angulus ECF ipſi B æqualis (§. 197).
3. Tandem ex C progrediendum verſus D, donec baculus in D defixus ſit cum F & C, itemque cum E & A in eadem recta (§. 121).

Dico eſſe DC = BA.

DEMONSTRATIO.

Nam BE = EC, o = x, *per conſtruct.* & y = u (§. 150). Ergo AB = DC (§. 236). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Defigatur baculus in I cum B & A in eadem recta (§. 121), itidemque alius utcunque in K. Tab. IV. Fig. 77.
2. Ex K in L transferatur IK, in M vero KB.
3. Denique ex K progrediendum in N, donec baculus ibi defixus ſit cum M & L, itidemque cum K & A in eadem recta (§. 121).

Dico eſſe MN = BA.

DEMONSTRATIO.

BK = KM & IK = KL, *per conſtruct.* o = u, (§. 150). Ergo IB = ML & y = x (§. 169). Quare cum ſit o + m = u + n (§. 150), & IK = KL, *per conſtr.* erit IA = NL (§. 236), conſequenter AB = NM (§. 83 *Arith.*) *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. IV. Fig. 78. 1. Menſula Geometrica in C collocata per dioptra collineetur in A & B, ducanturque rectæ *ac* & *cb*.

2. Quæratur diſtantia ſtationis a loco acceſſo (§. 122) &

3. Ex ſcala Geometrica in *ca* transferatur (§. 264).

4. Translocetur menſula in A, ita ut punctum *a* ipſi A immineat & per dioptra regulæ ad *ac* applicatæ baculus in prima ſtatione C defixus conſpiciatur.

5. Mox collineatio in B fiat, ducaturque *ab*.

6. Denique in Scala Geometrica capiatur intervallum ipſius *ab* (§. 264).

Ita diſtantia quæſita AB innoteſcet.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $c = C$ & $a = A$ (*per conſtruct.* & §. 161); erit $ac : ab = AC : AB$ (§. 252), hoc eſt, iidem numeri rationes $ac : ab$ & $AC : AB$ indigitant (§. 139 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. IV. Fig. 78. 1. Baculo in C defixo inveſtigetur quantitas angulorum A & C (§. 146), itemque longitudo ipſius AC (§. 122).

2. Ope inſtrumenti transportatorii & ſcalæ Geometricæ conſtruatur triangulum *acb* (§. 249).

3. Ad ſcalam Geometricam applicetur recta *ab* (§. 264).

Ita diſtantia AB innoteſcet.

DEMONSTRATIO.

Eadem eſt, quæ proxime præcedens.

PROBLEMA 25.

266. *Metiri diſtantiam duorum locorum inacceſſorum* AB.

RESOLUTIO.

Sine inſtrumentis tædioſior eſt problematis reſolutio, quam ut commendari poſſit. Cui tamen volupe fuerit eandem experiri, is Tab. IV. Fig. 76.

1. Statione in E aſſumta rectas BE & AE inveniat (§. 265).

2. His datis reperiet DC ipſi BA æqualem (§. 183).

Aliter.

Tab. IV. Fig. 79. 1. Duabus ſtationibus in C & D electis in prima C collocetur menſula & per dioptra collineetur in D, B & A, ducanturque juxta regulæ, cui affiguntur, ductum rectæ *cd*, *cb*, *ca*.

2. Quæratur diſtantia ſtationum CD (§. 122) &

3. Ex ſcala Geometrica transferatur in *cd* (§. 264).

4. Baculo in C defixo menſula collocetur in D ea lege, ut punctum *d* ipſi D, hoc eſt puncto, in quo defigebatur ante baculus, immineat & per dioptra regulæ ad

cd

cd applicatæ reſpicienti baculus in C occurrat.

5. Hinc porro collineatio fiat in A & B ducanturque rectæ *da* & *db*.

6. Tandem diſtantia punctorum *a* & *b* inveſtigetur in ſcala Geometrica (§. 264).

Dico eſſe *cd* : *ab* = CD : AB.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim *cdb* = CDB & *bcd* = BCD (*per conſtruct.* & §. 161). Ergo *dc* : *cb* = DC : CB (§. 252), cum eodem modo oſtendatur eſſe, ob △ *adc* ∽ △ ABC, *dc* : *ac* = DC : AC; erit etiam *bc* : *ac* = BC : AC (§. 167 *Arithm.*), conſequenter ob *acb* = ACB (*per conſtr.* & §. 162) *ac* : *ab* = AC : AB (§. 173) & ob *dc* : *ac* = DC : AC *per demonſtr.* *dc* : *ab* = DC : AB (§. 168 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. IV. Fig. 80. 1. Electis duabus ſtationibus C & D inveſtigetur quantitas angulorum *y* & *x*, item *z* & *w* (§. 149), quorum ſummæ dant angulos C & D (§. 78 *Arithm.*).

2. Quæratur porro diſtantia ſtationum, CD (§. 122) &

3. Ducatur in charta linea recta, in quam ex ſcala Geometrica transferatur recta *cd* ipſi CD reſpondens (§. 264).

4. Super ea ope angulorum *x* & D conſtruatur triangulum *bcd* & ope angulorum *z* & C alterum *acd* (§. 249).

5. Tandem in ſcala Geometrica inveſtigetur diſtantia punctorum *a* & *b* (§. 264).

Dico eſſe *ab* : *cd* = AB : CD.

DEMONSTRATIO.

Eadem eſt cum proxime præcedente.

SCHOLION 1.

267. *Levi attentione patet, non abſimili methodo ex duabus ſtationibus reperiri diſtantias plurium locorum.*

SCHOLION 2.

268. *Nec minus manifeſtum eſt, menſulæ ſitum in iſtiusmodi operationibus horizontalem eſſe debere: id quod obtinetur ope perpendiculi Q.* Tab. IV. Fig. 81.

PROBLEMA 26.

269. *Altitudinem acceſſam* AB *metiri.*

RESOLUTIO.

1. Baculus DE tantæ longitudinis ſumatur, ut terræ perpendiculariter infixus altitudinem oculi adæquet. Tab. V. Fig. 82.

2. Humi proſtratus baculum ad calces pedum perpendiculariter terræ infigi cura (§. 117).

3. Quodſi contingat, ut E & B ſint cum oculo C in eadem recta; erit CA = AB: ſin punctum inferius F cum E & oculo in eadem recta fuerit, propius cum baculo ad

lo ad altitudinem AB provolvaris opus eſt; ſin punctum ſuperius, procul recedendendum, donec prædicta conditio adimpleatur.

4. Tandem diſtantiam oculi C ab altitudine AB metiaris neceſſe eſt (§. 122).

Dico eſſe CA = AB.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim AB (§. 216) & ED *per conſtruct.* ad AC perpendiculares; inter ſe parallelæ ſunt (§. 241), adeoque CD : DE = CA : AB (§. 253). Sed CD = DE, *per hypoth.* Ergo CA = AB (§. 139 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. V. Fig. 83. 1. In diſtantia plurium e. gr. 30, 40 & amplius pedum defigatur perpendiculariter baculus DE & aliquo hinc intervallo in C alius minor, ita ut cum oculo in F conſtituto E & B ſint in eadem recta.

2. Inveſtigetur diſtantia baculorum GF & baculi minoris ab altitudine quæſita HF, itemque differentia altitudinum baculorum GE [§. 122].

3. Quæratur ad GF, GE & HF quarta proportionalis BH [§. 272 *Arithm.*].

4. Huic addatur altitudo baculi minoris FC.

Dico ſummam eſſe altitudinem AB.

E gr. Sit HF = 48′, GF = 20′, GE 16′, FC = 5″.

20 — 16 — 48 5) 192 ($38\frac{2}{5}$ = BH
5 4 4 15 5 = FC
192 42. $43\frac{2}{5}$ = AB

DEMONSTRATIO.

Cum HF ipſi AC parallela ſupponatur, ſintque BA [§. 216] & ED *per conſtr.* ad AC perpendiculares; erunt eædem perpendiculares ad HF [§. 219] adeoque GE & BH parallelæ [§. 241], conſequenter GF : GE = HF : AB [§. 253]. *Quod erat unum.*

Porro cum HA & FC ſint perpendiculares inter eaſdem parallelas HF & AC, [*per conſtr.* & §. 216]; erit FC = HA [§. 215]. Quare BH + FC = BH + HA [§. 80 *Arithm.*] = BA [§. 78 *Arithm.*]. *Q. e. d.*

Aliter. Tab. V. Fig. 84.

1. Menſula in D verticaliter erigatur, ita ut latus ipſius FE ſit horizonti parallelum: id quod obtinetur ope perpendiculi Q. Tab. IV. Fig. 81.

2. Ducatur recta *ef* lateri menſulæ parallela, & regula cum dioptris ad hanc applicata vertatur menſula, donec collineatio in altitudinem quæſitam fiat.

3. Cir-

3. Circa punctum *e* vertatur regula, donec oculo per dioptra tranſpicienti apex altitudinis A occurrat, ducaturque recta *eb*.
4. Quæratur diſtantia ſtationis ab altitudine *e*C (§. 122) &
5. Ex Scala Geometrica minore transferatur ex *e* in *c* (§. 264):
6. Ex *c* erigatur perpendiculum *bc* (§. 201), quod
7. Ad Scalam Geometricam applicatum (§. 264) partem altitudinis A|C manifeſtat.
8. Addatur altitudo BC.

Dico, ſummam eſſe altitudinem AB.

DEMONSTRATIO.

Qnoniam AC perpendicularis ad BD (§. 216) & Ce ipſi BD parallela *per conſtr.* erit eadem AC perpendicularis ad CE (§. 219). Sed ad eandem etiam *bc* perpendicularis, *per conſtr.* Ergo *bc* ipſi AC parallela (§. 241), conſequenter *ec* : *cb* = EC : CA (§. 253) : *quod erat unum.*

Eſſe autem DE = BC, patet ex demonſtratione præcedente: *Quod erat alterum.*

Aliter.

1. Inveſtigetur quantitas anguli E (§. 146) & diſtantia ſtationis EC (§. 122).
2. Super *ec* in Scala Geometrica minore aſſumta (§. 264) conſtruatur triangulum ad *c* rectangulum *cbe* (§. 249).
3. Reliqua fiant ut ante.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim *c* = C & *e* = E, *per conſtruct.* Ergo *ec* : *cb* = EC : CB (§. 252). *Q. e. d.*

SCHOLION.

270. *In omnibus iſtis reſolutionibus ſupponitur planities perfecte horizontalis: quæ cum rariſſime in praxi occurrat, ſi notabilis fuerit declivitas, non tam inſtrumenti altitudo, quam ipſa CB addenda, in altitudine acceſſa facile inveſtiganda. Neceſſe etiam eſt, ut baculi, quantum fieri poteſt, exactiſſime ad horizontem perpendiculariter infigantur & in inſtrumentis praſcripta ratione collocandis cura maxima adhibeatur: Immo altitudo BC eodem modo inveſtigari poteſt, quo ipſam AC invenimus.*

PROBLEMA 27.

271. *Altitudinem inacceſſam AB metiri.* Tab. V. Fig. 83.

RESOLUTIO.

Sine inſtrumentis prolixa eſt operatio. Nimirum

1. Diſtantia ſtationis CA vel FH quæritur per problema 24. (§. 265).
2. Reliqua fiunt, ut in problemate præcedente [§. 269].

Aliter.

1. Statione in D electa menſula collocetur ut in problemate præcedente (§. 269). Tab. V. Fig. 85.

 2. Du-

2. Ducantur ut ibidem rectæ ef & af.

3. Baculi in E defixi, ut ſit in recta fC, quæratur diſtantia a puncto f (§. 122) &

4. Ex ſcala Geometrica transferatur in fe (§. 264).

5. Sub puncto f defigatur baculus & menſula ita collocetur in G, ut punctum e ipſi G immineat & per dioptra regulæ ad ef applicatæ reſpicienti baculus prope D occurrat.

6. Vertatur regula circa punctum e, donec per dioptra proſpiciens apicem A videat, ducaturque recta ea.

7. Ex puncto a demittatur ac ad fc perpendicularis (§. 205): quæ

8. Ad Scalam Geometricam (§. 264) applicata prodit altitudinem AC.

9. Quodſi puncta B, E, D fuerint in eadem recta, addatur altitudo puncti f ut habeatur AB; ſin minus, regula circa e vertatur, donec per dioptra deſpiciens videat B, ducatur eb, perpendiculum ac continuetur donec ipſi eb in b occurrat. Etenim ab in Scalam Geometricam translata manifeſtabit AB.

DEMONSTRATIO.

In ΔΔ enim fea & FeA f = F & e = E, *per conſtruct.* Ergo fe : ea = Fe : eA (§. 252). Porro AC & ac perpendiculares ad e C (per §. 216 *&* *conſtr.*) adeoque inter ſe parallelæ (§. 241). Quare a e : a c = Ae : AC (§. 253), conſequenter fe : ac = Fe : AC (§. 184 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Quoniam ab parallela ipſi AB *per demonſtrata*; erit ae : ab = Ae : AB (§. 253), conſequenter fe : ab = Fe : AB (*per demonſtr.* *&* §. 184 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

Aliter.

1. Inveſtigetur quantitas anguli AFC in D & anguli AeC in G itemque CeB in eadem ſtatione G (§. 146). Tab. V. Fig. 85.

2. Quæratur diſtantia FC (§. 122).

3. Conſtruatur ex his datis juxta Scalam modicam triangulum aef (§. 249).

4. Demittatur ex vertice a in baſin continuatam perpendicularis ac (§. 205) indefinite producenda.

5. Fiat angulus ceb ipſi CeB æqualis (§. 197) & producatur crus eb donec perpendiculari ab in b occurrat (§. 19).

Dico eſſe fc : ab = FC : AB.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum præcedente.

CA-

CAPUT IV.

De

CIRCULI SYMPTOMATIS

THEOREMA 49.

Tab. I. Fig. 5. 272. *Circuli ſe intus tangentes ſunt eccentrici.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam circulus unus alterum intus tangit, *per hypoth.* ille totus intra hujus peripheriam continetur. Quare ſi ex centro ejus C ducatur in peripheriam majoris recta CN (§. 117); ea peripheriam majoris in M ſecabit (§. 48) eritque adeo radius minoris CM pars ipſius CN (§. 9 *Arithm.*). Quodſi jam C ponatur centrum commune circulorum; erit CL = CM & CL = CN (§. 38), adeoque CM = CN (§. 79 *Arithm.*): quod cum ſit abſurdum (*per demonſtr.* & §. 76 *Arith.*); circuli idem centrum habere nequeunt. Sunt ergo eccentrici (§. 42). *Q. e. d.*

THEOREMA 50.

Tab. V. Fig. 86. 275. *Duo circuli ſe mutuo ſecantes ſunt eccentrici.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam circulus x, alterum z ſecat, *per hypoth.* pars illius intra hunc cadit (§. 50). Ducatur itaque ex C centro circuli x radius CB, qui continuatus ad peripheriam circuli z ſecabit peripheriam illius in B (§. 48) eritque CB pars ipſius CE (§. 9 *Arithm.*). Quodſi C ponatur centrum etiam circuli z; erit CB = AC & CE = AC (§. 38), adeoque CB = BE (§. 79 *Arithm.*). Quod cum ſit abſurdum (*per demonſtr.* & §. 76 *Arithm.*); circuli x & z idem centrum habere nequeunt. Sunt ergo eccentrici (§. 42). *Q. e. d.*

THEOREMA 52.

274. *In eodem vel in æqualibus circulis chordæ æquales AB & DE æquales arcus ſubtendunt: & contra.* Tab. V. Fig. 87.

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB = DE *per hypoth.* BC = CE & AC = DC (§. 38); ACB = DCE (§. 193), conſequenter arcus AB & DE æquales ſunt (§. 135). *Quod erat primum.*

Si arcus AB & DE æquales ſunt, *per hypoth.* ACB = DCE (§. 135). Eſt autem porro BC = CE & AC = CD (§. 38). Ergo AB = DE (§. 169). *Quod erat alterum.*

THEO-

THEOREMA 52.

Tab. V. Fig. 87. 275. *Si in circulis inæqualibus arcus AB & ab fuerint ſimiles, chordæ cognomines ad ſuos radios AC & ac eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam arcus AB & *ab* ſimiles ſunt, *per hypoth.* ACB = *acb* (§. 135). Eſt vero AC : BC = *ac* : *bc* [§. 38 *Geom.* & §. 139 *Arithm.*]. Ergo AB : BC = *ab* : *bc* [§. 173]. *Q. e. d.*

THEOREMA. 53.

Tab. V. Fig. 88. 276. *Radius CE chordam* BA *bifariam ſecans in* D *etiam arcum bifariam ſecat in E & ad chordam* AB *perpendicularis: & contra.*

DEMONSTRATIO.

AD = DB, *per hypoth.* AC = CB [§. 38] & DC = DC (§. 73 *Arithm.*]. Ergo *o* = *x* & *y* = *u* [§. 193], conſequenter CE ad AB perpendicularis in D [§. 76] & arcus AE atque EB æquales ſunt [§. 135]: *Quod erat primum.*

Sint arcus AE & EB æquales *per hypoth.* erit y = u (§. 135). Eſt vero etiam AC = CB (§. 38) & DC = DC (§. 73 *Arithm.*). Ergo AD = DB & *o* = *x* (§. 169), conſequenter CD ad AB perpendicularis (§. 76). *Quod erat ſecundum.*

Sit denique radius CE perpendicularis ad chordam AB in D *per hypoth.* erit *o* = *x* (§. 76). Eſt vero etiam AC = CB (§. 38) & hinc *m* = *n* (§. 174), conſequenter *y* = *u* (§. 231). Quare arcus AE & EB æquales ſunt (§. 135) & AD = DB (§. 236). *Quod erat tertium.*

THEOREMA 54.

277. *Si recta NE chordam AB bifariam ſecet & ad eam perpendicularis fuerit; per centrum tranſit & tam arcum* AEB, *quam* ANB *bifariam ſecat.* Tab. V. Fig. 88.

DEMONSTRATIO.

Quoniam ND perpendicularis ad AB, *per hypoth.* erit *o* = *x* (§. 76). Eſt vero etiam AD = DB *per hypoth.* & ND = ND (§. 73 *Arithm.*). Ergo AN = NB (§. 169), conſequenter arcus cognomines æquales ſunt (§. 274). Eodem modo oſtenditur, arcus AE & EB æquales eſſe. *Quod erat unum.*

Arcus AN = NB & AE = EB, *per demonſtr.* Ergo NA + NE = NB + BE (§. 80 *Arithm.*) conſequenter NE diameter circuli (§. 131), adeoque per centrum tranſit (§. 37). *Quod erat alterum.*

PROBLEMA 28.

278. *Datum arcum* AB *in duas partes æquales dividere.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur ad punctum medium F chordæ AB perpendicularis (§. 196);

196): hæc arcum AB bifariam ſecabit (§. 277). *Q. e. f. & d.*

Tab. V. Fig. 89.

PROBLEMA 29.

279. *Per data tria puncta non in directum jacentia A, B & C circulum deſcribere.*

RESOLUTIO.

1. Ex A & C fiant interſectiones in D & E itemque aliæ duæ G & H ex C & B.
2. Ducantur rectæ DE & HG (§. 117).

Dico I eſſe centrum circuli per A, C & B deſcribendi [§. 122).

DEMONSTRATIO.

Puncta A, C & B ſunt in peripheria alicujus circuli, *per hypoth.* atque adeo rectæ AC & CB chordæ (§. 36). Sed ED ad AC, GH ad BC perpendicularis & ED ipſam AC, GH vero BC bifariam ſecat (§. 199). Ergo utraque per centrum tranſit (§. 277). Quare cum DE & GH tantum in I ſe mutuo ſecent (§. 235); erit I centrum circuli, per puncta data A, C & B tranſeuntis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

280. Aſſumtis in peripheria vel arcu circuli tribus punctis, centrum inveniri datusque arcus perfici poteſt.

COROLLARIUM 2.

281. Si tria puncta unius peripheriæ tribus punctis alterius congruant; peripheriæ totæ congruunt: atque adeo circuli æquales ſunt (§. 155).

COROLLARIUM 3.

282. Omne triangulum eſt circulo inſcriptibile (§. 112).

THEOREMA 55.

283. *In eodem vel æqualibus circulis chordæ æquales AB & DE a centro C æqualiter diſtant: & contra.* Tab. V. Fig. 87.

DEMONSTRATIO.

Quoniam diſtantiæ FC & CG chordarum AB & DE a centro C ſunt ad chordas perpendiculares (§. 214): erit $o = x$ (§. 76. 138), $u = n$ (§. 276. 135) &, ob AB = DE, *per hypoth.* AF = DG (§. 276. *Geom.* & §. 172 *Arithm.*). Ergo FC = GC (§. 237). *Quod erat unum.*

Quodſi diſtantiæ FC & CG fuerint æquales, *per hypoth.* erit $o = x$ & $u = n$, *per demonſtr.* conſequenter AF = DG (§. 236). Sed AF = $\frac{1}{2}$ AB & DG = $\frac{1}{2}$ DE (§. 276). Ergo AB = DE (§. 170 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 56.

284. *Chordarum maxima eſt diameter AB.* Tab. I. Fig. 7.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim CO = BC & CN = CA [§. 38]. Sed CO + CN > ON [§. 179].

(§. 179). Ergo BC + CA hoc eſt, BA $>$ ON (§. 81 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 57.

Tab. V. Fig. 90. 285. *Si intra triangulum ACB ſupra ejusdem baſi AB conſtruatur aliud triangulum ADB; erunt crura interioris AD & DB ſimul ſumta minora cruribus exterioris AC & CB ſimul ſumtis; angulus vero ad verticem interioris D major angulo ad verticem exterioris C.*

DEMONSTRATIO.

Quia AE $<$ AC + CE (§. 179); AE + EB $<$ AC + CE + EB (§. 82 *Arithm.*), hoc eſt, AD + DE + EB $<$ AC + CB (§. 78. 81 *Arithm.*). Sed DB $<$ DE + EB (§. 179). Ergo AD + DB $<$ AC + CB. *Quod erat unum.*

Quoniam $o = x + y$ & $u = m + n$ (§. 224); $o > x$ & $u > m$ (§. 76 *Arithm.*). Ergo $o + u > x + m$ (§. 82. 18 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 58.

Tab. V. Fig. 91. 286. *Chorda arcus majoris AB major eſt, chorda minoris AD minor.*

DEMONSTRATIO.

EB + EC $>$ BC (§. 179), hoc eſt, quia DE + EC = BC (§. 38), EB + EC $>$ DE + EC [§. 81 *Arithm.*] conſequenter EB $>$ DE [§. 84 *Arithm.*]. Eſt vero AE + DE $>$ DA (§. 179). Ergo AE + EB $>$ DA, (§. 81 *Arithm.*) hoc eſt, AB $>$ DA [§. 78 *Arithm.*]. *Q. e. d.*

THEOREMA 59.

287. *Secantium MA, MN, ME ex eodem puncto M ductarum maxima eſt MA, quæ per centrum tranſit; reliquæ ſunt tanto minores, quo a centro remotiores. Contra earundem portiones extra circulum MD, MO, MB ſunt tanto majores, quo magis a centro diſtant; minima eſt MB ſecantis MA per centrum transeuntis.* Tab. II. Fig. 7.

DEMONSTRATIO.

1. NC + MC $>$ MN [§. 179]. Sed NC = CA [§. 38]. Ergo CA + CM, hoc eſt, MA [§. 78 *Arithm.*], $>$ MN [§. 81 *Arithm.*] *Quod erat primum.*

2. MO + EO $>$ ME [§. 179]. Sed NO $>$ EO [§. 286]. Ergo MO + ON, hoc eſt, MN [§. 78 *Arithm.*] $>$ ME. *Quod erat ſecundum.*

3. CO + OM $>$ MC [§. 179]. Sed CO = CB [§. 38]. Ergo OM $>$ MB [§. 84 *Arithm.*]. *Quod erat tertium.*

4. CD + DM $>$ CO + OM [§. 285]. Sed CD = CO [§. 38]. Ergo DM $>$ OM [§. 84 *Arithm.*]. *Quod erat quartum.*

THEOREMA 59.

288. *Si ex puncto E intra circulum* Tab. V. Fig. 92.

lum aſſumto ducantur in peripheriam rectæ EF, EB, GE &c. item EA, ED, EH &c. maxima erit EF, quæ per centrum C tranſit, reliquæ BE, GE &c. tanto majores, quo maximæ propiores. Contra minima eſt EA, quæ continuata per centrum tranſit: reliquæ ED, EH &c. ſunt tanto majores, quo ab ea remotiores.

DEMONSTRATIO.

1. $EC + BC > EB$ [§. 179]. Sed $BC = FC$ (§. 38). Ergo $EC + FC$, hoc eſt, EF [§. 78 *Arithm.*] $>$ EB, (§. 81 *Arithm.*). *Quod erat primum.*

2. $EI + GI > GE$ & $IB + IC > BC$ (§. 179), hoc eſt, ob $BC = GI + IC$ (§. 38), $IB + IC > GI + IC$ (§. 81 *Arithm.*), adeoque $IB > GI$ (§. 84 *Arithm.*). Quare $EI + IB$, hoc eſt, BE (§. 78 *Arithm*) $<$ GE. *Quod erat alterum.*

3. $EC + ED > DC$ (§. 179). Sed $CD = EC + EA$ (§. 38). Ergo $EC + ED > EC + EA$ (§. 81 *Arithm.*), conſequenter $ED > EA$ (§. 84 *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

4. $EK + KD > ED$ & $KH + KC > CH$ (§ 179), hoc eſt, ob $CH = CK + KD$ (§. 38) $KH + KC > KC + KD$ (§. 81 *Arithm.*), adeoque $KH > KD$ (§. 84 *Arithm.*). Quare $EK + KH$, hoc eſt, EH (§. 78 *Arithm.*), $>$ ED. *Quod erat quartum.*

THEOREMA 60.

289. *Recta IL radio CL perpendiculariter inſiſtens tangit circulum in unico puncto L: nec inter tangentem HL & circulum alia recta duci poteſt.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur enim quælibet alia CK (§. 117). Quoniam L eſt rectus (§. 75); K erit acutus (§. 207). Ergo $CK > CL$ (§. 209), conſequenter quodlibet punctum K a L diverſum, hoc eſt tota linea LI ſeu HI extra circulum cadit (§. 38), & ideo circulum tangit in unico puncto L (§. 45). *Quod erat unum.* Tab. I. Fig. 3.

Ducatur deinde, ſi fieri poteſt, inter tangentem HL & circulum recta ML. Demittatur ex centro C perpendicularis CD (§. 201); erit D rectus (§. 75) adeoque $CL > CD$ (§. 209). Cadit itaque D intra circulum (§. 38): quod cum hypotheſi repugnet (§. 45), inter tangentem & circulum per contactum tranſiens recta alia duci nequit. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM 1.

290. Angulus igitur contactus tangente HL & arcu ML interceptus eſt quovis rectilineo minor: angulus vero Semicirculi inter radium CL & ar-

cum ML interceptus eſt quovis recti-lineo acuto major.

SCHOLION.

291. *Hoc paradoxum* Euclidis *exercuit Mathematicorum ingenia. Agitata eſt de eo controverſia inter* Jacobum Peletarium *Cenomani in Gallia Matheſeos Profeſſorem &* Chriſtophorum Clavium *Jeſuitam Bambergenſem: quorum ille angulum contactus rectilineo heterogeneum recte* (§. 30 Arithm.) *agnovit, quemadmodum linea eſt ſuperficiei heterogenea; hic vero contrarium defendit. Peculiarem de angulo contactus & ſemicirculi Tractatum conſcripſit* Walliſius*, qui legitur Operum Vol. II f. 605 & ſeqq. ubi cum aliis Geometris ſummis* Peletarii *ſententiam probat.*

COROLLARIUM 2.

292. Circulum in eodem puncto L nonniſi unica recta HI tangere poteſt.

THEOREMA 61.

293. *Omnis recta HI circulum tangens radio CL ad punctum contactus ducto perpendicularis eſt.*

DEMONSTRATIO.

Tab. I. Fig. 8. Ponamus IL non eſſe ipſi CL perpendicularem. Ergo ex C duci poterit CK ad HI perpendicularis (§. 201) hæcque extra circulum cadet (§. 45), conſequenter CK > CN (§. 76 *Arithm.*) > CL (§. 38 *Geom.* & §. 81 *Arithm.*). Eſt vero etiam CK < CL (§. 213): quod cum ſit abſurdum, tangens IL radio CL ad contactum perpendicularis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

294. Tangens IL efficit cum radio CL in puncto contactus rectum (§. 75).

COROLLARIUM 2.

295. Si HI circulum tangat & ex centro C ad eam perpendicularis CL demittatur (§. 201) punctum contactus L determinatur.

PROBLEMA 30.

296. *Ducere rectam HI circulum in dato puncto L tangentem.* Tab. I. Fig. 3.

RESOLUTIO.

1. Ex centro circuli C ad punctum contactus L ducatur radius CL.
2. In L excitetur perpendicularis LH, (§. 234) quæ circulum in L tanget (§. 293). *Q. e. f. & d.*

THEOREMA 62.

297. *Arcus FG & HI inter chordas parallelas intercepti ſunt æquales.* Tab. V. Fig. 91.

DEMONSTRATIO.

Demittatur CK ex centro C perpendicularis ad FH (§. 201): erit eadem perpendicularis ad GI [§. 219] ob FH & GI *per hypoth.* parallelas, dividetque adeo tam arcum FKH, quam GKI bifariam in K [§. 276]. Quare KF − GK = KH − KI, hoc eſt, FG = HI [§. 83 *Arithm.*]. *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA 63.

Tab. I. Fig. 13. 298. *Angulus ad centrum ACB eſt duplus anguli ad peripheriam ABD, eidem arcui AD inſiſtentis.*

DEMONSTRATIO:

I. Ducatur EF per centrum C ipſi BD parallela [§. 243], erit EB = DF [§. 297], adeoque o = x [§. 145]. Sed o = y (§. 150). Ergo x = y [§. 79 *Arithm.*] = $\frac{1}{2}$ ACD. Porro o = u [§. 222]. Ergo o = y = $\frac{1}{2}$ ACD [§. 79 *Arithm.*]. *Quod erat primum.*

Tab. V. Fig. 93. II. In caſu altero o = 2y & u = 2x *per caſ. 1.* Ergo x + o = 2x + 2y [§. 80 *Arithm.*] hoc eſt, ABD = $\frac{1}{2}$ ACD. *Quod erat ſecundum.*

Fig. 94. III. In caſu tertio o + u = 2y + 2x *per caſ. 1.* & o = 2y *per caſ. 1.* Ergo u = 2x [§. 83 *Arithm.*]. *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM 1.

Tab. I. Fig. 13. 299. Anguli ad centrum ACD menſura cum ſit arcus AB (§. 55): erit dimidius FD menſura ejus ad peripheriam ABD.

COROLLARIUM 2.

Tab. I. Fig. 14. 300. Duo vel plures anguli HLI & HMI eidem arcui HI vel æqualibus arcubus inſiſtentes æquales ſunt (§. 135).

COROLLARIUM 3.

Tab. I. Fig. 14. 301. Quare cum porro ſit o = x + u (§. 224); erit anguli extra centrum menſura dimidium arcuum HI & LM, quibus ipſe & ejus verticalis K inſiſtunt.

COROLLARIUM 4.

302. Cum angulus in Semicirculo ACB ſemicirculo inſiſtat *per hypoth.* menſura ejus eſt circuli quadrans (§. 299), adeoque ipſe rectus eſt [§. 137]. Tab. V. Fig. 95.

COROLLARIUM 5.

303. Cum angulus in majore ſegmento DIF arcui minori DF, quam eſt quadrans circuli, inſiſtat (§. 54.), menſura ejus eſt ſemiquadrante minor [§. 299], adeoque ipſe recto minor [§. 137], conſequenter acutus [§. 62]. Tab. V. Fig. 96.

COROLLARIUM 6.

304. Non abſimili ratione liquet, angulum in minore ſegmento HIK eſſe obtuſum. Tab. V. Fig. 96.

COROLLARIUM 7.

305. Quoniam o = x + y (§. 224) & anguli o menſura eſt $\frac{1}{2}$ LM, anguli y vero $\frac{1}{2}$ NO (§. 299); anguli extra peripheriam G menſura eſt differentia inter dimidium arcum concavum LM, cui inſiſtit & dimidium convexum NO inter crura interceptum. Tab. VI. Fig. 97.

PROBLEMA 31.

306. *Normam examinare, utrum exacta ſit nec ne.* Tab. VI. Fig. 98.

 RESO-

RESOLUTIO.

1. Deſcribatur intervallo arbitrario ſemicirculus AEF &
2. Ducantur in eo ex diametri utroque extremo A & F ad punctum E in peripheria arbitrario aſſumtum rectæ AE & EF.
3. Cruribus anguli AEF ita applicetur norma, ut ejus vertex ſuper E cadat. Hoc enim ſi fieri poteſt; erit norma exacta.

DEMONSTRATIO.

Tum enim angulus normæ LEM æqualis eſt angulo AEF (§. 161), adeoque rectus (§. 302), conſequenter norma exacta (§. 201). *Q. e. d.*

THEOREMA 64.

Tab. VI. Fig. 99. 307. *Menſura anguli minoris ſegmenti ATB eſt dimidium arcus TDB; anguli vero majoris ſegmenti BTH dimidium arcus majoris BGT.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur ex puncto contactus T diameter EF; erit ATE rectus (§. 293). Cum adeo ejus menſura ſit arcus dimidius EBT (§. 131. 137), anguli vero BTE dimidius arcus EB (§. 299); erit anguli ATB menſura dimidius arcus BDT. *Quod erat unum.*

Eodem modo patet, cum dimidius Semicirculus EGT ſit menſura anguli ETH (§. 131. 137) & dimidius arcus EB menſura anguli BTE (§. 299), eſſe dimidium arcum BGT menſuram anguli BTH. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM 1.

308. Cum anguli G menſura etiam ſit dimidius arcus BDT, ipſius D vero arcus dimidius BGT (§. 299); angulus in majore ſegmento G æqualis eſt angulo minoris ſegmenti ATB & angulus in minore ſegmento D æqualis eſt angulo majoris ſegmenti BTH (§. 74).

COROLLARIUM 2.

309. Si chorda GT ultra circulum continuetur in F; erit anguli BTF menſura ſemiſumma arcuum TB & TG a chordis cognominibus ſubtenſorum. Nam ATF = GTH (§. 150). Ergo ejus menſura dimidius arcus TG (§. 307). Eſt vero anguli ATB menſura arcus dimidius TB (§. cit.). Quare ſemiſumma eorundem arcuum eſt menſura anguli BTF. Tab. VI. Fig. 99.

COROLLARIUM 3.

310. Si LM & MN ſint tangentes ex eodem puncto ductæ; erit angulorum MLN & MNL menſura arcus dimidius LN (§. 307), conſequenter anguli ipſi ſunt æquales (§. 135) & ideo LM = MN [§. 238]. Tab. VI. Fig. 100.

COROLLARIUM 4.

311. Quia angulorum L, M & N men-

menſura eſt ſemicirculus (§. 225. 137), angulorum vero L & N junctim ſumtorum arcus LN (§. 307); erit anguli M a duabus tangentibus LM & NM intercepti menſura differentia arcus intercepti LN a ſemicirculo.

PROBLEMA 32.

Tab. VI. Fig. 101. 312. *Inter duas lineas AB & BE mediam proportionalem BD invenire.*

RESOLUTIO.

1. Jungantur lineæ datæ AB & BE in directum dividaturque AE bifariam in C (§. 199).
2. Ex C intervallo ipſius AC deſcribatur ſemicirculus ADE (§. 132).
3. Ex B erigatur perpendicularis BD (§. 201).

Dico eſſe AB : BD = BD : BE.

DEMONSTRATIO.

Quoniam BD perpendicularis ad AE, *per conſtruct.* m & n ſunt anguli recti (§. 75). Sed o + x eſt itidem rectus (§. 302) & y utrique triangulo ABD & ADE communis. Ergo o = z [§. 231], conſequenter y = x [§. *cit.*], & tunc AB : BD = BD : BE [§. 252]. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

313. Cum ſit AB : BD = BD : BE; ex data Sagitta AB & dimidia chorda BD invenitur diameter (§. 272 *Arith.*).

Sit e. gr. AB = 80″, BD = 300″; erit BE = 1125‴, adeoque AB + BE = AE = 1925″ ſeu fere 19′.

COROLLARIUM 2.

314. Ex demonſtratione una liquet, Δ rectangulum ADE per lineam perpendicularem DB ex angulo recto D in hypothenuſam AE demiſſam reſolvi in duo triangula ABD & BDE inter ſe & toti ADE ſimilia [§. 252].

COROLLARIUM 3.

315. Cum adeo etiam ſit AB : AD = AD : AE (§. *cit.*); ſi lineæ fuerint majores, una datarum ex A in B, altera ex A in E transfertur, factisque reliquis ut in reſolutione problematis erit AD media proportionalis quæſita.

COROLLARIUM 4.

316. Si ergo AB ſit unitas, erit BD radix ipſius BE, aut AD ipſius AE (§. 226 *Arithm.*).

THEOREMA 65.

317. *Si duæ chordæ HM & LI ſe mutuo ſecent in K; erit HK : LK = KI : KM.* Tab. I. Fig. 14.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim x = x & u = u (§. 300); ideo HK : LK = KI : KM (§. 252). *Q. e. d.*

THEOREMA 66.

318. *Si fuerint duæ ſecantes GL & GM ex eodem puncto G ductæ; erit GM : GL = GN : GO.* Tab. VI. Fig. 97.

DE-

DEMONSTRATIO.

Angulus *x* eſt utrique triangulo GNO & GLM communis. Anguli GNO menſura eſt ſemiſumma arcuum NL & NO (§. 309). Sed anguli OML menſura eſt ſemiſumma eorundem arcuum (§. 299). Quare GNO = OML (§. 135), conſequenter GM : GL = GN : GO (§. 252). *Q.e.d.*

Tab. VI. Fig. 102.

THEOREMA 67.

319. *Si ex eodem puncto A ducantur duæ rectæ AD & AB, quarum altera circulum tangit, altera ſecat; erit tangens AD media proportionalis inter totam ſecantem AB & ejus portionem extra circulum.*

DEMONSTRATIO.

Angulus A eſt utrique triangulo ACD & ABD communis. Anguli ADC & ABD æquales ſunt (§. 308). Ergo AC : AD = AD : AB (§. 252). *Q.e.d.*

CAPUT V.

De

FIGURARUM DESCRIPTIONE.

THEOREMA 68.

Tab. VI. Fig. 103.

320. *Quadratum rectangulum, Rhombus & Rhomboides ſunt parallelogramma, diagonalis ea dividit in duas partes æquales, anguli in iis diagonaliter oppoſiti ſunt æquales, anguli vero ad idem latus oppoſiti duobus rectis æquantur & duo latera ſimul ſumta ſunt diagonali majora.*

DEMONSTRATIO.

In omnibus iſtis figuris ON = PQ & OP = QN [§. 94. 95. 96. 97]. Sed PN = PN [§. 73 *Arithm.*]. Ergo △NOP = △NQP, y = u, n = m & x = o (§. 193), conſequenter ON ipſi PQ & OP ipſi NQ parallela (§. 240), adeoque OPQN eſt parallelogrammum (§. 98). *Quod erat primum, ſecundum & tertium.*

Quoniam latera parallelogrammorum oppoſita ſunt parallela (§. 98); anguli ad idem latus oppoſiti N & Q ſimul ſumti æquantur duobus rectis (§. 222): *quod erat quartum.*

PROBLEMA 33.

Ta[b.] VI Fi[g.] 10[4.]

321. *Super data recta CD quadratum conſtruere.*

RESO-

RESOLUTIO.

1. In C erigatur perpendicularis AC (§. 234).
2. Ex D & A intervallo ipſius CD fiat interſectio in B (§. 320. 186).
3. Ducantur AB & DB.

DEMONSTRATIO.

AC = CD = AB = BD, *per conſtr.* Ducta ergo diagonali AD, patet eſſe C = B (§. 193). Sed C rectus eſt, *per conſtr.* Ergo B etiam rectus (§. 139), conſequenter o & x, item y & m ſemirecti (§. 226), adeoque o + y & x + m itidem recti. Quare figura eſt quadratum (§. 94). *Q. e. d.*

Aliter.

1. In C & D erigantur perpendiculares CA & DB ipſi CD æquales (§. 234. 201).
2. Ducatur recta AB.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim CA = DB = CD, *per conſtr.* & anguli ad D & C ſunt recti (§. 75) adeoque BA parallela ipſi DC (§. 215), conſequenter anguli A & B ſunt recti (§. 222) & ob parallelas AB & CD (§. 241) AB = CD (§. 223.). Eſt igitur ABCD Quadratum (§. 94). *Q. e. d.*

PROBLEMA 34.

322. *Datis duabus rectis MI & IK rectangulum parallelogrammum conſtruere.*

RESOLUTIO. Tab. VI. Fig. 105.

1. Jungantur MI & IK ad angulos rectos (§. 234).
2. Ex M intervallo ML = IK deſcribatur arcus & ex K intervallo KLIM alius priorem interſecans in L (§. 320. 186).
3. Ducantur rectæ ML & KL.

DEMONSTRATIO.

MI = KL & ML = IK, *per conſtruct.* Quare ducta diagonali MK, patet eſſe I = L, o = n & x = m (§. 193). Sed I eſt rectus, *per conſtr.* Ergo & L (§. 139), item o + x & m + n recti ſunt (§. 226), conſequenter etiam o + m & x + n: Eſt ergo figura conſtructa rectangulum (§. 96). *Q. e. d.*

PROBLEEMA 35.

323. *Data recta GH una cum angulo obliquo G rhombum conſtruere.* Tab. VI. Fig. 106.

RESOLUTIO.

1. Ad rectam datam GH conſtituatur in G angulus dato æqualis (§. 197).
2. Fiat GE = GH & reliqua peragantur ut in probl. 33.

DEMONSTRATIO.

EG = EF = FH = HG, *per conſtruct.* Ducta igitur diogonali EH, patet eſſe G = F, o = n & m = x (§. 193). Sed G eſt angulus obliquus *ex hypotheſi*: Ergo & F, conſequenter etiam o + x & m + n ob-

liquos efficiunt (§. 174. 232). Sunt igitur m + o & n + x obliqui & figura conſtructa rhombus eſt (§. 95). *Q. e. d.*

PROBLEMA 36.

324. *Datis duabus rectis ON & OP una cum angulo intercipiendo O rhomboidem conſtruere.*

Tab. VI. Fig. 103.

RESOLUTIO.

1. Jungantur rectæ ON & OP ſub angulo dato (§. 197).
2. Reliqua peragantur ut in probl. 34.

DEMONSTRATIO.

Eadem eſt, quæ problematis præcedentis.

THEOREMA 69.

325. *Si peripheria circuli dividatur in partes quotcunque æquales ducanturque ſubtenſæ AB, BC, CD &c. figura circulo inſcripta regularis eſt.*

Tab. VI. Fig. 107.

DEMONSTRATIO.

Cum enim arcus AB, BC, CD &c. ſint æquales, *per hypoth.* etiam chordæ cognomines æquales ſunt (§. 274) cumque anguli A, B, C &c. æqualibus arcubus BDE, CDA, DEB &c. inſiſtant, ipſi quoque æquales ſunt (§. 200). Figura igitur circulo inſcripta regularis eſt (§. 102). *Q. e. d.*

PROBLEMA 37.

326. *Invenire ſummam omnium angulorum in quocunque polygono.*

RESOLUTIO.

1. Multiplicentur 180° per numerum laterum.
2. A producto ſubtrahantur 360°: reſiduum eſt ſumma quæſita.

E. gr. Pentag.	180	Hexag.	180
	5		6
	900		1080
	360		360
	540		720

DEMONSTRATIO.

Quælibet figura ex aſſumto in ea puncto F in tot triangula AFB, BFC, CFD &c. reſolvitur, quot habet latera AB, BC, CD &c. Si ergo 180 per numerum laterum multiplices, prodit ſumma omnium angulorum in dictis triangulis (§ 225). Sed anguli circa punctum F, qui non pertinent ad angulos polygoni, ſemper efficiunt 360° (§. 153). Quodſi ergo a facto ſupra invento ſubtrahantur 360°, ſumma angulorum polygoni relinquitur. *Q. e. d.*

Tab. VI. Fig. 107.

COROLLARIUM 1.

327. Quodſi ſumma inventa per numerum laterum dividatur; quotus eſt angulus polygoni regularis (§. 102).

SCHO-

SCHOLION 1.

328. *En tibi tabulam, in qua ſumma angulorum in figuris rectilineis quibuscunque & quantitas unius in regularibus a trigono usque ad dodecagonum exhibetur. Utimur hac tabula tum in figuris regularibus deſcribendis; tum in angulorum quantitate examinanda, utrum ſcilicet inſtrumento rite explorata fuerit, nec ne. Aberratum enim eſſe intelligimus, ubi eorum ſumma minor vel major deprehenditur ea, quæ in tabula definitur, e. gr. ſi in heptagono ſuperet 900.*

Num. Lat.	Sum. Ang	Ang. Fig. regul.	Num. Lat.	Sum. Ang.	Ang. Fig. reg.
III	180	60	VIII	1080	135
IV	360	90	IX	1260	140
V	540	108	X	1440	144
VI	720	120	XI	1620	$147\frac{3}{11}$
VII	900	$128\frac{4}{7}$	XII	1800	150

SCHOLION 2.

329. *Quoniam in quolibet caſu bis 180° ſubtrahuntur; ſumma angulorum ſtatim habetur, ſi 180 per numerum laterum binario mulctatum multiplices, e. gr. ſi 180 multiplices per 3, prodit ſumma angulorum pentagoni 540.*

COROLLARIUM 2.

Tab. VI. Fig. 108. 330. Si latera figuræ polygonæ cujuscunque continuentur, anguli externi 1, 2, 3, 4 &c. cum angulis figuræ internis efficiunt bis tot rectos, quot ſunt latera (§. 141). Sed interni ſoli efficiunt bis tot rectos quot ſunt latera, demtis quatuor (§. 326). Ergo externi in omni caſu conficiunt 4 rectos ſeu 360°.

PROBLEMA 38.

331. *Dato polygono regulari cuicunque ABCDE circulum circumſcribere & contra.* Tab. VI. Fig. 81.

RESOLUTIO.

1. Duo ejus Anguli E & D dividantur bifariam rectis EF & DF (§. 198) concurſuris in F (§. 247).
2. Ex puncto concurſus F deſcribatur radio EF circulus (§. 127).

DEMONSTRATIO.

Ducatur ex F in A recta FA (§. 117). Quoniam o = x, *per conſtr.* ED = AE (§. 102); erit AF = FE (§. 169). Ergo circulus tranſiens per D & E tranſit etiam per A (§. 38). Porro quia AF = EF, *per demonſtr.* erit m = x (§ 174). Sed x dimidius angulus polygoni, *per conſtr.* Ergo & m (§. 79 *Arithm.*), conſequenter etiam y. Quare ſi ducatur FB (§. 117); erit ut ante FB = AF, adeoque radius circuli. Eodem modo oſtenditur, FC & ſi quæ plures fuerint rectæ iſtiusmodi, eſſe radios circuli, adeoque circulum tranſire per omnes angulos polygoni, hoc eſt, eidem circumſcribi (§. 112). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

332. Omnis ergo figura regularis eſt circulo inſcriptibilis (§. 112).

THEOREMA 74.

Tab. VI. Fig. 109. 333. *Quadrilateri circulo inſcripti GHIK anguli bini oppoſiti H & K, item G & I conficiunt duos rectos.*

DEMONSTRATIO.

Inſiſtunt enim junctim ſumti integro circulo, e. gr. K arcui GHI & H complemento ejus ad circulum GKI (§. 54), adeoque ipſorum menſura eſt ſemicirculus (§. 299). Sunt ergo duobus rectis æquales (§. 137). *Q. e. d.*

PROBLEMA 39.

Tab. VI. Fig. * 334. *Circulo quadratum circumſcribere.*

RESOLUTIO.

1. Ducantur diametri AB & DE ſe mutuo in centro C ad angulos rectos ſecantes (§. 199).
2. Ex A, E, B, D intervallo radii fiant interſectiones in F, G, H, I.
3. Ducantur rectæ FG, GH, IH & IF. Erit FGHI quadratum circulo circumſcriptum.

DEMONSTRATIO.

Anguli ad A, E, B, D ſunt recti (§. 321) adeoque FG, GH, HI & IF circulum tangunt (§. 294). Sunt vero anguli G, F, I, H recti (§. 321) & FG = GH = HI = FI = 2 AC *per conſtr.* Ergo FGIH eſt quadratum (§. 94) idque circulo circumſcriptum (§. 113). *Q. e. d.*

PROBLEMA 40.

335. *Super data recta ED polygonum regulare quodcunq; deſcribere.* Tab. VI. Fig. 107.

RESOLUTIO.

1. Quæratur angulus polygoni (§. 327). &
2. Fiat in E ipſi æqualis (§. 149) & EA = ED.
3. Per puncta A, E, D deſcribatur circulus (§. 279).
4. In ea applicetur data recta ED, quoties fieri poteſt.

Ita deſcribetur figura quæſita (§. 325 & 332).

Aliter.

1. In E & D fiant anguli dimidio angulo polygoni ſigillatim æquales (§. 149) quorum crura EF & DF ſe mutuo ſecabunt in F (§. 232. 238. 247).
2. Ex F tanquam centro radio EF deſcribatur circulus & reliqua peragantur ut ante.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim angulus F complementum anguli polygoni ad duos rectos (§. 225), e. gr. in pentagono 72° (§. 328). Quare arcus ED eſt 72° (§. 56. 57), hoc eſt, quinta circuli pars (§. 39) &c. *Q. e. d.*

PROBLEMA 41.

336. *Circulo dato polygonum regulare quodcunque inſcribere.*

RESOLUTIO.

1. Dividantur 360 per numerum late-

Tab. VI. Fig. 107. laterum ut innoteſcat quantitas anguli EFD.

2. Conſtruatur is ad centrum (§. 149).

3. Chorda ED ad peripheriam toties applicetur, quoties fieri poteſt.

Ita figura regularis erit circulo inſcripta (§. 325. 112). *Q. e. f. & d.*

SCHOLION.

337. *Reſolutio problematis præſentis & præcedentis mechanica quidem eſt, cum ad conſtructionem inſtrumento transportatorio utamur* (§. 149) *: non tamen ideo contemnenda, tum quia univerſalis & facilis, tum quia conſtructionis rite peractæ indicium præbet. Pentagoni, Decagoni & Quindecagoni conſtructionem tradunt* Euclides (l) *&* Ptolemæus (m) *: de qua in Analyſi. Equidem & heptagoni, enneagoni & hendecagoni conſtructiones Geometricæ paſſim apud Autores, practicos inprimis, occurrunt ; ſed à rigore demonſtrationum abhorrent.* Joh. Carolus Renaldinus (n) *omnium polygonorum deſcribendorum regulam catholicam præſcribit, paſſim Geometris practicis inſertam, ſed quantum fallat,* Cl. Wagnerus, Mathemat. in Academia Helmſtad. Profeſſor, oſtendit (o) *& nos inferius in Analyſi oſtendemus.*

THEOREMA 75.

Tab. VI. Fig. 110. 338. *Latus hexagoni AB æquatur radio circuli circumſcripti AC.*

DEMONSTRATIO.

Angulus C = 60° (§. 57). Ergo A + B = 120° (§. 230), conſequenter ob AC = BC (§. 38) A = B = 60° (§. 174. 233). Quare AB = AC (§. 239). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

339. Hexagonum regulare circulo inſcribitur, ſi radius ad peripheriam ſexies applicetur.

COROLLARIUM 2.

340. Si ſuper linea data AB hexagonum deſcribendum; triangulum æquilaterum ACB conſtruitur (§. 187): eſt enim vertex C centrum circuli hexagono quæſito circumſcribendi (§. 337).

PROBLEMA 42.

Tab. VI. Fig. 111. 341. *Datis omnibus lateribus figuræ cujuscunque & tot diagonalibus, quot ſunt latera, demtis tribus, figuram conſtruere.*

RESOLUTIO.

Cum figura quælibet ABCDE per diagonales AC & AD in tot triangula BAC, CAD, DAE reſolvatur, quot ſunt latera, demtis tribus; non alia re opus eſt, quam ut unum triangulum ſuper altero excitetur (§. 194).

PROBLEMA 43.

Tab. VI. Fig. 112. 342. *Datis omnibus lateribus figuræ*

(l) Elem. 4. prop. 11. 16.
(m) Almag. lib. 1. conf. Joannes Regiomontanus in epitome hujus Almag. lib. 1. prop. 1. (n) lib. 2 de Reſolut. & compoſit. Mathem. f. 367. (o) in peculiari diſſertatione Helmſtadii 1700 habita.

ræ & tot angulis, quot ſunt latera, demtis tribus, figuram conſtruere.

RESOLUTIO.

1. Ducatur recta AB uni datorum laterum æqualis.
2. Ad A & B excitentur anguli eidem adjacentes (§. 149) & latera AE & BC per data debite determinentur.
3. Fiat porro in C angulus conveniens (§. 149) & determinetur latus DC &c.
4. Tandem ex E & D fiat interſectio in F intervallo laterum EF & FD.

Ductis enim DF & FE, figura terminabitur eritque æqualis quæſitæ (§. 155. 168).

Eodem modo conſtrui poſſunt figuræ regulares ex latere & angulo dato (§. 102).

COROLLARIUM.

343. Si omnes anguli præter unum F dentur, duo latera DF & FE ut dentur opus non eſt.

SCHOLION.

344. *Tyrones ut ſe exerceant in figuris irregularibus deſcribendis, lineas pro arbitrio in pedibus ac digitis, quantitates angulorum in gradibus aſſumere debent. Quodſi contingat, figuram non terminari, id indicio erit, caſum eſſe impoſſibilem, adeoque vel in angulorum vel linearum quantitate quadam erunt immutanda.*

PROBLEMA 44.

345. *Areæ cujusdam campeſtris rectilineæ abcde libere permeabilis, ichnographiam perficere, hoc eſt, figuram areæ campeſtri ſimilem deſcribere.* Tab. VI. Fig. 111.

RESOLUTIO.

1. Inveſtigetur longitudo ſingulorum laterum *ab, bc, cd, de,* itemque diagonalium *ac* & *ad* (§. 112).
2. Conſtruatur figura ABCDEA (§. 340) juxta ſcalam geometricam minorem.

Dico figuram ABCDE eſſe campo *abcde* ſimilem.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim AB : BC = *ab* : *bc* BC : CD = *bc* : *cd*, CD : DE = *cd* de &c. Etenim e. gr. *ab* 6 & *bc* 7 pedum in campo exiſtentibus, etiam AB = 6 & BC = 7 in charta. *per conſtr.* Quare cum porro ſit AC : AB = *ac* : *ab*, AC : AD = *ac* : *ad*, AD : AE = *ad* : *ae* &c. *per conſtr.* erit $o = o$, $x = x$, $y = y$, $n = n$, $m = m$, $r = r$, $u = u$, $s = s$, $t = t$ (§. 196), conſequenter $x + m + r = x + m + r$, $y + n = y + n$, $u + s = u + s$ (§. 80 *Arithm.*). Quamobrem figura ABCDE eſt campo *abcde* ſimilis (§. 166). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Poſita menſula ita in uno figuræ angulo, ut punctum *a* vertici ejus immineat per dioptras regulæ affixas collineatio fiat in baculos in ſingulis angulis B, C, D, E de- Tab. VI. Fig. 113.

E defixos ducanturque lineæ indefinitæ *ab*, ac, *ad*, *ae*.

2. Inveſtigetur longitudo rectarum *a*B, *a*C, *a*D, *a*E (§. 122) &.

3. Exinde juxta ſcalam modicam (§. 264) determinentur *ab*, *ac*, *ad*, *ae*.

4. Ducantur *bc*, *cd*, *ce*.

Dico abcde eſſe ſimilem figuræ ABCDE.

DEMONSTRATIO.

Eadem eſt cum præcedente.

Aliter.

Tab. VI. Fig. 114. 1. Menſula intra figuram poſita eligatur punctum f, ex quo per dioptras regulæ affixas ut ante collineatio fiat in A, B, C, D & E, ducanturque rectæ indefinitæ *fa*, *fb*, *fc*, &c.

2. Inveſtigetur longitudo rectarum *f*A, *f*B, *f*C, *f*D, *f*E (§. 122).

3. Inde determinetur longitudo rectarum *fa*, *fb*, *fc* &c. juxta ſcalam modicam (§. 264).

4. Tandem ducantur *ab*, *bc*, *bd*, &c.

Dico *abcdeg* eſſe figuræ ABCDEG ſimilem.

DEMONSTRATIO.

Angulus *f* utrique Δ *fab* & *f*AB communis, eſtque *fa* : *fb* = *f*A : *f*B *per conſtr.* Ergo anguli ad *a* & A, item ad *b* & B æquales ſunt atque *fa* : *ab* = FA : AB (§. 173). Eodem modo oſtenditur eſſe in ΔΔ *fga* & FGA angulos ad *a* & A æquales, atque *fa* : *ag* = FA : AG, conſequenter *ab* : *ag* = AB : AG (§. 167 *Arithm.*) & angulus *bag* = BAG (§. 80 *Arithm.*). Quare cum eadem ratione demonſtretur, eſſe *e* = E, *d* = D, *c* = C, *b* = B & *ed* : *dc* = ED : DC, *dc* : *cb* = DC : CB &c. figura *abcdeg* eſt majori ABCDEG ſimilis (§. 166). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Collocato inſtrumento goniometrico in *a* inveſtigetur quantitas angulorum *x*, *m*, *r* (§. 146) & longitudo rectarum *ab*, *ac*, *ad* & *ae* (§. 122). Tab. VI. Fig. 111.

2. Conſtruantur juxta ſcalam modicam ΔΔ ABC, ACD & ADE (§. 170).

Dico ABCDE eſſe ſimilem figuræ *abcde*.

DEMONSTRATIO.

Coincidit fere cum prima problematis præſentis.

Aliter.

1. Collocato inſtrumento goniometrico in f, inveſtigetur quantitas angulorum A*f*B, B*f*C, C*f*D, D*f*E, E*f*G, G*f*A (§ 146) & longitudo rectarum fA, fB, fC, fD, fE, fG (§. 122). Tab. VI. Fig. 114.

2. Conſtruantur ut ante juxta ſcalam modicam ΔΔ *bfa*, *agf*, *fge*, *efd*, *dfc* & *cfb* (§. 170).

Dico

Dico *abcdeg* eſſe ſimilem figuræ ABCDEF.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum altera problematis præſentis.

Aliter.

Tab. VI. Fig. III. 1. Pyxis cum acu magnetica, cujus margo in 360 gradus diviſa & quæ in cardine meridiei ac ſeptentrionis dioptris inſtructa, ita collocetur in *a*, ut ejus centrum ipſi *a* immineat & per dioptras collineanti baculus in *b* defixus occurrat, noteturque angulus declinationis acus a linea meridiana pyxidis ipſi *ab* imminente verſus ortum vel occaſum.

2. Pyxidis dioptræ convertantur ſucceſſive ad baculos in *c*, *d* & *e* defixos, notenturque ut ante in ſingulis caſibus anguli declinationis.

3. Inveſtigetur longitudo rectarum *ab*, *ac*, *ad*, *ae* (§. 122).

4. Ducatur in charta recta LM & aſſumto in ea puncto A applicetur centrum inſtrumenti transportatorii & fiant anguli *i*, *x*, *m*, *r* angulis declinationum, rectarum *ab*, *ac*, *ad*, *ae* æquales (§. 149) atque ex harum longi[illegible] per ſcalam modicam de[illegible]etur longitudo ipſarum AB, AC, AD, AE, (§. 262).

Dico figuram ABCDE eſſe alteri *abcde* ſimilem.

DEMONSTRATIO.

In campo acus magnetica ſemper eidem lineæ reſpondet in plano horizontali imaginario mundi, etſi diverſis in pyxide ſucceſſive immineat. Lineam iſtam deſignet in charta recta LM & punctum A centrum acus, ex quo deſcriptus eſt circulus. Quodſi jam linea meridiana pyxidis admovetur lateri AB, erit principium numerationis in *g* & acus indicabit in *f* quantitatem anguli *i*. In inſtrumento transportatorio initium numerandi fit in *f* & ſi arcus *fg* declinationi in campo obſervatæ æqualis aſſumitur; angulus *i* idem erit, qui ante; ſitusque lineæ AB rite determinatur. Arcus enim *fg* perinde metitur declinationem ipſius AB a linea meridiana, quam monſtrat acus, ſive numerandi principium in *f*, ſive in *g* fiat, eodem modo liquet, arcus *fh*, *fk*, *fl* determinare ſitum rectarum AC, AD, AE reſpectu lineæ LM, conſequenter anguli *x*, *m*, *r* in figura ABCDE erunt æquales totidem cognominibus in altera *abcde*. His ſuppoſitis reliqua demonſtrantur ut ſupra in demonſtratione prima.

Aliter.

1. Charta ſuper menſu[illegible] expanſa Tab. VII. Fig. 115.

ex centro o deſcribatur circulus.

2. In eodem defigatur ſtylus, cui inſeratur regula cum dioptris.

3. Collineetur in ſingulos areæ angulos A, B, C &c. notenturque in peripheria circuli puncta diametraliter oppoſita *a* & *a*, *b* & *b*, *c* & *c* &c.

4. Inveſtigetur longitudo rectarum oA, oB, oC &c. (§. 122).

5. Charta a menſula remota alteri mundæ coextendatur in tabula & Paralleliſmus ad *aa* applicatus arbitrario intervallo aperiatur, donec in charta munda ipſi parallela commode duci poſſit (§. 243).

6. Idem Parallelifmus applicetur ad *bb* & eo usque aperiatur, donec recta huic parallela ducta alteram ipſi *aa* parallelam in puncto commodo interſecet.

7. Applicetur porro ſucceſſive ad rectas *cc*, *dd*, *ee* & aperiatur uſque ad punctum interſectionis ipſis *aa* & *bb* parallelarum, ducanturque per idem dictis *cc*, *dd*, *ee* parallelæ.

8. Tandem ex puncto interſectionis convenienter determinetur longitudo rectarum ipſis oA, oB, oC &c. reſpondentium juxta ſc[illegible] modicam (§. 262). Ita enim ut ſupra ichnographiam abſolvere licebit.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum altera probl. præſ. modo demonſtretur, ſi plures lineæ *aa*, *bb*, *cc* &c. ſe interſecent in o & his ducantur totidem aliæ parallelæ AA, BB, CC &c. ſe itidem in O interſecantes; fore $y = m$, $x = n$, $z = l$ &c. Quod facile patet. Continuetur enim BB, donec ipſi *aa* occurrat in *f*; continuentur etiam CC & *cc*, donec ipſis *bb* & AA occurrant in *g* & *k*. Erit ob parallelas *aa* & AA $m = f$ & ob parallelas *bb* & BB $y = f$ (§. 222), adeoque $m = y$ (§. 79 *Arithm.*) Similiter ob parallelas *bb* & BB $n = g$ & ob parallelas *cc* & CC $x = g$ (§. 222), adeoque $n = x$ (§. 79 *Arithm.*). Item ob parallelas *aa* & AA $z = k$ & ob parallelas *cc* & CC $l = k$ (§. 222), adeoque $l = z$ (§. 79 *Arithm.*). *Q. e. d.* Tab. VII. Fig. 116.

SCHOLION 1.

346. *Ideo commendatur methodus ultima, quod exigua eaque unica charta ingenti tractui dimetiendo ſufficiat. Si enim campus in plures reſolutus fuerit partes, littera initialis in ſingulis nota quadam numerica notanda & ubi unum alphabetum fuerit abſolutum, aliud literis aliis uſurpandum.*

SCHOLION 2.

347. *Etiam ſine parallelismo i[illegible]phiam facillime conficere datur, ſi p[illegible]* a, *item* b, c, d *&c. ſubtili acu pe[illegible]tur & per foramina pulvis carbonum linteo incluſus trajiciatur. Puncta enim* a *&* a *dabunt rectam, qua bifariam diviſa determinatur cen-*

trum

trum O: reliqua puncta b, c, d &c. *ſitum angulorum figuræ reſpectu hujus centri determinant.*

SCHOLION 3.

348. *Acus magnetica ex optima chalybe cudenda, nec foraminibus (quod ornatus gratia interdum fieri ſolet ab ignaris) pertundenda, quoniam vis magnetica per lineam rectam diffunditur. Ejus longitudo 6 digitos ne ſuperet, ne ſphæram magnetis excedat; a duabus ne deficiat. Uno magnetis polo cum aliqua mora eam affricari ſufficit: affricanda autem eſt pars acus, quæ ſeptentrionem reſpicere debet, polo auſtrali, nec ductu contrario deſtruendum, quod anteriore communicatum fuerat. In hemiſphærio ſeptentrionali, quod nos inhabitamus, pars acus borealis poſt contactum magnetis ponderoſior evadit & inclinatur: quare levior fieri debet auſtrali. Pyxis ex ligno, ebore vel orichalco; ſtylus, cui capitellum acus ex ære, cupro vel argento intus in conum excavatum imponitur, ex orichalco vel argento paratur. Ut acus tanto exactius libretur, quidam ſtyli apicem chalybeum faciunt.*

PROBLEMA 45.

Tab. VII. Fig. 117. 349. *Ichnographiam areæ ABCDE ex duabus ſtationibus A & B perficere.*

RESOLUTIO.

1. Poſita menſula in A collineatio fiat in ſingulos areæ angulos B, C, D & E ducanturque rectæ verſus eos ex a.
2. Quæratur diſtantia ſtationum (§. 122) & in menſulam ex ſcala Geometrica (§. 262) transferatur.
3. Menſula ex A deferatur in B, ita ut punctum cognomine *b* in ea deſignatum ipſi B reſpondeat & regula ad lineam *b a* applicata per dioptras collineanti baculus in A defixus occurrat.
4. Ex puncto *b* in ſingulos rurſus figuræ angulos collineatio fiat, & verſus eos rectæ ducantur, quæ priores in *e*, *d*, *c* interſecant.
5. Denique jungantur puncta *a* & *e*, *e* & *d*, *d* & *c*, rectis *a e*, *e d*, *d c*.

Dico, ichnographiam eſſe abſolutam.

DEMONSTRATIO.

AB : BC = *ab* : *bc*, CD : DE = *cd* : *de* CA : AD = *ca* : *ad* &c. (§. 266). Ergo & anguli A, B, C, D, E æquales ſunt angulis *a*, *b*, *c*, *d*, *e* (§. 196 *Geom.* & §. 80 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Aliter.

1. In A inveſtigetur quantitas angulorum DAE, DAC & CAB, itemque ex B quantitas angulorum ABE, EBD & DBC (§. 146), quæraturque ſtationum diſtantia AB (§. 122). Tab. VII. Fig. 117.
2. Ducta in charta recta *a b* per ſcalam modicam diſtantiæ ſtationum AB convenienter determinetur (§. 264).
3. In *a* conſtituantur angulis DAE, DAC, CAB, in *b* vero ipſis ABE, EBD & DBC æquales (§. 149).

4. Tan-

4. Tandem puncta interſectionum b, c, d, e rectis connectantur.

Dico *abcde* eſſe ſimilem areæ AB CDE.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum præcedente.

Aliter.

1. Ope pyxidis magneticæ obſerventur ut in probl. præc. ex duabus ſtationibus A & B declinationes linearum AB, AC, AD, AE itemque BC, BD, BE a linea meridiana acus.
2. Quæratur diſtantia ſtationum (§. 122).
3. In charta eodem modo, quo in probl. præc. determinetur ſitus rectarum *ab, ac, ad* &c. & puncta interſectionum c, d, e rectis connectantur.

Ita ichnographia erit abſoluta.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum præcedente, modo una notentur quæ in demonſtratione ultima problematis præcedentis dicta ſunt.

PROBLEMA 46.

350. *Ichnographiam areæ perficere cujus integram peripheriam peragrare licet.*

Tab. VII. Fig. 117.

RESOLUTIO.

1. Menſula in A collocata collineetur in baculos in B & E defixos, ut angulus BAE deſignari poſſit.
2. Longitudo utriusque rectæ AB & AE (§. 122) explorata ex ſcala minore transferatur in menſulam (§. 204).
3. Menſula in B translocetur, ita ut ipſi B punctum cognomine in eadem reſpondeat & viſus per dioptras collineantis baculum in A attingat. Quo facto
4. Idem dirigatur per easdem in C, quo ſicut ante angulus ABC & rectæ BC ſimilis in menſula deſignari poſſint.
5. Quodſi idem cum reliquis areæ angulis & lateribus fiat; erit figura in menſula delineata areæ propoſitæ ſimilis.

DEMONSTRATIO.

Singuli enim anguli figuræ in menſula delineatæ ſunt æquales ſingulis angulis areæ & latera illius lateribus hujus homologis proportionalia, *per conſtr.* Figura igitur delineata eſt areæ ſimilis (§. 166). *Q. e. d.*

Aliter.

Quæratur longitudo omnium laterum (§. 122 & quantitas tot angulorum, quot ſunt latera, demtis tribus (§. 146). His enim datis ichnographia *per probl.* 42 (§. 341), vide-

vi demonſtrationis præcedentis abſolvetur.

Aliter.

Tab. VII. Fig. 118. n. 1. 1. Notetur in ſingulis angulis figuræ A, B, C, D, E laterum AB, BC, CD, DE, AE declinatio a linea meridiana pyxidis magneticæ ut in probl. 43 (§. 344).

2. Quæratur ſimul longitudo laterum (§. 122).

3. In charta deſignetur linea *ab* & in eam transferatur ex ſcala modica longitudo lateris AB (§. 264).

4. Huic imponatur linea meridiana pyxidis, & charta huc illucque moveatur, donec acus angulum declinationis debitum monſtret.

5. Charta immota centrum pyxidis collocetur in *b* & circa id vertatur, donec angulum declinationis convenientem indicet acus: ita enim rectam *bc* ducere & per ſcalam modicam ipſi BC convenienter determinare licet.

6. Quodſi hæc operatio continuetur; ichnographia tandem abſolvetur.

Vel:

Tab. VII. Fig. 118. n. 2. 3. In charta ducantur lineæ quotcunque parallelæ.

4. Inſtrumentum transportatorium parallelismo inſtructum ad extimam parallelarum ita applicetur, ut centrum ſit in *a*, radius vero ipſi *a*K reſpondeat noteturque punctum *z*, indicans in peripheria inſtrumenti gradum declinationis acus a linea meridiana pyxidis in campo ad punctum A.

5. Ab *a* per *z* ducatur recta & ex *a* in *b* transferatur ex ſcala modica longitudo rectæ AB in campo menſuratæ.

6. Regula parallelismi ſolitaria unam parallelarum ſtringente, altera cui cohæret inſtrumentum transportatorium promoveatur, donec hujus centrum ipſum *b* attingat & ad gradum declinationis in B obſervatæ deſignetur punctum *y*: quo facto, ut ante, rectam *bc* ducere licet.

7. Hac operatione continuata, integra areæ ichnographia tandem abſolvetur.

DEMONSTRATIO.

1 = I, 2 = II, 3 = III, 4 = IV & 5 = V *per conſtr.* & quoniam recta per *b* ducta (quæ diametrum inſtrumenti transportatorii refert) ipſi *a*K parallela, *per conſtruct.* acus vero magnetica in B eſt parallela ſitui in A; erit 1 = 8 & I = VIII. (§. 240), conſequenter 8 = VIII, (§. 79 *Arithm.*) Simili modo oſtenditur eſſe 6 = VI. Quare cum ſit

1 + 7

1 + 7 + 6 = I + VII + VI (§. 141); erit 7 = VII (§. 83 *Arithm.*). Porro 2 = II *per conſtr.* & 8 = VIII, *per demonſtr.* Ergo 8 + 2 = VIII + II (§. 80 *Arithm.*). Similiter 12 = 2 & XII = II (§. 240) & 3 = III, *per conſtr.* Quare cum ſit 12 + 9 + 3 = XII + IX + III (§. 141); erit 9 = IX (§. 83 *Arithm.*). Porro 4 = IV *per conſtr.* & hinc, cum ſit 10 = 3 & X = III (§. 240), adeoque ob 3 = III *per demonſtr.* 10 = X (§. 79 *Arithm.*), 4 + 10 = IV + X. Denique 5 = V, *per conſtr.* & 4 + 11 = IV + XI (§. 140) adeoque ob 4 = IV *per conſtr.* 11 = XI. Quare 5 + 11 = V + XI (§. 80 *Arithm.*). Singuli igitur anguli figuræ *abcde* ſunt æquales ſingulis angulis areæ ABCDE. Quare cum etiam latera illius lateribus hujus homologis proportionalia ſint *per conſtr.* figura *abcde* areæ ABCDE ſimilis (§. 166). *Q. e. d.*

PROBLEMA 47.

351. *Figuræ in charta delineatæ ſimilem in campo deſignare.*

RESOLUTIO.

Quoniam hoc problema eſt inverſum alterius, quo ichnographias arearum paramus; non modo tot ejus dantur caſus quot hujus commemoravimus, ſed & ipſius reſolutio ex reſolutionibus problematum immediate præcedentium intelligitur. E. gr. Si ſemicirculo vel menſula & pertica utimur: anguli ſinguli figuræ aut anguli diagonalibus intercepti &c. in ſolo deſignantur *per probl.* 7 (§. 149) & latera vel diagonales &c. per menſuram majorem decenter determinantur.

CAPUT VI.

De

FIGURARUM DIMENSIONE AC DIVISIONE.

PROBLEMA 48.

352. *Invenire aream quadrati.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur longitudo lateris (§. 122).
2. Hæc ducatur in ſeipſam. Factum exprimit aream Quadrati.

Sit e. gr. Latus quadrati = 345″

345
1725
1380
1035
erit Area = 119025

DEMONSTRATIO.

Tab. VII. Fig. 119. Aream quadrati inveſtigans quærit, quot digiti quadrati, hoc eſt, quot quadratula digitum longa & lata in eodem contineantur (§. 114). Evidens vero eſt, ſi latus quadrati AB concipiatur in quotcunque partes æquales & quadratum ipſum per rectas puncta diviſionum in lateribus oppoſitis connectentes in quadrata minora diviſum; tot eſſe quadratulorum ſeries quot partes habet latus AB & in qualibet ſerie tot reperiri quadratula, quot latus BC, vel idem AB habet partes. Numerus ergo quadratulorum invenitur, ſi latus in ſeipſum ducatur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

353. Si latus quadrati fuerit 10, area erit 100. Cum igitur decempeda ſit 10 pedum, pes 10 digitorum &c. (§. 23); pertica quadrata 100 pedes quadratos; pes quadratus 100 digitos quadratos &c. continet (§. 114).

COROLLARIUM 2.

354. Si latus quadrati fuerit 12, area erit 144. Quare cum pertica dividitur in 12 pedes; pes in 12 digitos &c. pertica quadrata continet 144 pedes quadratos; pes quadratus 144 digitos quadratos. &c. (§. 114).

COROLLARIUM 3.

355. Datus igitur numerus in priori caſu facile in digitos, pedes & perticas quadratas reſolvitur, ſi ſcilicet a dextra ſiniſtram verſus duæ notæ digitis, duæ pedibus reſecentur: quæ enim ſiniſtram verſus reſiduæ fiunt, perticis cedunt. E. gr. 11 90 25 digiti conficiunt 11 perticas, 90 pedes, 25 digitos.

COROLLARIUM 4.

356. Quadrata ſunt inter ſe in ratione duplicata laterum (§. 148 *Arithm.*). E. gr. Quadratum lateris dupli eſt quadruplum quadrati lateris ſimpli. Et quadrata æqualia ſunt quorum latera æqualia ſunt.

PROBLEMA 49.

357. *Invenire aream rectanguli ABCD.* Tab. VII. Fig. 120.

RESOLUTIO.

1. Inveſtigetur longitudo laterum AB & AC (§. 122).
2. Ducatur AB in AC. Factum erit area rectanguli.

E. gr. Sit AB = 345″
AD = 123

1035
690
345

erit Area = 42435

DEMONSTRATIO.

Eadem eſt, quæ problematis præcedentis.

COROL-

COROLLARIUM 1.

358. Rectangula ſunt in ratione compoſita ſuorum laterum AB & AC (§. 148 *Arithm.*).

COROLLARIUM 2.

359. Si ergo fuerint tres lineæ continue proportionales, quadratum mediæ rectangulo extremarum æquale eſt (§. 268 *Arithm.*)

COROLLARIUM 3.

360. Si quatuor fuerint lineæ rectæ proportionales; rectangulum ſub extremis æquatur rectangulo ſub mediis (§. 267 *Arithm.*).

COROLLARIUM 4.

Tab. VI. Fig. 102. 361. Quare ſi ex eodem puncto A ducantur duæ rectæ, quarum altera AD circulum tangit, altera AB ſecat; erit quadratum tangentis AD rectangulo ſub ſecante AB & ejus portione extra circulum AC æquale (§. 319 & 359).

COROLLARIUM 5.

Tab. VI. Fig. 97. 362. Si duæ vel plures ſecantes GL & GM ex eodem puncto G ducantur erunt rectangula ſub totis & ejus portionibus extra circulum æqualia (§. 318 & 360).

COROLLARIUM 6.

Tab. I. Fig. 14. 363. Si duæ chordæ HM & LI ſe mutuo ſecent in K; erunt rectangula ſub ſegmentis inter ſe æqualia (§. 317. 360).

COROLLARIUM 7.

364. Cum orgya, qua lignorum ſtrues metimur, vel quadrati, vel rectanguli figuram habeat; ejus area *per probl. præc. vel præſ.* inveniri poteſt. Per hanc itaque ſi factum ex longitudine in latitudinem ſtruis dividatur; quotus indicat, quot ipſa orgyas contineat [§. 62 *Arithm.*).

THEOREMA 76.

365. *In omni parallelogrammo latera oppoſita OP & NQ, item ON & PQ æqualia ſunt.* Tab. VI. Fig. 103.

DEMONSTRATIO.

Ducatur diagonalis PN (§. 117). Quoniam OP parallela ipſi NQ (§. 98); erit o = x (§. 222). Eſt vero etiam u = y (§. 320) & PN = PN (§. 73 *Arithm.*). Ergo OP = QN & ON = PQ (§. 237). *Q. e. d.*

THEOREMA 77.

366. *Duo parallelogramma AB CD & ECDF ſuper eadem baſi CD & ejusdem altitudinis AC ſunt inter ſe æqualia.* Tab. VII. Fig. 121.

DEMONSTRATIO.

Quoniam altitudines æquales ſunt, *ex hypoth.* perpendicula inter AB & CD, itemque EF & CD continuatam intercepta æqualia ſunt (§. 216). Quare cum AB & EF ſint ad eandem CD parallelæ (§. 98); AB & EF in directum jacent (§. 245). Jam AB = EF, *per hypoth.* Ergo AE = EF (§. 80 *Arithm.*),

rithm.). Quoniam porro AC = BD & EC = DF (§. 98); erit △ ACE = △ BFD (§. 193), adeoque ABGC = FEGD (§. 83 *Arithm.*), conſequenter ABCD = ▭ EFDC (§. 80 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

367. Ergo & triangula ſuper eadem baſi, & ejusdem altitudinis æqualia ſunt (§. 320).

COROLLARIUM 2.

368. Quodcunque adeo triangulum GFD eſt dimidium parallelogrammi ACDB ſuper eadem vel æquali baſi CD & ejusdem altitudinis, ſeu intra easdem parallelas (§. 215. 216).

COROLLARIUM 3.

369. Quodſi inter baſin & altitudinem parallelogrammi rectanguli vel obliquanguli quæratur media proportionalis (§. 312); erit ea latus quadrati rectangulo æqualis (§. 359).

PROBLEMA 50.

Tab. VII. Fig. 122. 370. *Invenire aream rhombi & rhomboidis ſeu parallelogrammi obliquanguli.*

RESOLUTIO.

1. In CD pro baſi aſſumtam demittatur perpendiculum AE (§. 205), quæ erit altitudo parallelogrammi (§. 216).
2. Multiplicetur baſis per altitudinem.

E. gr. Sit CD = 4° 5′ 6″
AE = 2 3 4

	1 8 2 4
	1 3 6 8
	9 1 2
erit Area =	10° 6 7′ 0 4″

DEMONSTRATIO.

Parallelogrammum obliquangulum æquatur rectangulo ſuper eadem baſi CD & ejusdem altitudinis CE (§. 366). Sed area rectanguli æquatur facto ex baſi in altitudinem (§. 357 & 218). Ergo eidem æqualis eſt area parallelogrammi obliquanguli (§. 79 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

371. Parallelogramma ſunt in ratione compoſita altitudinum & baſium (§ 148 *Arithm.*), adeoque & triangula in eadem exiſtunt (§ 368 *Geom.* & §. 172 *Arithm.*).

COROLLARIUM 2.

372. Ergo ſi altitudines ſunt æquales, baſium; ſi baſes ſunt æquales, altitudinum rationem habent (§. 172 *Arithm.*)

COROLLARIUM 3.

373. Parallelogramma & triangula æqualia baſes & altitudines reciprocant (§. 269 *Arithm.*).

THEOREMA 78.

374. *Triangulum eſt æquale parallelo-*

rallelogrammo ſuper eadem baſi ſed dimidiæ altitudinis, itemque parallelogrammo ſuper dimidia baſi & ejusdem altitudinis.

DEMONSTRATIO.

Tab. VII. Fig. 123. I. Si triangulum ADC fuerit rectangulum, aſſumta AD pro baſi, erit DC altitudo: ſumta vero DC pro baſi, erit AD altitudo (§. 217). Jam cum ſit EA = CG, *per hypoth.* & angulus ad G ſit rectus (§. 87), is ad E ſimiliter rectus (§. 96), adeoque G = E (§. 139); præterea verticales ad H ſint æquales (§. 150): erit CGH = EHA (§. 237), conſequenter EGDA = △ACD (§. 80 *Arithm.*). *Q. e. d.*

II. Si triangulum ACB fuerit obliquangulum, per perpendiculum DC in duo rectangula ADC & CDB reſolvetur (§. 76 & 87) Ergo ſi fiat FB = DG dimidiæ altitudini; erit DGFB = DCB & AEGD = ACD *per caſ.* I. Ergo AEFB = ACD (§. 80 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Tab. VIII. Fig. 124. Si GK fuerit dimidia baſis: erit CFKD = △DCB & GECD = △ACD, *per caſ.* I. Quare EGKF = △ACB (§. 80 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

PROBLEMA 51.

375. *Invenire aream Trianguli.*

RESOLUTIO.

Tab. VIII. Fig. 125. 1. Multiplicetur baſis AB per altitudinem CD.

2. Productum dividatur bifariam. Ita prodit area trianguli ABC (§. 368).

Aliter.

Baſis dimidia ½ AB multiplicetur per altitudinem CD; vel baſis AB per altitudinem dimidiam ½ CD. Factum erit area trianguli (§. 374. 357).

E. gr. AB = 3°4′2″ AB = 3°4′2″
CD = 2 3 4 ½CD = 1 1 7

1368	2394
1026	342
684	342
80028	△40014

2) 80028
△ ACB 40014

½AB = 1°7′1″
CD = 2 3 4

684
513
342
△ 40014

COROLLARIUM 1.

376. Si inter baſin & altitudinem dimidiam; vel inter altitudinem & baſin dimidiam quæratur media proportionalis (§. 312) erit ea latus quadrati triangulo æqualis (§. 369).

COROLLARIUM 2.

377. Si area trianguli per baſin dimidiam dividitur, quotus eſt altitudo (§. 194 *Arithm.*).

THEOREMA 79.

378. *In parallelogrammis & triangulis ſimilibus altitudines ſunt lateribus homologis proportionales & baſes ab iis lateribus proportionaliter ſecantur.* Tab. VII. Fig. 122.

DEMONSTRATIO.

Cum altitudines AE & *ae* ſint ad baſes CD & *cd* perpendiculares (§. 216); erit E = *e* (§. 75. 139). Et quia parallelogrammum ABCD ipſi *abcd*; triangulum CAD ipſi *cad* ſimile, *per hypoth.* erit C = *c* (§. 168). Quare AC : AE = *ac* : *ae* (§. 252). Eſt vero etiam AC : CD = ac : cd (§. 168). Ergo AE : CD = *ae* : *cd* (§. 167 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Quoniam E = *e* & C = *c*, *per demonſtr.* erit AC : CE = *ac* : *ce* (§. 252). Eſt vero etiam AC : CD = *ac* : *cd* (§. 168), ergo CE : CD = *ce* : *cd* (§. 167 *Arithm.*), adeoque ED : CE = *ed* : *ce* (§. 183 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

379. *Patet quoque a priori. Quoniam enim* ABCD ∽ abcd & △ACD ∽ △acd *per hypoth. perpendicula* AE & ae *pariterque ſegmenta baſium* CE & ce; *itidemque* ED & ed *eodem modo determinantur* (§. 115. 205), *adeoque ſimilia ſunt* (§. 116). *Cum adeo diſcerni nequeant niſi per compraeſentiam* (§. 22 Arithm.), *tam perpendicula quam ſegmenta baſium ad latera homologa figurarum eandem rationem habere debent* (§. 123 Arithm.).

COROLLARIUM 1.

380. Parallelogramma igitur & triangula ſimilia habent rationem duplicatam homologorum laterum, item altitudinum ac ſegmentorum baſeos (§. 371 *Geom.* & §. 148 *Arithm.*).

COROLLARIUM 2.

381. Sunt ergo ut quadrata laterum, altitudinum, & ſegmentorum baſium homologorum (§. 356).

PROBLEMA 52.

382. *Invenire aream polygoni irreguralis ac trapezii.* Tab. VIII. Fig. 126. n. 1.

RESOLUTIO.

1. Reſolvatur per diagonales AD & AC in triangula.
2. Inveniantur areae ſingulorum triangulorum (§. 375) &
3. Addantur. Erit ſumma area quaeſita (§. 78 *Arithm.*).

E. gr. $\frac{1}{2}$AD = 43′ $\frac{1}{2}$AD = 43′ $\frac{1}{2}$AC = 42′
EF = 35 GC = 45 BH = 30

215	215	△ABC 1260
129	172	

△AED 1505 △DAC 1935
△AED 1505
△ABC 1260

Area polygoni irreg. 47°00′

Quod ſi in trapezio fuerit AB ipſi CD parallela, erunt triangulorum altitudines BF & GC aequales (§. 215. 216), conſequenter trapezii area prodit, ducta ſemiſumma baſium Tab. VIII. Fig. I. 127.

ſium parallelarum AB & ED in altitudinem ejus BF (§. 375).

E. gr. Sit AB = 246″, CD 378″, BF = 195″

erit AB + CD = 624

Tab. VIII. Fig. 127.

BF = 195

3120

5616

624

Area Trapezii 121680

THEOREMA 80.

Tab. VI. Fig. 107.

383. *Figura regularis ABCDE ex centro circuli circumſcripti F in triangula æqualia atque ſimilia reſolvitur & area ejus æquatur triangulo, cujus baſis peripheria totius polygoni AB + BC + CD &c. altitudo perpendiculum ex centro F in latus unum AB demiſſum. Idem valet de area circumſcripti abcde, niſi quod altitudo ſit radius.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB = BC = CD = DE = AE (§. 102) & AF = FB = FC = FD = FE (§. 38); triangula AFB, BFC, CFD, EFD, AFE ſibi mutuo congruunt (§. 193), adeoque & æqualia, & ſimilia ſunt (§. 155). *Quod erat unum.*

Conſtituantur triangula AFB, BFC, CFD &c. in quæ reſolutum eſt polygonum ABCDE ſuper eadem recta AA (§. 194). Erigatur in A perpendicularis AF (§. 234) ipſi

Tab. VIII. Fig. 128.

GF ſeu altitudini triangulorum æqualis. Erit AfB = AFB, BfC = BFC, CfD = CFD &c. (§. 367), conſequenter AfA æqualis eſt areæ polygoni regularis (§. 80 Arithm.). *Quod erat ſecundum.*

Cum recta Fg ex centro F ad contactum g ducta ſit radius (§. 46) & ad latus ae perpendicularis (§. 293); erit ea altitudo trianguli aFe (§. 216). Reliqua patent ut ante. *Quod erat tertium.* Tab. VI. Fig. 107.

PROBLEEMA 53.

381. *Invenire aream polygoni regularis.*

RESOLUTIO.

1. Latus polygoni AB multiplicetur per dimidium laterum numerum, e. gr. latus hexagoni per 3.
2. Factum porro ducatur in perpendiculum GF ex centro circuli circumſcripti in latus AB demiſſum.

Ita prodit area quæſita (§. 375. 383).

E. gr. AB = 54′

dimidius Numer. later. $2\frac{1}{2}$

27

108

Semiperimeter 135

FG 29

1215

270

Area Pentagoni 39° 15′

THEO-

THEOREMA 81.

Tab. VI. Fig. 107. 385. *Figuræ tam regulares, quam ſimiles irregulares habent rationem duplicatam homologorum laterum.*

DEMONSTRATIO.

In figuris regularibus eſt $AB^2 : ab^2 = \Delta AFB : \Delta afb = \Delta BFC : \Delta bfc = \Delta CFD : \Delta cfd = \Delta DFE : \Delta dfe = \Delta EFA : efa$ (§. 381. 383). Ergo $AFB + BFC + CFD + DFE + EFA : afb + bfc + cfd + dfe + efa = AFB : afb$ (§. 182 *Arithm.*) $= AB^2 : ab^2$ (§. 156 *Arithm.*). Habent ergo figuræ regulares rationem duplicatam laterum AB & *ab* (§. 356). *Quod erat unum.*

Tab. VIII. Fig. 126. In irregularibus figuris ſimilibus ſi ex iisdem angulis A & *a* in eosdem D & *d*, C & *c* ducantur rectæ AD & AC, *ad* & *ac*; triangula AED & *aed*, ADC & *adc*, ABC & *abc* eodem modo determinantur (§. 115). Sunt ergo ſimilia (§. 116). Quare $AD^2 : ad^2 = \Delta AED : aed, = \Delta ADC : adc$ & $AC^2 : ac^2 = \Delta ABC : \Delta abc$ (§. 381). Eſt vero $AC : ac = AD : ad$ (§. 166), adeoque $AC^2 : ac^2 = AD^2 : ad^2$ (§. 239 *Arithm.*), conſequenter $AD^2 : ad^2 = \Delta ABC : \Delta abc$ (§. 156 *Arithm.*). Unde $AED + ADC + ABC : aed + adc + abc = AED : aed$ (§. 182 *Arithm.*) $= AD^2 : ad^2$ (§. 156 *Arithm.*) $= AE^2 : ae^2$ (§. 166 *Geom.* & §. 239 *Arithm.*). Sunt itaque figuræ irregulares ſimiles in ratione duplicata homologorum laterum AE & *ae* (§. 356). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 82.

386. *Circuli & figuræ ſimiles ipſis inſcriptæ ſunt inter ſe ut quadrata diametrorum.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus deſcribi duos circulos & iis circumſcribi quadrata, omnia utrobique eodem modo determinabuntur (§. 115. & 334). Sunt ergo figuræ utræque inter ſe ſimiles (§. 116). Cum adeo diſtingui nequeant niſi per compræſentiam (§. 22 *Arithm.*); quadrata circulis circumſcripta ad ſuos circulos eandem rationem habere debent (§. 123 *Arithm.*). Quamobrem circuli inter ſe ſunt ut quadrata diametrorum (§. 164 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Eodem modo oſtenditur, figuras ſimiles circulis inſcriptas eſſe ut circulos, quibus inſcribuntur. Sed circuli ſunt ut quadrata diametrorum, *per demonſtrata.* Ergo & figuræ ipſis inſcriptæ ſimiles ſunt ut quadrata diametrorum (§. 156 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

COROL-

COROLLARIUM.

387. Habent ergo circuli rationem duplicatam diametrorum (§. 356) adeoque & radiorum [§. 172 *Arithm.*].

THEOREMA 83.

388. *Circulus æqualis eſt triangulo, cujus baſis peripheriæ, altitudo radio æqualis.*

DEMONSTRATIO.

Tab. VIII. Fig. 129. Concipiatur peripheria circuli in partes numero infinitas inter ſe æquales adeoque infinite parvas diviſa; arcus infinite exigui *ab* ſupra chordam cognominem exceſſus erit quovis dato minor, ſeu inaſſignabilis, adeoque revera nullus. Concipiantur porro ex centro *C* ad extrema arcus infinite parvi *ab* ducti radii *cb* & *ca*: erit angulus *acb* infinite parvus, adeoque *a* & *b* non different a recto (§. 225), conſequenter ſi *ab* ſumatur pro baſi, radius *ac* erit trianguli *abc* altitudo (§. 217). Cum adeo area circuli reſolvatur in iſtiusmodi triangula numero infinita, quorum altitudo communis eſt radius *ac*, baſes vero junctim ſumtæ ſunt peripheriæ circuli æquales, *per demonſtrata*; erit ille æqualis triangulo, cujus baſis peripheria, altitudo radius circuli (§. 383). *Q. e. d.*

SCHOLION.

389. *Hac demonſtrandi methodo primus uſus eſt* Keplerus (p). *Eam exemplo ejus excitatus* (q) *ſub nomine* methodi indiviſibilium *magis excoluit* Cavalerius. *Demonſtrationem indirectam dedit* Archimedes (r) *non contemnendam, quoniam ipſius demonſtrandi methodo principia methodi infiniteſimalis rigidantur.*

COROLLARIUM 1.

390. Sunt igitur circuli in ratione compoſita peripheriarum & radiorum [§. 371]. Sed iidem ſunt in ratione duplicata radiorum [§. 387]. Quare peripheriæ ſunt inter ſe ut radii [§. 148. 156 *Arithm.*).

COROLLARIUM 2.

391. Cum adeo ſit ut peripheria circuli unius ad ſuum radium, ita peripheria alterius cujuscunque ad ſuum [§. 164 *Arithm.*]; ratio peripheriæ ad radium ſeu diametrum in omnibus circulis eadem.

COROLLARIUM 3.

392. Sector circuli ACD æqualis eſt triangulo, cujus baſis arcus AD, altitudo radius AC. Tab. I. Fig. 2.

 THEO-

(p) in Nova Stereometria doliorum vinariorum part. I. theor. 2. f. B2.
(q) vide præfat. ad Geometriam indiviſibilium continuorum nova ratione promotam p. b. 2.
(r) in libello de circuli dimenſione prop. I.

THEOREMA 84.

393. *Polygonum inſcriptum minus; circumſcriptum majus eſt circulo. Similiter illius perimeter minor; hujus autem perimeter major eſt peripheria circuli.*

DEMONSTRATIO.

Tab. VI. Fig. 107. Latera AB, BC, CD &c. polygoni inſcripti ſunt chordæ arcus cognomines ſubtendentes (§. 325). Sed chordæ ſunt arcubus minores (§. 180). Ergo perimeter polygoni circulo inſcripti eſt hujus peripheria minor (§. 82 *Arithm.*). Et quoniam chordæ totæ intra circulum cadunt; area polygoni parti circuli congruit (§. 9 *Arithm.* & §. 3 *Geom.*), adeoque ipſi æqualis eſt (§. 155), conſequenter polygonum inſcriptum circulo minus (§. 18 *Arithm.*). *Quod erat primum & ſecundum.*

Latera polygoni circumſcripti *ab*, *bc*, *cd* &c. tangunt circulum (§. 334) adeoque totæ extra eum cadunt (§. 45), conſequenter circulus parti polygoni congruit (§. 9 *Arithm.* & §. 3 *Geom.*). Hinc ipſi æqualis (§. 155), hoc eſt, circulus polygono circumſcripto minor eſt (§. 18 *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

Area polygoni circumſcripti eſt ad aream circuli ut factum ex radio in perimetrum ad factum ex radio in peripheriam (§. 383 & 388 & §. 371.). Ergo illa ad hanc ut ejus perimeter ad hujus peripheriam (§. 172 *Arithm.*). Sed polygonum majus circulo *per demonſtr.* Ergo & ejus perimeter major peripheria hujus (§. 139 *Arithm.*). *Quod erat quartum.*

THEOREMA 85.

394. *In triangulo rectangulo ABC quadratum hypothenuſæ AC æquale eſt quadratis laterum AHIB & BCED ſimul ſumtis.* Tab. VIII. Fig. 130.

DEMONSTRATIO.

Ducantur rectæ AE & BF (§. 117), itemque BK ipſi CF parallela (§. 243). Quoniam △ ACE cum quadrato CEDB ſuper eadem baſi & inter easdem parallelas (§. 320) exiſtit; hujus dimidium eſt (§. 368). Ex eadem ratione △ BCF eſt dimidium parallelogrammi LCFK. Enimvero quia $x = o$ (§. 94. 139), adeoque $x + y = o + y$ (§. 80 *Arithm.*), BC = CE & AC = CF (§. 94); ideo △ACE = △BCF (§. 169), conſequenter BCED = LCFK (§. 170 *Arithm.*). Eodem modo oſtenditur, eſſe AHIB = ALKG. Quamobrem BCED + AHIB = LCFK + ALFG (§. 80 *Arithm.*) = ACFG (§. 78 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHO-

SCHOLION.

395. *Hoc theorema* Pythagoras *invenit: unde* Pythagoricum *dicitur. Ampliſſimi per Matheſin univerſam eſt uſus: ideo ab illius auditoribus* hecatombe, *hoc eſt, centum boum ſacrificio, redemtum.*

COROLLARIUM 1.

Tab. III. Fig. 31. 396. Quadratum conſtruitur duobus aut pluribus datis ſimul ſumtis æquale, ſi 1. latera duorum AC & AB jungantur ad angulos rectos (§. 234); 2. ſuper ducta hypothenuſa BC erigatur latus tertii DC perpendiculariter [§. *cit.*] ducaturque hypothenuſa BD &c.

COROLLARIUM 2.

397. Quod ſi AB fuerit = 1 & AC = 1; erit CB = $\sqrt{2}$. Si porro fiat AD = CB = $\sqrt{2}$; erit DB = $\sqrt{3}$. Si fiat AE = 2; erit BE = $\sqrt{5}$. Si fiat AF = EB = $\sqrt{5}$; erit FB = $\sqrt{6}$ & ita porro in infinitum. Omnes adeo radices quadratæ ſurdæ ſunt ad unitatem ut linea recta ad aliam rectam, conſequenter numeri irrationales [§. 10 & 266 *Arithm.*].

COROLLARIUM 3.

398. Cum CB ſit diagonalis Quadrati [§. 107]; erit ea ad latus AB ut $\sqrt{2}$ ad 1. Sed $\sqrt{2}$ eſt numerus irrationalis [§. 397], adeoque unitati incommenſurabilis [§. 39 *Arithm.*] conſequenter diagonalis quadrati eſt lateri incommenſurabilis.

COROLLARIUM 4.

399. Dantur adeo quantitates incommenſurabiles, hoc eſt, quarum nulla datur pars aliquota communis [§. 29 *Arithm.*], conſequenter rationes irrationales [§. 153 *Arithm.*]. Et hinc patet non repugnare, ut hæ numeris irrationalibus exprimantur [§. 396].

PROBLEMA 54.

400. *Datis chorda AB & radio AC invenire chordam arcus dimidii AD.* Tab. VIII. Fig. 133.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. A quadrato radii AC ſubtrahatur quadratum chordæ dimidiæ datæ AE: reſiduum eſt quadratum ipſius EC (§. 394).
2. Ex hoc reſiduo extrahatur radix quadrata (§. 248 *Arithm.*), quæ erit EC.
3. Hæc ex radio DC ſubducta relinquit DE.
4. Addantur quadrata AE & DE, ſumma eſt quadratum DA (§. 394).
5. Inde ergo ſi extrahatur radix (§. 248 *Arithm.*) habetur chorda arcus dimidii AD.

E. gr. Sit AB latus hexagoni & radius AC = 10000; erit AB itidem 10000 (§. 338); & AE = 5000 (§. 276).

Quare

Quare

$AC^2 =$	100000000	$AE^2 =$	25000000
$AE^2 =$	25000000	$ED^2 =$	1795600
$CE^2 =$	75000000	$DA^2 =$	26795600
$CE =$	8660	$DA =$	5176
$DG =$	10000		
$DE =$	1340		

PROBLEMA 55.

Tab. VIII. Fig. 134. 401. *Dato latere polygoni regularis inſcripti AB invenire latus circumſcripti FG.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam FG parallela ipſi AB & DC arcum AB bifariam dividit (§. 334); erit $AE = \frac{1}{2} AB$ (§. 276) & EC : AE = CD : DG (§. 253). Quare ſi EC inveſtigetur ut in problemate præcedente; reperietur DG (§. 272 *Arithm.*), cujus duplum eſt latus polygoni circumſcripti FG ob GCD = DCF (§. 169). *Q. e. i. & d.*

E. gr. Sit DC = AB = 10000; erit AE = 5000 & EC = 8660 (§. 400), adeoque DG = 5773. Hinc FG = 11546.

PROBLEMA 56.

402. *Invenire rationem diametri ad peripheriam.*

RESOLUTIO.

1. Quærantur per continuam biſectionem latera polygonorum inſcriptorum (§. 400), donec perveniatur ad latus arcum quantumlibet exiguum ſubtendens.
2. Invento hoc latere quæratur porro latus polygoni ſimilis circumſcripti (§. 401).
3. Multiplicetur utrumque per numerum laterum polygoni, ut habeatur perimeter polygoni tam inſcripti, quam circumſcripti (§. 102).

Erit ratio diametri ad peripheriam circuli major quam ejusdem ad perimetrum polygoni circumſcripti; minor vero, quam ejusdem ad perimetrum inſcripti (§. 393 *Geom.* & §. 189 *Arithm.*). Differentia vero inter utramque perimetrum cognita haud difficulter definitur ratio diametri ad peripheriam circuli in numeris prope veris.

Sit e. gr. radius circuli 1 ſeu (ut latera polygonorum per fractiones decimales exprimere liceat) 10000000000 000000000000000000; reperietur continua a quadrato biſectione latus polygoni 1073741824 laterum inſcripti, vero proxime minus 0.000000000 58151672317068638 7122; circumſcripti autem latus vero itidem proxime majus 0. 000000005 851672

3170

31706863873784. Hinc perimeter circumſcripta 6.2831853071795864915 6537 vero proxime major; inſcripta autem 6.28318530717958645093 vero proxime minor. Cum ergo circuli peripheria intra hos limites contineatur; poſita diametro 2000000000000000 0000, erit peripheria minor quam 6283185307179 5864, major vero quam 6283185307179 5863. Unde ratio prope vera diametri ad peripheriam ut 1000000000000000 ad 314159265358 97932.

SCHOLION 1.

403. *In quadrando circulo ab omni ævo, quo Geometria exculta, deſudarunt ingenia præſtantiſſima: perfectam tamen quadraturam in numeris finitis nemo adhuc dedit, utut noſtra præſertim ætate ars inveniendi egregie promota fuerit. Rationem tamen diametri ad peripheriam in numeris prope veris dederunt multi:* Archimedes (s) *eo fini excogitavit methodum quadrandi circulum per polygona regularia inſcripta & circumſcripta, & polygonis 96 laterum uſus invenit rationem diametri ad peripheriam eſſe ut 7 ad 22 fere. Nimirum ſi diameter 1, perimeter polygoni inſcripti reperitur* $3\frac{10}{71}$; *perimeter vero circumſcripti* $3\frac{1}{7}$. *Ejus veſtigiis inſiſtentes poſteri rationes propiores inveſtigarunt. Nemo autem plus operæ impendit* Ludolpho a Ceulen ſeu Colonienſi (t), *qui tandem reperit, poſita diametro 1 peripheriam eſſe minorem quam* 3.14159265358979323846264 338327950, *ſed majorem quam idem numerus, cyphra ultima in unitatem mutata* (u). *Enimvero quoniam numeri adeo prolixi praxi parum reſpondent; in Geometria practica hodie a plerisque aſſumitur, diametrum eſſe ad peripheriam ut* 100 *ad* 314, *vel in circulis majoribus ut* 10000 *ad* 31415: *in qua proportione* Ptolemæus, Vieta, Hugenius *cum* Ludolpho Colonienſi *conſentiunt.*

COROLLARIUM.

404. Si diameter fuerit 113; erit peripheria (113. 31415): 10000 (§. 272 *Arithm.*) hoc eſt 355 fere.

SCHOLION 2.

405. *Hæc proportio, quam* Adriano Metio *debemus, inter omnes, quæ parvis numeris exprimuntur, accuratiſſima. Quodſi enim numerum* 355 *ſeptem cyphris ad obtinendas fractiones decimales auctum per* 113 *dividas; quotus cum proportione Ludolphina collatus oſtendet eam a vera ne quidem* $\frac{3}{10000000}$ *differre.*

PROBLEMA 57.

406. *Data diametro circuli invenire peripheriam & aream ejus, & data peripheria diametrum.*

RESOLUTIO.

1. Cum detur ratio diametri ad peripheriam (§. 403. 404); una data, invenietur altera (§. 272 *Arithm.*).
2. Peripheria ducta in quartam diametri partem, habetur area circuli (§. 388. 375).

Z F. gr.

(s) in libello de circuli dimenſione prop: 2.
(t) in libro de circulo & adſcriptis.
(u) in Zetematum Geometricorum Epilogiſmo Zetem. 2. p. 92.

E. gr. Sit diameter 56: erit

100 — 314 — 56	Periph. 17584‴
56	$\frac{1}{4}$ Diam. 1400
1884	7033600
1570	17584
Per. 17°5′8″4‴	Area 24°6 1′76″00‴

COROLLARIUM 1.

407. Si diameter 100; peripheria 314 (§. 403), adeoque area circuli 7850 (§. 406). Eſt vero quadratum diametri 10000 (§. 352) ergo hoc ad aream circuli ut 10000 ad 7850, hoc eſt, ut 1000 ad 785 (§. 172 *Arithm.*) quam proxime.

COROLLARIUM 2.

408. Similiter ſi diameter 113, peripheria 355 (§. 404), adeoque area circuli 10028$\frac{3}{4}$ (§ 406). Eſt vero quadratum diametri 12769 (§. 351). Ergo hoc ad illam ut 12769 ad 10028$\frac{3}{4}$, hoc eſt, ut 50976 ad 40115 (§. 170 *Arithm.*) conſequenter (dividendo per 113) ut 452 ad 355 (§. 172 *Arithm.*) quæ Metiana proportio priori accuratior.

COROLLARIUM 3.

409. Area igitur circuli etiam invenitur, ſi ad 1000, 785 & quadratum diametri; vel ad 452, 355 & quadratum diametri numerus quartus proportionalis quæratur (§. 272 *Arithm.*).

Sit e. gr. diameter 560″, erit quadratum ejus 31°36′00″. Quare

1000 — 31°36′00″ — 785
785

1568000
25088
21952

24°61′76″ — 000 Area circuli.

COROLLARIUM 4.

410. Si area circuli minoris GEHF ſubtrahatur ex area majoris concentrici ADBC; relinquitur annulus AD BC GEHF. Tab. VIII. Fig. 135.

PROBLEMA 58.

411. *Data area circuli, invenire diametrum.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur ad 785, 1000 & aream circuli datam 246176 numerus quartus proportionalis 313600 (§. 272 *Arithm.*): qui eſt quadratum diametri (§. 407).
2. Inde extrahatur radix quadrata (§. 248 *Arithm.*): quæ eſt diameter (§. 225 *Arithm.* & §. 352 *Geom.*).

PROBLEMA 59.

412. *Dato radio circuli AC una cum Area AB invenire aream ſectoris ABC.* Tab. VIII. Fig. 133.

RESOLUTIO.

1. Quæratur ad 100, 314 & radium AC numerus quartus proportionalis

lis (§. 272 *Arithm.*): quæ eſt ſemiperipheria (§. 403 *Geom.* & 172 *Arithm.*).

2. Quæratur porro ad 180°, arcum datum AB & ſemiperipheriam inventam numerus quartus proportionalis (§. 272 *Arithm.*): ut habeatur arcus AB in eadem menſura, in qua radius AC datur.

3. Tandem arcus AB ducatur in ſemiradium.

Factum exprimet aream ſectoris (§. 392. 375.)

E. gr. Sit radius 6′; arcus 60°.

100 — 314 — 600‴
6

Semiperiph. 1884|00

180 — 1884 — 60
60) 3 1
628‴ = AB
300 = ½AC

Area 18′84″(00 ACB

PROBLEMA 60.

Tab. VIII. Fig. 133. 413. *Datis altitudine ſegmenti DE & dimidia baſi AE, invenire aream ejus.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur diameter (§. 313).
2. Deſcribatur circulus (§. 127) & in eo applicetur baſis ſegmenti AB.
3. Ducantur radii AC & BC & ope inſtrumenti transportatorii inveſtigetur numerus graduum arcus ADB.
4. Ex data diametro & ejus (§. 403) ad peripheriam ratione inveniatur peripheria (§. 272 Arithm.) &
5. Ex ratione peripheriæ ad arcum ADB & peripheria ipſa longitudo arcus ADB.
6. Hinc porro inveſtigetur area ſectoris ACBDA (§. 412) & trianguli ACB (§. 375).
7. Hoc denique ex illo auferatur: reſiduum erit ſegmentum ADBEA.

E. gr. Sit AB = 600‴, DE = 80‴; erit DH = 1200‴ fere [§. 313], arcus AB = 60° [§. 146]. Ergo area ſectoris 1′88″4 [§. 413]. Jam EC = 52″, AE = 30″. Quare △ ACB = 1′560″, conſequenter ſegmentum AEBDA 3′24″.

COROLLARIUM.

414. Quodſi ſegmentum majus BFA quæratur; triangulum BCA ſectori BFACB addendum. Tab. VIII. Fig. 134.

SCHOLION.

415. *Ne pro invenienda area ſectoris atque ſegmenti peripheriam inveſtigare opus ſit; arcuum gradus atque ſcrupula tam prima, quam ſecunda iſtiusmodi particulis expreſſa in tabula ſubſequente exhibere placet, qualium diameter eſt* 100000. *Conſtructio tabulæ intelli-*

Grad.	Part.per.	Min.	Part.per.
1	872	1	14
2	1745	2	29
3	2617	3	43
4	3490	4	58
5	4363	5	72
6	5235	6	87
7	6108	7	101
8	6981	8	116
9	7853	9	130
10	8726	10	145
20	17453	20	290
30	26179	30	436
40	34906	40	581
50	43633	50	727
60	52359	Sec.	Part.per.
70	61086	2	0
80	69813	3	$\frac{1}{2}$
90	78539	4	$\frac{1}{2}$
100	87266	5	1
110	95993	6	1
120	104719	7	$1\frac{1}{2}$
130	113446	8	$1\frac{1}{2}$
140	122173	9	2
150	130899	10	2
160	139626	20	4
170	148353	30	7
180	157079	40	9
360	314159	50	12

intelligitur ex reſolutione problematis 59 (§. 412) : uſus talis eſt. Sit e. gr. ut in caſu problematis citati diameter 1200‴, arcus 60°. Cum 60 gradibus in tabula reſpondeant 52359 particulæ diametri ; inferatur :

$$100000 — 52359 — 1200$$

$$\begin{array}{r} 1200 \\ \hline 104718\,00 \\ 52359 \\ \hline 628|30800 \\ 1|00000 \end{array}$$

Eſt ergo arcus 628″, ut ſupra (§. cit.) eundem reperimus.

PROBLEMA 61.

416. *Parallelogrammum ABEC ex dato puncto D in duas partes æquales dividere.* Tab. VIII. Fig. 136.

RESOLUTIO.

Fiat EF = AD & ducatur recta DF : erit ADFC = DBEF.

DEMONSTRATIO.

Ducatur diagonalis AE : erit o = x (§. 150) & y = u (§. 222). Sed AD = FE, *per conſtr.* Ergo △ ADG = △ FGE (§. 237). Eſt vero △ ACE = △ AEB (§. 320). Quare ADFC = DBEF. *Q. e. d.*

PROBLEMA 62.

417. *Parallelogrammum atque triangulum in partes quotcunque æquales dividere.* Tab. VIII. Fig. 137. 138.

RESOLUTIO.

1. Dividatur baſis CD in tot partes æquales in quot figura dividenda (§. 259).
2. In parallelogrammo ducantur rectæ

rectæ 1.1, 2.2; in triangulo A1, A2.

DEMONSTRATIO.

Quoniam parallelogramma A1. 1C, 1.2. 2.1, 2.BD 2.2 inter easdem parallelas AB & CD exiſtunt (§. 98); eandem altitudinem habent (§. 215. 216). Sunt itaque in baſium ratione (§. 372) conſequenter ob C1 = 1.2 = 2.D, *per conſtr.* æquales. *Quod erat unum.*

Cum ex uno puncto A ad eandem rectam CD perpendicularis nonniſi unica duci poſſit (§. 206); triangula AC1, 1A2, 2AD eandem altitudinem (§. 216), adeoque baſium rationem habent (§. 372). Sed baſes æquales ſunt, *per conſtr.* Ergo & triangula. *Quod erat alterum.*

PROBLEMA 63.

Tab. VIII. Fig. 39. 418. *Figuram rectilineam quamcunque ABCDE in partes æquales dividere.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur area figuræ (§. 382) & dividatur in tot partes æquales, in quot figura dividi debet, e. gr. in 3.
2. Area partis in noſtro caſu tertiæ ulterius dividatur bifariam.
3. Area trianguli AED ſubtrahatur a parte tertia & reſiduum dividatur per $\frac{1}{2}$AD; erit quotus altitudo trianguli AID priori AED addendum, ut AEDI ſit pars tertia figuræ (§. 377).
4. Quare intervallo hujus altitudinis ducatur parallela ipſi AD (§. 243), quæ ſecabit latus AB in I: quo puncto dato rectam DI ducere licet, tertiam partem figuræ AIDE abſcindentem.
5. Pars tertia dimidia dividatur per $\frac{1}{2}$DI, quotus erit altitudo trianguli IKD ſextam figuræ partem conſtituentis (§. 377).
6. Intervallo igitur hujus altitudinis agatur ipſi ID parallela, ut habeatur punctum K (§. 243).
7. Dividatur quoque dimidia pars tertia figuræ per $\frac{1}{2}$KD ut habeatur altitudo trianguli KLD ſextæ itidem parti figuræ æqualis (§. 377).
8. Quare hujus intervallo denuo agatur ipſi KD parallela (§. 243), ut punctum L determinetur, ducaturque recta KL, quæ partem figuræ tertiam KIDL reſecabit.
9. Si figura in plures quam tres partes reſolvenda; eodem modo ulterius procedendum.

E. gr. Sit AD = 516″, AC = 580″, EH = 154″, DG = 315″, BF = 375″; erit AED = 39732″ ADC = 91350 & ABC = 108750 (§. 375) adeoque area figuræ 239832 (§. 382); ejus pars tertia 79944; pars ſexta 39972.

P.III = 79944
AED = 39732

AID = 4.0.212 (155. + ſeu 156
$\frac{1}{2}$AD = 258) 258 fere = IM.

14.41
1290

15.12
1290

222

Pars VI = 39972 (151″ = KN.
$\frac{1}{2}$DI 264) 264

1357
1320

372
264

108

Pars VI = 39972 (139″ = LO
$\frac{1}{2}$DK 287) 287

11.27
861

26.62
2583

79

SCHOLION 1.

419. *Si AED majus tertia e. gr. parte figuræ; ipſum ab illo ſubtrahi neceſſe eſt & reſiduum erit triangulum a triangulo AED auferendum, ut tertiæ parti figuræ æqualis evadat. Sæpe etiam conſultum eſt, ut prima pars AEDI per duo triangula uti cæteræ determinetur.*

SCHOLION 2.

420. *Ubi in charta diviſio abſoluta; in campo puncta* I, K, L *per quantitatem rectarum* AI, IK & DL *facile determinantur* (§.121).

ERRATA, ita corrigenda.

Pag.	Lin.	Errata	Corrig.	Pag.	Lin.	Errata.	Corrig.	Pag.	Lin.	Errata	Corrig.
103	5	EB	EC	130	2	161	160	164	8	43 §.344	44.§.345
	6	EC	EB	132	24	243	240		33	240	222
	7&	AB	AD	134	11	232	235	165		—	—
	32			139	15	ABC	ADC	167	ult.	EF	BF
104	28	L	K		18	162	161	168	2	98	365
109	9	193	394	142	19	FC	Fe		11	CE	AE
111	11	A'B	NM	147	22	<	>	169	25	ACD	ACB
114	2	13	18	149	2	ACB	ACD		27	adde	DK =
	31	DE	AE		9	145	135				KB; GD
115	20	38	39		11	o = y	u = y	170	15		= AG
122	12	68	66		15	x + o	u + o		17	168	166
123	16	169	174		24	AB	AD		23		
126	18	I	H	153	28	AB & CD	AC & BD	171	18	AB	AE
127	2	HG	HK	163	ult.	341	342		19	—	—
								175	6	396	397

PARS POSTERIOR ELEMENTA GEOMETRIÆ SOLIDÆ PROPONIT.

CAPUT I.

De PRINCIPIIS GEOMETRIÆ SOLIDÆ.

DEFINITIO 1.

421. *Solidum* eſt magnitudo tribus dimenſionibus prædita, ſeu extenſum in longitudinem, latitudinem atque profunditatem.

DEFINITIO 2.

Tab. VIII. Fig. 141. 422. Angulus ſolidus B eſt plurium quam duarum linearum AB, BC, BF in eodem puncto B concurrentium, nec in eodem plano conſtitutorum ad omnes inclinatio.

COROLLARIUM 1.

423. Ergo angulus ſolidus B pluribus quam duobus planis in eodem plano non conſtitutis ABF, FBC, CBA continetur.

COROLLARIUM 2.

424. Quoniam adeo tres minimum lineæ ad angulum ſolidum conſtituendum requiruntur [§ 422]; tres minimum anguli plani ad ſolidum conſtituendum neceſſarii.

COROLLARIUM 3.

425. Ut anguli ſolidi ſint æquales, angulis planis & multitudine & magnitudine æqualibus ac eodem ordine diſpoſitis contineri debent [§. 15 *Arithm.*].

COROLLARIUM 4.

426. Cum anguli ſolidi diſtingui nequeant niſi per planos, quibus continentur (§. 424); ubi plani & numero, & magnitudine æquales ac eodem ordine diſpoſiti fuerint, non diſcernentur ſolidi niſi per compræſentiam. Sunt ergo ſimiles (§. 22 *Arithm.*), conſequenter anguli ſolidi ſimiles ſunt æquales & contra (§. 425).

COROLLARIUM 5.

427. Si anguli plani in eodem puncto concurrentes conficiant ſummam 360 graduum; planum circuli ſternunt (§. 39. 55) adeoque ſolidum non conſtituunt (§. 422). Quare ſumma eorum, qui ultra ſolidum non aſſurgunt, quatuor rectis ſeu 360° (§. 138) minor eſſe debet.

DEFI-

DEFINITIO 3.

428. *Corpus regulare* eſt ſolidum planis regularibus & inter ſe æqualibus terminatum. Reliqua dicuntur *irregularia*.

DEFINITIO 4.

Tab. VIII. Fig. 140. 429. Si figura rectilinea ACB juxta ductum lineæ rectæ AE motu ſibi ſemper parallelo deorſum feratur, *Priſma* ABCFDE deſcribit.

COROLLARIUM 1.

430. Quodlibet adeo priſma habet duas baſes oppoſitas ABC & EDF æquales & circumcirca terminatur tot parellogrammis, quot baſis latera habet. Eſt enim AC ipſi ED parallela atque æqualis *per hypoth.* Ergo & AE parallela ipſi CD [§. 242], conſequenter ACED eſt parallelogrammum.

COROLLARIUM 2.

431. Plana ſectionum priſmatis baſi ACB parallele factarum ſunt inter ſe æqualia. Æquatur enim plano deſcribenti ACB (§. 429 *Geom.* & §. 73 *Arithm.*), ergo & inter ſe æqualia ſunt (§. 79 *Arithm.*).

DEFINITIO 5.

Tab. VIII. Fig. 140. 432. Si planum deſcribens ABCD fuerit quadratum & linea dirigens AE lateri ejus AB æqualis, atque angulus BAE rectus; *Cubus* deſcribitur.

COROLLARIUM 1.

433. Cubus terminatur ſex quadratis inter ſe æqualibus, eſt enim ABCD = EFGH (§. 432 *Geom.* & §. 73 *Arithm.*). Cumque ex eadem ratione AB & EF ſint inter ſe æquales atque parallelæ, angulusque A rectus, erit E = A (§. 222), adeoque ſimiliter rectus (§. 139); conſequenter ABFE quadratum (§. 94), ipſi ABCD æquale (§. 356). Eodem modo oſtenditur, reliqua plana terminantia eſſe quadrata ipſi ABCD æqualia.

COROLLARIUM 2.

434. Plana ſectionum baſi parallele factarum ſunt quadrata ipſi æqualia (§. 432 *Geom.* & §. 73 *Arithm.*), conſequenter etiam æqualia inter ſe (§. 79 *Arithm.*).

DEFINITIO 6.

435. Si planum deſcribens IKLM fuerit parallelogrammum; *Parallelepipedum* deſcribitur. Tab. VIII. Fig. 142.

COROLLARIUM 1.

436. Plana ſectionum baſi parallele factarum ſunt parallelogramma ipſi æqualia (§. 73 *Arithm.*) adeoque & æqualia inter ſe (§. 79 *Arithm.*).

COROLLARIUM 2.

437. Cum LM & NO ſint æquales & inter ſe parallelæ [§. 435 *Geom.* & §. 73 *Arithm.*]. Sunt etiam MO & LN, æquales & parallelæ (§. 242), conſequen-

quenter LMNO parallelogrammum (§. 98). Eodem modo oſtenditur, plana terminantia reliqua eſſe æqualia, terminatur adeo parallelepipedum ſex parallelogrammis, quorum bina oppoſita inter ſe æqualia ſunt.

DEFINITIO 7.

Tab. VIII. Fig 143. 438. Si parallelogrammum CBEF circa latus unum CF gyretur; *cylindrum* deſcribit: *rectum* quidem, ſi CBEF rectangulum aut quadratum; *ſcalenum*, ſi rhombus vel rhomboides.

COROLLARIUM.

439. Dum CBEF cylindrum gignit, CB & FE circulum deſcribunt (§. 127) Baſes ergo cylindri circuli æquales ſunt (§. 94 & ſeqq. itemque 159). Cumque HI ipſi CB parallela ſit eidem æqualis (§. 98. 242); circulum baſibus æqualem deſcribit (§. 127. 159), conſequenter plana ſectionum baſibus cylindri parallele factarum ſunt circuli ipſis æquales.

DEFINITIO 8.

Tab. IX. Fig. 144. 440. Si triangulum KLM circa rectam KL gyratur; *Conus* deſcribitur. Recta KM ejus latus dicitur: KL axis. Si, angulus L rectus; *Conus* vocatur *rectus*: ſi obliquus, *Scalenus*.

COROLLARIUM.

441. Cum PQ ipſi LM parallela ſit eadem minor (§. 253); circulus eodem deſcriptus erit circulo radio LM deſcripto minor (§. 159). Quare cum in rotatione trianguli KLM omnes rectæ, quales ſunt PQ & LM circulos deſcribant (§. 127); planum ſectionis baſi coni parallele factæ circulus eſt eadem minor.

DEFINITIO 9.

442. Si ſemicirculus K juxta diametrum AB gyratur; *Sphæra* deſcribitur, diciturque diameter circuli AB etiam *diameter* atque *Axis Sphæræ*, centrum C etiam *centrum Sphæræ*. Tab. IX. Fig. 145.

COROLLARIUM.

443. Omnes ergo rectæ ex ſphæræ ſuperficie in centrum ductæ ſunt inter ſe æquales (§. 35).

DEFINITIO 10.

444. *Pyramis* eſt ſolidum terminatum circumcirca tot triangulis ADC, DCB & ABD in uno puncto D coëuntibus, quot baſis ABC latera habet. Dicitur autem *triangularis*, *quadrangularis*, *quinquangularis* &c. Si baſis triangularis, quadrangularis, quinquangularis &c. Tab. IX. Fig. 146.

COROLLARIUM.

445. Si *ac*, *cb*, *ba*, lateribus AC, CB, BA baſis ACB parallelæ ducantur; erit DC : D*c* = CA : *ca* = CB : *cb* (§. 253), adeoque CA : *ca* = CB : *cb* (§. 156 *Arithm.*), conſequenter

cum eodem modo oſtendi poſſit eſſe CA : ca = AB : ab, A = a, B = b & c = C (§. 196). Quare ſi pyramis ACDB ſecatur plano baſi parallelo; planum iſtud huic ſimile erit (§. 166).

SCHOLION.

446. *Haud obſcurum eſt, quæ de pyramide triangulari demonſtrata ſunt, eadem quoque de quadrangulari & multangulari quacunque valere.*

DEFINITIO 11.

Tab. IX. Fig. 147. 148. 149. 150. 447. *Tetraëdrum* eſt ſolidum quatuor; *octaëdrum* eſt ſolidum octo; *Icoſaëdrum* eſt ſolidum viginti triangulis æquilateris & æqualibus comprehenſum; *dodecaëdrum* vero ſolidum duodecim pentagonis regularibus & æqualibus contentum.

DEFINITIO 12.

Tab. IX. Fig. 151. 448. *Inclinatio plani* KEGL *ad planum* ACDB eſt angulus HFI, quem efficiunt rectæ HF & FI in puncto F ad lineam ſectionis EG perpendiculares.

COROLLARIUM.

449. Quodſi in alio quocunque puncto f ejusdem lineæ EG erigantur perpendiculares hf in plano AD, & fi in plano KG (§. 201) fiatque hf = HF & fi = FI; erunt HF & hf, FI & fi parallelæ (§. 241), Hh = Ff & Ff = Ii (§. 242), conſequenter Ii = Hh (§. 79 *Arithm.*), & HI parallela ipſi hi (§. 241) etiam eidem æqualis eſt (§. 242). Cum adeo anguli F & f æquales ſint (§. 193); plani ad planum in ſingulis punctis eadem inclinatio eſt (§. 448).

DEFINITIO 13.

450. *Menſura ſolidi* eſt cubus, cujus latus perticæ unius, diciturque *Pertica cubica*. Hæc dividitur in *Pedes, Digitos,* &c. *Cubicos*, hoc eſt, in cubos, quorum latus pedem digitum &c. adæquat.

CAPUT II.

De SOLIDORUM CONSTRUCTIONE.

PROBLEMA 1.

Tab. VIII. Fig. 141. 142. 451. *Cubum ABCBFEHG vel parallelepipedum IKMLQNOP in plano deſcribere.*

RESOLUTIO.

1. Conſtruatur pro cubo rhombus DABC (§. 323); pro parallelepipedo rhomboides IKLM (§. 324).

2. Con-

2. Conſtruantur porro pro cubo quadratum AEFB & rhombus BCGF (§. 321. 323), pro parallelepipedo rectangulum LMON cujus latus LN altitudini æquale & rhomboides MKBO (§. 322. 324).

Cum rhombi pro quadratis, & rhomboides pro rectangulis conſtruantur; ut plana lateralia FBCG & MKPO videri poſſint; erit ſolidum AG cubus (§. 433); ſolidum vero IP parallelepipedum (§. 437).

PROBLEMA 2.

452. *Priſma ACB FDE in plano deſcribere.*

RESOLUTIO.

Tab. VIII. Fig. 140. 1. Deſcribatur baſis, e. gr. triangulum ACB, ſi priſma fuerit triangulare.

2. In A excitetur perpendicularis ad AB altitudini æqualis AE (§. 201).

3. Conſtruantur parallelogramma ACED, BCDF (§. 324).

Erit ACBFDE priſma triangulare (§. 430).

PROBLEMA 3.

Tab. IX. Fig. 146. 453. *Pyramidem DACB in plano deſcribere.*

RESOLUTIO.

1. Deſcribatur baſis, e. gr. triangulum ACB, ſi triangularis fuerit, ita tamen ut latus AB, tanquam a facie averſum, non exprimatur.

2. Super AC & CB conſtruantur triangula ADC & CDB in puncto D coëuntia: ſeu aſſumto vel determinato puncto D, ducantur rectæ AD, CD, BD.

Erit ADBC pyramis triangularis (§. 444).

PROBLEMA 4.

454. *Rete deſcribere, ex quo cubus conſtrui poſſit.* Tab. IX. Fig. 152.

RESOLUTIO.

1. In rectam AB latus cubi quater transferatur.

2. In A erigatur perpendicularis AC lateri cubi AI æqualis (§. 201) & parallelogrammum AC BD compleatur (§. 322).

3. Intervallo lateris cubi determinentur quoque in CD puncta K, M & O.

4. Denique ducantur rectæ IK, LM, NO & BD, producanturque IK & LM utrinque in E & F atque in G & H, donec fiat EI = IK = KF & GL = LM = MH & agantur rectæ EG, FH.

DEMONSTRATIO.

CK & AI ad AC perpendiculares ſunt *per conſtruct.* & AI = CK = AC, *per conſtr.* Ergo ACKI quadratum (§. 321). Non abſimili modo oſtenditur eſſe IKML, ML NO &c.

NO &c. quadrata ipſi A K æqualia. Eſt itaque ADFG rete, ex quo cubus conſtrui poteſt (§. 433). *Q. e. d.*

PROBLEMA 5.

455. *Rete deſcribere, ex quo parallelepipedum conſtrui poteſt.*

Tab. IX. Fig. 153.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. In rectam BD transferatur ex B in H latitudo, ex H in I longitudo, ex I in K iterum latitudo, & ex K in D longitudo parallelepipedi.
2. Super his lineis tanquam baſibus conſtruantur parallelogramma AH, EI, FK & GD, quorum communis altitudo AB altitudini parallepipedi æqualis.
3. Super EF vero & HI conſtruantur parallelogramma EM & HO, quorum altitudo EL & HN latitudini parallepipedi æqualis (§. 322).

Quoniam AEBH = GFIK, EHIF = GCKD, ELMF = HNOI (§. 366); ex hoc reti parallelepipedum conſtruere licet (§. 437). *Q. e. f. & d.*

PROBLEMA 6.

456. *Rete pro priſmate deſcribere.*

Tab. IX. Fig. 144.

RESOLUTIO.

1. Conſtruatur baſis priſmatis e. gr. pro triangulari triangulum KBD.
2. Continuetur latus BD in A & E, donec fiat AB = BK & DE = DK.
3. Super AB, BD & DE conſtruantur parallelogramma AG, BH, DF, quorum altitudo AC altitudini priſmatis æqualis (§. 322).
4. Denique ſuper GH triangulum GIH, ipſi BKD æquale (§. 194).

Ex hoc reti priſma triangulare, nec abſimili modo multangulare quodcunque conſtruetur (§. 430).

THEOREMA 1.

457. *Superficies cylindri recti ſeclusis baſibus æqualis eſt rectangulo ſub peripheria & altitudine cylindri.* Tab. IX. Fig. 155.

DEMONSTRATIO.

Concipiatur arcus EF adeo parvus ut pro linea recta haberi poſſit, ducanturque rectæ EG & FH inter ſe parallelæ & ad EF perpendiculares. Quoniam etiam EF ipſi GH parallelus (§. 438); erit EGHF rectangulum. Superficies itaque cylindri in innumera rectangula, ipſi EFGH æqualia reſolvitur, quorum communis altitudo eſt EG ſeu altitudo cylindri (§. 216), baſes vero junctim ſumtæ peripheriæ æquantur. Ergo eadem æqualis eſt rectangulo ſub peripheria

ria & altitudine cylindri (§. 372). *Q. e. d.*

PROBLEMA 7.

458. *Rete pro cylindro deſcribere.*

RESOLUTIO.

1. Eadem diametro deſcribatur circulus AB & CD.
2. Inveniatur horum peripheria (§. 404).
3. Super BC altitudini cylindri æquali conſtruatur rectangulum (§. 322), ita ut CD ſit peripheriæ inventæ æqualis.

Tab. IX. Fig. 156.

Ex hoc reti conſtrui poteſt cylindrus (§. 457).

THEOREMA 2.

Tab. IX. Fig. 157. 459. *Superficies coni recti ſecluſa baſi æqualis eſt triangulo, cujus baſis peripheria, altitudo latus coni.*

DEMONSTRATIO.

Sit arcus LM infinite parvus adeoque a recta non differens: triangulum KLM pro rectilineo recte habetur, cumque angulus K ſit infinite parvus; anguli L & M a rectis non differunt (§. 225), eſtque adeo KM ad LM perpendicularis (§. 76), conſequenter trianguli KML altitudo (§. 216). Sed coni recti ſuperficies in innumera iſtiusmodi triangula inter ſe æqualia reſolvitur (§. 441. 367). Ergo integra coni ſuperficies æqualis eſt triangulo, cujus altitudo lateri, baſis peripheriæ coni æqualis (§. 372). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

460. Superficies coni recti æquatur ſectori circuli latere coni tanquam radio deſcripti, cujus arcus peripheriæ coni æqualis (§. 392), adeoque ad ſuam peripheriam eam rationem habet, quam diameter baſis ad latus coni (§. 390 *Geom.* & § 157 *Arithm*).

PROBLEMA 8.

461. *Rete pro pyramide deſcribere.*

RESOLUTIO.

Sit e. gr. conſtruenda pyramis triangularis. Tab. IX. Fig. 158.

1. Radio AB deſcribatur arcus BE & ei applicentur tres chordæ BC, CD & DE inter ſe æquales.
2. Super DC conſtruatur triangulum æquilaterum DFC ducanturque rectæ AD & AC.

Ex hoc reti pyramis conſtrui poteſt (§. 445).

SCHOLION.

462. *Si latera baſis pyramidis DC, CF & DF inæqualia fuerint; evidens eſt fieri debere ED = DF & CB = CF. Nec adeo latet, quid facto opus ſit, ſi baſis fuerit polygonum ſive regulare, ſive irregulare.*

PROBLEMA 9.

463. *Rete pro Cono recto deſcribere.*

RESOLUTIO.

Tab. IX. Fig. 159. 1. Diametro baſis AB deſcribatur circulus & diameter producatur in C, donec AC lateri coni æqualis fiat.

2. Quæratur ad 2 AC & AB in numeris determinatas, atque 360° numerus quartus proportionalis (§. 272 *Arithm.*).

3. Radio CA ex centro C deſcribatur arcus DE & ope inſtrumenti transportatorii fiat numero graduum invento æqualis.

Erit ſector CDE cum circulo AB rete pro cono recto (§. 460).

COROLLARIUM.

464. Quodſi ex A in F transferatur latus coni truncati & radio CF arcus GH deſcribatur, tandemque ad 360 numerum graduum arcus GH atque FC numerus quartus proportionalis quæratur & inde diameter circuli IF determinetur; habebitur rete pro cono truncato. Eſt enim CDBAE rete pro cono integro, CGFIH pro cono abſciſſo: ergo DBEHIG pro truncato.

PROBLEMA 10.

465. *Rete pro Tetraëdro deſcribere.*

RESOLUTIO.

Tab. IX. Fig. 160. 1. Conſtruatur triangulum æquilaterum DEF (§. 187).

2. Super ſingulis ejus lateribus conſtruantur adhuc alia itidem æquilatera DAE, EBF & FCD (§. *cit.*).

Ex hoc reti tetraëdrum conſtrui poteſt (§. 447).

COROLLARIUM.

466. Quodſi BC continuetur in H, donec fiat CH = FC & ut in reſolutione problematis conſtruantur triangula æquilatera CHI, CGH, HLI, DCI (§. 187); ex reti octaëdrum conſtrui poteſt (§. 447). Tab. IX. Fig. 161.

PROBLEMA 11.

467. *Rete pro Icoſaëdro deſcribere.*

RESOLUTIO.

1. Conſtruatur triangulum æquilaterum ABC (§. 187). Tab. X. Fig. 162.

2. In baſi AB continuata fiat AB = BF = FG = GH = HD.

3. Per C agatur ipſi AB parallela CE (§. 234.) & fiat AB = CI = IK = KL = LM = ME.

4. Ducantur rectæ CS per C & B, NT per I & F, OV per K & G &c.

5. Similiter ducantur aliæ rectæ YO per B & I, SP per F & K, TQ per G & L &c.

Dico ex hoc reti conſtrui poſſe Icoſaedrum.

DEMONSTRATIO.

Demonſtrandum eſt, viginti triangula ACB, CBI, CIN, BSF, BIF, IOK &c. æquilatera & inter ſe

ſe æqualia eſſe (§. 447): id quod ſequenti ratione pateſcit. Quoniam CE parallela ipſi AD *per conſtruct.* & AC ipſi BI (§. 242); erit $o = x$ & $m = n$ (§. 222), conſequenter CAB = & ∽ CBI (§. 236) & BO parallela ipſi AN (§. 240). Eodem modo oſtenditur eſſe CBI = & ∽ BIF = & ∽ FIK &c, Porro quoniam CI & BF ſunt inter ſe æquales atque parallelæ *per conſtr.* erit NT parallela ipſi CS (§. 242), adeoque $y = u$ & $t = o$ (§. 221), conſequenter CIN = & ∽ CBI (§. 236). Eodem modo oſtenditur eſſe CBI = & ∽ IOK = & ∽ KPL &c. = & ∽ BSF = & ∽ FTG &c. Sunt itaque omnia triangula inter ſe æqualia & æquilatera. *Q. e. d.*

Tab. X. Fig. 163.

PROBLEMA 12.

468. *Rete pro dodecaëdro deſcribere.*

RESOLUTIO.

1. Deſcribatur pentagonum regulare (§. 335).
2. Applicata regula ad A & D ducantur rectæ AG & DF ipſi AB æquales.
3. Eodem modo ducantur AI & HC, BL & KD, BN & EM &c.
4. Intervallo lateris pentagoni fiat interſectio in Q ex G & L, in R ex N & O, in S ex H & F &c. ducanturque GQ & QL, NR & OR, HS & FS &c.
5. Eodem modo conſtruantur pentagona reliqua *a, b, c, d, e, f.*

DEMONSTRATIO.

Demonſtrandum eſt pentagona omnia eſſe regularia ipſique ABC DE æqualia (§. 447). Nimirum AB = GA = BL = GQ = QL, *per conſtr.* Cumque anguli u menſura ſit arcus dimidius ABCD (§. 309); erit is angulo pentagoni E æqualis (§. 299 & 135). Et quoniam eodem modo oſtenditur, eſſe quoque angulum x angulo pentagoni æqualem; erit AbLQG pentagonum regulare (§. 335), idque ob latus commune AB ipſi AED CB æquale (§. 168 & 155). Eadem demonſtratio cum de reliquis pentagonis valeat; evidens eſt, omnia & regularia; & inter ſe æqualia eſſe. *Q. e. d.*

PROBLEMA 13.

469. *Corpora Geometrica conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Delineentur retia in charta ex pluribus foliis compacta (§. 454 & ſeqq.).
2. Delineata exſcindantur, reſecta charta ſuperflua juxta eorum perimetros.
3. Exſciſſa agglutinentur chartæ coloratæ.
4. Hujus ſuperfluum ita reſecetur, ut

Tab. IX. Fig. 160. ut partibus perimetri alternis margines quidam relinquantur, quemadmodum in reti tetraëdri indicavimus.

5. Singula retium intra perimetrum lineamenta, e. gr. EF, FD & DE in reti tetraëdri, ſcalpello profundius imprimantur, ut commode complicari queant.

6. Denique retia complicentur & marginum ope conglutinentur.

THEOREMA 3.

470. *Cubus, Tetraëdrum, Octaëdrum, Dodecaëdrum & Icoſaëdrum ſunt corpora regularia, nec præter hæc quinque aliud poſſibile.*

DEMONSTRATIO.

Cubus ſex quadratis, tetraëdrum quatuor, octaëdrum octo, icoſaëdrum viginti triangulis regularibus, dodecaëdrum denique duodecim pentagonis regularibus inter ſe æqualibus terminatur (§. 433. 447). Sunt igitur hæc corpora regularia (§. 428). *Quod erat unum.*

In tetraëdro tres, in octaëdro quatuor, in icoſaëdro quinque anguli plani trianguli regularis ad ſolidum efficiendum concurrunt (§. 465. 466. 467). Quoniam vero ſumma 6 iſtiusmodi angulorum eſt 360° (§. 228); triangulis regularibus nullum corpus præter illa tria contineri poteſt (§. 427). In cubo tres anguli quadrati ſolidum efficiunt (§. 454). Quare cum ſumma quatuor iſtiusmodi angulorum ſit 360° (§. 138); quadratis nullum corpus continetur niſi cubus. In dodecaëdro tres anguli pentagoni regularis ſolidum conſtituunt (§. 468). Quia vero ſumma quatuor eſt 432°, & ſumma trium in reliquis figuris regularibus 360° major (§. 328), ad angulum vero ſolidum conſtituendum mininum tres plani requirantur (§. 423); pentagonis regularibus nonniſi dodecaëdrum, figuris vero plurium laterum nullum corpus terminari poteſt. Corpora igitur regularia nonniſi quinque ſunt. *Quod erat alterum.*

CAPUT III.
De
DIMENSIONE SOLIDORUM.

PROBLEMA 14.

471. *Superficiem ac ſoliditatem Cubi determinare.*

RESOLUTIO.

1. Cum ſuperficies cubi ex ſex quadratis æqualibus componatur (§. 433);

(§. 433); latus cubi in ſeipſum ducatur & factum per 6 multiplicetur (§. 352).

II. Quodſi idem factum in latus ducatur; prodibit ſoliditas cubi.

Tab. X. Fig. 164. Sit e. gr. latus cubi AB 2°7′4″.

AB = 274	Baſis = 75076
274	AB = 274
1096	300304
1918	525532
548	150152
ABDC = 75076	Solidit. 20570824
6	
Superfic. 450456	

DEMONSTRATIO.

Cum menſuræ ſolidorum ſint cubi, quorum latera perticæ, pedi, digito &c. æqualia (§. 450); ſoliditatem cubi determinaturus invenire debet, quot perticæ, pedes, digiti &c. cubici in eo contineantur. Quodſi jam latus in partes quotcunque æquales diviſum concipiamus, tot erunt cuborum ordines, quot in latere AB partes & in quolibet ordine totidem exiſtent, quot in baſi ACFE quadrata. Quare ſi baſin ACFE, hoc eſt, factum ex latere cubi in ſeipſum (§. 352), per latus cubi AB multiplices; prodibit numerus cuborum minorum, ex quibus major componitur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

472. Si latus cubi fuerit 10, erit ſoliditas 1000: ſi illud 12, hæc 1728. Quare cum pertica Geometrarum ſit 10 pedum, pes 10 digitorum &c. (§. 23); pertica cubica eſt 1000 pedum cubicorum, pes cubicus 1000 digitorum cubicorum &c. Hinc in exemplo noſtro ſoliditas cubi eſt 20°570′824″. Similiter cum pertica Rhenana ſit 12 pedum, pes 12 digitorum; pertica cubica eſt 1728 pedum, pes cubicus 1728 digitorum.

COROLLARIUM 2.

473. Cubi ſunt in ratione triplicata laterum (§. 148 *Arithm.*) & æquales, ſi latera æqualia ſint.

THEOREMA 4.

474. *Parallelepipeda, Priſmata & Cylindri, quorum baſes & altitudines æquantur, æqualia ſunt.*

DEMONSTRATIO.

Concipiantur hæc corpora planis eorum baſibus parallelis ſecari in diſcos craſſitiei quantumlibet exiguæ. Quoniam altitudines æquantur, *per hypoth.* ex uno tot diſci prodibunt, quot ex altero. Cumque plana ſectionum baſi parallelarum eidem æqualia (§. 431. 436. 439); baſes vero illorum corporum inter ſe æquales ſint, *per hypoth.* etiam diſci ſinguli unius corporis diſcis ſingulis alterius æquan-

quantur, conſequenter cum diſci omnes ſimul ſumti cum corporibus idem ſint, corpora tota inter ſe æqualia ſunt (§. 80 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 15.

Tab. VIII. Fig. 142. 475. *Metiri ſuperficiem ac ſoliditatem parallelepipedi.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur area parallelogrammorum ILMK, LMON & OMKP (§. 357. 370).
2. Addantur in unam ſummam & hæc multiplicetur per 2. Erit factum ſuperficies parallelepipedi (§. 437).
3. Quodſi baſis ILMK multiplicetur per altitudinem; prodibit ſoliditas ejusdem.

Sit e. gr. LM = 36′, MK = 15′, MO = 12′ & parallelepipedum rectangulum.

LM = 36	LM = 36	MK = 15
MK = 15	MO = 12	MO = 12
180	72	30
36	36	15
LIKM 540	LMON 432	MOKP 180
MO 12	LIKM 540	
	MOKP 180	
1080		
54	1152	
	2	
6°480′ (Soliditas.	2°304′ Superficies.	

DEMONSTRATIO.

De parallelepipedo rectangulo eadem valet demonſtratio, qua in probl. 14 (§. 471) uſi ſumus. Cum vero obliquangulum æquetur rectangulo ſuper eadem baſi & ejusdem altitudinis (§. 474); ducta baſi in altitudinem habetur quoque ſoliditas obliquanguli. *Q. e. d.*

THEOREMA 5.

476. *Planum diagonale AHFD dividit parallelepipedum ABDCEFG in duo priſmata ADCEFH & ADB GFH inter ſe æqualia.* Tab. X. Fig. 165.

DEMONSTRATIO.

Diagonalis AD dividit parallelogrammum CABD in duo triangula æqualia ACD & DBA (§. 320). Habent ergo priſmata baſes æquales. Quare cum eadem quoque ſit utriusque altitudo DF; ipſa itidem æqualia ſunt (§. 474). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

477. Eſt ergo priſma triangulare dimidium parallelepipedi ſuper eadem baſi & ejusdem altitudinis.

PROBLEMA. 16.

478. *Metiri ſuperficiem ac ſoliditatem priſmatis.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur baſis (§. 375. 382 & 384) & multiplicetur per 2.
2. Quærantur porro areæ parallelogram-

logrammorum priſma circumcirca terminantium & earum ſumma addatur facto antecedenti.

Ita prodit ſuperficies integra priſmatis (§. 430).

Tab. VIII. Fig. 140. 3. Quodſi baſis BAC per altitudinem CD multiplicetur; habebitur ejusdem ſoliditas.

E. gr. Sit BC $= 4^{\circ}3'2''$, AG $= 3^{\circ}5'7''$, CD $= 8^{\circ}6'9''$.

$\frac{1}{2}$BC = 216″
AG = 357

1512
1080
648

Baſis 77112
CD 869

694008
462672
616896

°670′103″28 Solidit.

BC = 432′
CD = 869

3888
2592
3456

ACDE 375408
3

1126224
2 ABC 154224

Superfic. 1280448

DEMONSTRATIO.

Priſma triangulare eſt dimidium parallelepipedi ſuper dupla baſi, ſed ejusdem altitudinis (§. 477). Quodſi vero dupla baſis, hoc eſt parallelogrammum multiplicetur per altitudinem; ſoliditas parallelepipedi prodit (§. 475). Ergo ſi ſimpla, hoc eſt, triangulum per eandem altitudinem multiplicetur; parallelepipedi dimidium, hoc eſt, priſmatis ſoliditas habetur. Omnia priſmata reliqua cum in triangularia reſolvi poſſint; eorum quoque ſoliditas prodit, baſi per altitudinem multiplicata. *Q. e. d.*

SCHOLION.

479. *In exemplo noſtro aſſumſimus, priſmatis baſin eſſe triangulum regulare. Quodſi vero baſis fuerit figura irregularis; parallelogramma lateralia inæqualia ſunt, adeoque area unius cujusque ſigillatim invenienda.*

PROBLEMA 17.

480. *Data diametro AB & altitudine cylindri CF; invenire ſuperficiem ac ſoliditatem ejus.* Tab. VIII. Fig. 143.

RESOLUTIO.

1. Quæratur peripheria baſeos & baſis ipſa (§. 406), hæcque multiplicetur per 2.

2. Peripheria ducatur in altitudinem; quod prodit eſt ſuperficies ſecluſis baſibus (§. 457).

3. Quare ſi eidem addatur factum antecedens; habebitur ſuperficies integra.

4. Ducatur quoque baſis in altitudinem. Factum erit ſoliditas cylindri.

E. gr. Sit AB $= 5^{\circ}6'$, CF $= 24^{\circ}6'$; erit

peripheria = 17584'''
CF = 24600

10550400
70336
35168

Sup. abſq; Baſ. 432 5664''|00
Dupl. Baſ. 49352

Superfic. 481°80'16''
Baſis = 24617''6
CF = 2460

14770560
984704
49352

6°055'929''60 Soliditas.

DEMONSTRATIO.

Cum circulus æqualis ſit triangulo, cujus baſis peripheria, altitudo radius (§. 388); cylindrus æqualis erit priſmati triangulari eandem cum ipſo altitudinem & baſin æqualem habenti (§. 474). Ejus ergo ſoliditas habetur, ducta baſi in altitudinem (§. 478). *Q. e. d.*

THEOREMA 6.

Tab. X. Fig. 166. 481. *Pyramides & Coni ſuper eadem baſi & ejusdem altitudinis ſunt æquales.*

DEMONSTRATIO.

Sit ACB unum e triangulis, quibus terminatur pyramis una; ABD vero unum e triangulis, quibus terminatur altera: ducta EL ipſi AB parallela (§. 243), erit IK = LM (§. 215), adeoque ob CK = DM *per hypoth.* CI = DL (§. 83 *Arithm.*): EF vero & GH erunt latera planorum, quibus ſecantur pyramides, baſibus ſuis parallelorum. Jam cum ſit GEF ∽ CAB & DGH ∽ DAB (§. 253); erit CI : CK = EF : AB & DL : DM = GH : AB (§. 378). Sed CI = DL & CK = DM, *per demonſtr.* Ergo EF : AB = GH : AB (§. 156 *Arithm.*), conſequenter EF = GH (§. 169 *Arithm.*). Cum eodem modo demonſtretur latera reliqua illorum planorum eſſe æqualia atque ob eorum ſimilitudinem cum baſi (§. 445) anguli ipſorum homologi æquales ſint (§. 166 *Geom.* & §. 79 *Arithm.*); ipſa plana, conſequenter etiam diſci quantumlibet exiguæ craſſitiei in eadem a baſi diſtantia, inter ſe æquantur (§. 168. 155) Quoniam itaque ob æquales altitudines *per hypoth.* ex una pyramide tot diſci ſecari poſſunt, quot ex altera; pyramis una alteri æqualis ſit neceſſe eſt (§. 80 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Quodſi triangula ACB & ADB fuerint ſectiones triangulares conorum; erunt EF & GH diametri circulorum baſi communi parallelorum (§. 441). Cum adeo circuli iſti æquales ſint (§. 159);

eodem,

eodem, quo ante, modo demonſtratur, conos æquales eſſe. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 7.

482. *Priſma triangulare in tres pyramides æquales dividi poteſt.*

DEMONSTRATIO.

Tab. X. Fig. 167. Pyramides ABCF & DFEA habent altitudinem eandem atque baſes ACB & DFE æquales (§. 430). Sunt ergo æquales (§. 481). Similiter pyramides ACBF & FEBA, quia æquales baſes CFB & BEF (§. 320) & eandem altitudinem habent, ob verticem communem A & baſes in eodem plano, æquales ſunt (§. 481). Quamobrem tres iſtæ pyramides inter ſe æquantur (§. 79 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

483. *Si ex ligno paretur priſma & debita ratione ſecetur; demonſtratio captui tyronum magis accommodatur.*

COROLLARIUM 1.

484. Pyramis triangularis eſt tertia pars priſmatis ſuper eadem baſi & ejusdem altitudinis.

COROLLARIUM 2.

485. Et quoniam multangulare quodvis in triangularia reſolvi poteſt; quælibet pyramis eſt pars tertia priſmatis ſuper eadem baſi & ejusdem altitudinis (§. 178 *Arithm.*).

COROLLARIUM 3.

486. Quia conus pro pyramide infinitangula haberi poteſt & cylindrus pro priſmate infinitangulo, conus pars tertia eſt cylindri ſuper æquali baſi & ejusdem altitudinis.

PROBLEMA 18.

487. *Metiri ſuperficiem ac ſoliditatem pyramidis & coni.*

RESOLUTIO.

Quæratur ſoliditas priſmatis vel cylindri eandem cum pyramide vel cono baſin habentis (§. 478. 480), inventaque per 3 dividatur: quotus erit ſoliditas pyramidis vel coni (§. 488. 486).

E. gr. Si ſoliditas priſmatis fuerit 67010328‴, ut in probl. 16 (§. 478); erit ſoliditas pyramidis 22336776‴. Si ſoliditas cylindri fuerit 605592960‴ ut in probl. 17 (§. 480); erit ſoliditas coni 201864320.

Superficies pyramidis habetur, Tab. IX. Fig. 146. ſi tam baſis ABC, quam triangulorum lateralium ACD, CBD, BDA areæ inveſtigentur (§. 375) atque in unam ſummam colligantur.

Coni denique recti ſuperficies prodit, peripheria baſeos in latus ejus ducta (§. 459) & baſi, qui circulus eſt, eidem addita.

E. gr. Sit diameter coni NM = Tab. IX. Fig. 144. 56″, erit peripheria 17584‴, baſis 246176″ (§. 406). Sit altitudo KL = 246″.

$= 246''$. Quoniam $LM = \frac{1}{2}NM = 28''$ & $KM^2 = KL^2 + LM^2 = 60516 + 784 = 61300$ (§. 394); erit $KM = 2474'''$ (§. 248 *Arithm.*), conſequenter ſuperficies coni ſecluſa baſi 4°310′28″16‴0 & hinc integra 455645760‴.

PROBLEMA 19.

Tab. X. Fig. 168. n. 1. 488. *Metiri ſuperficiem ac ſoliditatem coni truncati; datis ejus altitudine CH & diametris baſium AB & CD.*

RESOLUTIO.

1. Datis diametris baſium CD & AB inveniantur peripheriæ (§. 406).
2. Ad quadratum altitudinis CH addatur quadratum ſemidifferentiæ radiorum AH & ex aggregato extrahatur radix (§. 248 *Arithm.*), ut habeatur latus AC.
3. Semiſumma peripheriarum multiplicetur per latus AC.

Sit e. gr. $AB = 8'$, $CD = 6'$, $CH = 10'$, erit $AH = 1'$

100 — 314 — 8′
8
—————
2512‴ periph. maj.
$CH^2 = 100'$
$AH^2 = 1$
—————
$AC^2 = 101$
Ergo $AC = 1005'''$ fere

100 — 314 — 6′
6
—————
1884‴ Periph. min.
2512 Periph. maj.
—————
4396 Summa.
—————
2198 Semiſumma.
1005 AC
—————
10990
219800
—————
2°2′08″99‴0 Superfi. coni trunc;

DEMONSTRATIO.

Superficies coni truncati relinquitur, ſi ſuperficies coni minoris ECD a ſuperficie majoris AEB ſubtrahitur. Sed ſuperficies minoris æquatur triangulo, cujus baſis HI peripheria diametro CD deſcripta altitudo MK latus EC; ſuperficies majoris vero triangulo, cujus baſis NO peripheria diametro AB deſcripta altitudo ML latus AE (§. 460). Cum vero prior ſit pars poſterioris; illa ex hac ſubtracta, relinquitur pro ſuperficie coni truncati trapezium parallelarum baſium HION, cujus quidem baſes HI & NO peripheriis diametro CD itemque AB deſcriptis æquales ſunt, altitudo KL vero latus AC exiſtit. Habetur igitur hæc ſemiſumma Tab. X. Fig. 168. n. 1. n. 2.

ſumma dictarum peripheriarum in AC ducta (§. 382). *Q.e.d.*

Soliditatem inventurus, demiſſa ex C perpendiculari CH ob CG & HF parallelas *per hypoth.* cum ſit CH = GF (§. 215) & CG = HF (§. 223).

1. Inferat (§. 253): ut differentia ſemidiametrorum AH ad altitudinem coni truncati CH, ita ſemidiameter major AF ad altitudinem coni integri FE, per probl. 29 Arithm. (§. 272 *Arithm.*) inveniendam.
2. Ex hac inventa ſubducat altitudinem coni truncati GF, ut relinquatur altitudo ablati EG.
3. Quærat ſoliditatem coni CED & AEB (§. 487).
4. Denique illam ex hac auferat; reſidua erit ſoliditas coni truncati ACDB.

E. gr. Sint omnia, ut ante: erit FE = 40′, & hinc EG = 30.

Periph. major	2512″
$\frac{1}{4}$AB	200
Baſis maj.	502400
EF	4000
	2009600000
3	
Conus AEB	669866666$\frac{2}{3}$
Conus CED	282600000
Conus trunc.	387266666$\frac{2}{3}$

Periph. min.	1884
$\frac{1}{4}$CD	1$\frac{1}{2}$
	942
	1884
Baſ. min.	282600
$\frac{1}{3}$ EG	1000
Con. CED	282600000

THEOREMA 8.

489. *Sphæra æquatur pyramidi, cujus baſis æqualis ſuperficiei, altitudo autem radio ſphæræ.*

DEMONSTRATIO.

Concipiatur ſuperficies ſphæræ in quadratula infinite exigua reſoluta, quæ a planis non amplius diſſident, & ex centro concipiantur ad eorum angulos ductæ rectæ. Evidens eſt ſphæram conſtare ex innumeris pyramidibus quadratis in centro coëuntibus quorum altitudines a radiis differunt quantitate inaſſignabili, hoc eſt, revera nulla, baſes vero ſimul ſumtæ ſuperficiei ſphæræ æquantur. Tota igitur ſphæra recte habetur pro pyramide, cujus baſis ſuperficies, altitudo radius ſphæræ. *Q. e. d.*

THEOREMA 9.

490. *Sphæra eſt ad cylindrum ſuper* Tab. X. Fig. 163.

per, æquali baſi & ejusdem altitudinis ut 2 ad 3.

DEMONSTRATIO.

Si quadratum ABCD cum quadrante DBC & triangulo ADC inſcripto circa latus DC gyretur, ipſum quidem cylindrum (§. 438) quadrans hemiſphærium (§. 442), triangulum conum (§. 440) deſcribit. Altitudo horum corporum cum eadem ſit nempe DC (§. 214); ſi ea in diſcos quantumlibet exiguæ craſſitiei ſecentur, numerus eorum in omnibus idem erit. Sit jam EH ſemidiameter unius diſci cylindri; erit EG ſemidiameter diſci reſpondentis in hemiſphærio, EF ſemidiameter diſci in cono. Cum vero hi diſci ſint circuli (§. 439. 441. 442); erunt ipſi inter ſe ut quadrata rectarum EH, EG & EF (§. 386), hoc eſt, cum ſit ob paralleliſmum rectarum DC & AB (§. 320) itemque EH & CB *per hypoth.* EH = CB (§. 242) = CG (§. 38), atque ob CD : DA = EC : EF (§. 253) & CD = DA (§. 94); EC = EF, ut quadrata rectarum CG, EG & EC. Quare ſi diſcum coni a diſco cylindri ſubtrahas, relinquitur diſcus ſphæræ (§. 394). Idem cum valeat de ſingulis diſcis ex reliquis diviſionibus emergentibus, ſoliditas ſphæræ relinquetur ſoliditate coni ex ſoliditate cylindri ſubducta. Eſt vero Conus $\frac{1}{3}$ Cylindri (§. 486). Ergo ſphæra duas ejusdem partes tertias continet. *Q. e. d.*

THEOREMA 10.

491. *Cubus diametri eſt ad ſphæram propemodum ut 300 ad 157.*

DEMONSTRATIO.

Si diameter ſphæræ 100, cubus ejus 1000000 (§. 471) & cylindrus eandem cum ſphæra baſin & altitudinem habens 785000 (§. 480), conſequenter ſphæra 1570000 : 3 (§. 490). Eſt itaque cubus diametri ad ſphæram ut 1000000 ad 1570000 : 3, hoc eſt, ut 300 ad 157 (§. 172 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

492. *Dico cubum diametri eſſe ad ſphæram propemodum ut* 300 *ad* 157. *In demonſtratione enim aſſumitur ratio prope vera diametri ad peripheriam* 100 : 314 (§. 401).

THEOREMA 11.

493. *Superficies ſphæræ eſt quadrupla circuli radio ſphæræ deſcripti.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam ſphæra æqualis eſt pyramidi, cujus baſis eſt ſuperficies, altitudo radius ſphæræ (§. 489); ſuperficies ejus habetur, ſi ſoliditas per tertiam ſemidiametri aut

ſextam

ſextam diametri partem dividitur (§. 487). Jam ſi diameter 100, area circuli 7850 (§. 407), ſoliditas ſphæræ 1570000 : 3 (§. 490) : qua per ſextam diametri partem 100 : 6 diviſa, prodit ſuperficies 31400 circuli radio ſphæræ deſcripti 7850 manifeſte quadrupla. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

494. Si diameter 100, peripheria 314 (§. 402). Superficies ergo ſphæræ 31400 habetur, peripheria in diametrum ducta, conſequenter rectangulo æqualis eſt, cujus baſis peripheria circuli radio ſphæræ deſcripti, altitudo diameter ſphæræ (§. 357).

PROBLEMA 20.

495. *Data diametro ſphæræ, invenire ſuperficiem ac ſoliditatem ejus.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur peripheria circuli radio ſphæræ deſcribendi (§. 406).
2. Inventa ducatur in diametrum. Factum eſt ſuperficies ſphæræ (§. 494).
3. Hoc ſi porro multiplicetur per ſextam diametri partem; prodibit ſphæræ ſoliditas (§. 489. 487).

E. gr. Sit diameter 5600'', erit

Periph. Circuli 17584'''
Diam. 5600

10550400
87920

Superf. Sphær. 98470400''''
Diameter 5600''

59082240
4923520

551434240

15 4
551434240(91905706⅔ Solid. Sphæ.
66666666

Aliter.

1. Quæratur cubus diametri 175616000'' (§. 471).
2. Inveniatur porro ad 300, 157 & cubum inventum 175616000'' numerus quartus proportionalis 91905706⅔ (§. 272 *Arithm.*), qui erit ſoliditas ſphæræ (§. 491).

SCHOLION.

496. *Segmenta ſphæræ ac ſectores inferius in Analyſi facilius invenire docemus quam hoc loco fieri poterat.*

PROBLEMA 21.

497. *Metiri ſoliditatem ac ſuperficiem quinq; corporum regularium.*

RESOLUTIO.

Cubi ſoliditas inveſtigatur per probl. 14. (§. 471). Tetraëdrum

 cum

cum ſit pyramis & Octaëdrum pyramis geminata, icoſaëdrum vero ex viginti pyramidibus triangularibus, dodecaëdrum ex duodecim quinquangularibus, quarum baſes in ſuperficie icoſaëdri & dodecaëdri ſunt, vertices in centro coëunt (§. 444. 447); horum corporum ſoliditas habetur per probl. 18 (§.487). Superficies eorundem prodit, ſi area figuræ unius ex terminantibus ipſa quæratur (§. 375. & 384) & inventa per numerum, a quo corpus denominatur, multiplicetur, nempe pro tetraëdro per 4, pro hexaëdro ſeu cubo per 6, pro octaëdro per 8, pro dodecaëdro per 12, pro icoſaëdro per 20 (§. 447).

PROBLEMA 22.

Tab. X. Fig. 170. 498. *Corporis irregularis cujuscunque ſoliditatem invenire.*

RESOLUTIO.

1. Immittatur corpus parallelepipedo cavo eique aqua aut arena ſuperfundatur & altitudo aquæ ſeu arenæ AB notetur.
2. Corpore extracto, obſervetur denuo aquæ aut arenæ complanatæ altitudo AC.
3. Subtrahatur AC ex AB, ut relinquatur BC.
4. Quoniam corpus irregulare æquatur parallelepipedo, cujus baſis FCGF, altitudo BC; ejus ſoliditas invenietur per probl. 15 (§.475).

Sit e. gr. AB 8′, AC 5′; erit BC 3′. Sit porro DB 12′, BE 4′; erit ſoliditas corporis 144′.

SCHOLION 1.

499. *Quodſi corpus in æqualiculo iſtiusmodi commode deponi nequeat, e. gr. ſi ſtatuam certo loco affixam dimetiri jubeamur; priſma quadrangulare aut parallelepipedum circa ipſum conſtrui debet ex aſſeribus. Reliqua peragenda ſunt ut ante.*

COROLLARIUM.

500. Inveniri ergo poteſt, quot linearum cubicarum ſit aliquod lignum, ſaxum, metallum aut materia alia quæcunque pendens libram unam.

SCHOLION 2.

501. *Hinc in uſus futuros conſtrui poteſt Tabula gravitatem diverſorum corporum oſtendens ſecundum libras, quas pendit eorum pes cubicus: id quod per praxes hydroſtaticas aliis adhuc modis fieri poteſt, uti ſuo loco oſtendemus.*

PROBLEMA 23.

502. *Invenire ſoliditatem corporis cavi.* Tab. X. Fig. 171.

RESOLUTIO.

Caſus I. Si corpus cavum in numero Geometricorum non contineatur, reſolutio eadem, quæ problematis præcedentis (§.498).

Caſus II. Si corpus cavum fuerit parallelepipedum, priſma, cylindrus, ſphæra, pyramis vel conus;

nus; ſoliditas primum totius corporis cavitate incluſa, dein cavitatis, quæ eandem cum corpore figuram habere ſupponitur, per methodos ſupra traditas (§. 475. 478. 480. 487. 495) inveniatur: hac enim ex iſta ſubducta, relinquitur ſoliditas corporis cavi.

Sit e. gr. ſoliditas cylindri cavi AB CD invenienda, ſitque diameter totius corporis AB 56″, longitudo AC 2°4′6″; erit ſoliditas cylindri incluſa cavitate 505′592″960‴. Sit diameter cavitatis 500‴; erit ſoliditas 482′775″000‴: quæ ex ſupra inventa ſubducta relinquit ſoliditatem corporis cavi 22′817″960‴. Tab. X. Fig. 171.

CAPUT IV.

De SIMILITUDINE AC RATIONE SOLIDORUM.

THEOREMA 12.

503. *Corpora ſimilia ſunt, quorum plana terminantia homologa ſimilia exiſtunt.*

DEMONSTRATIO.

Cum corpora ex planorum terminantium concurſu gigni poſſe concipiamus; eodem modo determinantur, ſi plana terminantia homologa fuerint ſimilia (§. 115). Sunt igitur & ipſa ſimilia (§. 116). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

504. Cum in planis ſimilibus anguli homologi ſint æquales (§. 166), anguli vero ſolidi homologi ex concurſu planorum homologorum oriantur (§. 424); in corporibus ſimilibus anguli ſolidi homologi æquales ſunt (§. 425).

COROLLARIUM 2.

505. Quoniam in planis ſimilibus latera homologa ſunt proportionalia (§. 166); ſi e. gr. juxta parallelepipedum ABDCEHGF aliud ſimile abdcehgf (quod in tabula non expreſſimus) poni imaginemur, erit AB : BD = *ab*: *bd* & DB : BG = *db*:*bg*. Quamobrem ex æquo AB : BG = *ab* : *bg* (§. 184 *Arithm.*). Cum adeo ſit AB: *ab* = BD: *bd* & AB : *ab* = BG : *bg* (§. 164 *Arithm.*). Corporum ſimilium longitudines AB & *ab*, latitudines DB & *db* itemque altitudines BG & *bg* in eadem ratione exiſtunt. Tab. X. Fig. 165.

COROLLARIUM 3.

506. Cubus ſex quadratis æqualibus

terminatur (§. 433). Sunt vero quadrata omnia ſimilia (§. 94. 139. 166). Ergo cubi omnes ſunt ſimiles.

THEOREMA 13.

507. *Cylindrorum & Conorum ſimilium altitudines ſunt ut radii baſium; axes ſunt itidem ut radii baſium & iis ſub eodem angulo junguntur.*

DEMONSTRATIO.

Tab. VIII. Fig. 143. IX. Fig. 144. Cylindri & Coni ſimiles eodem modo determinantur (§. 116) adeoque per revolutionem parallelogrammorum & triangulorum ſimilium circa latus unum generantur (§. 115. 438). Parallelogrammorum vero & triangulorum ſimilium altitudines ſunt baſibus ſuis (§. 378) proportionales; baſes vero illæ ſunt radii baſium, altitudines illæ ſunt altitudines Cylindrorum & Conorum (§. 438. 440). Ergo Cylindrorum & conorum ſimilium altitudines ſunt ut radii baſium. *Quod erat unum.*

Porro cum in parallelogrammis & triangulis ſimilibus latera homologa ſint proportionalia & anguli homologi æquales (§. 166); unum autem parallelogrammi latus CF ſit axis, alterum FE radius baſis cylindri (438); itidemque unum trianguli KL axis, alterum LM radius baſis Coni (§. 440): axes cylindrorum & conorum ſimilium ſunt ut radii baſium & iis ſub eodem angulo junguntur. *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

508. *In cylindris rectis axis CF ad radium FO (§. 438) & in conis rectis axis KL ad radium LM (§. 440) perpendicularis eſt adeoque cum altitudine coincidit (§. 216). Unde poſterius ex prima demonſtrationis parte de conis rectis ſtatim patet. Sed præſtat attuliſſe demonſtrationem univerſalem.* Tab. VIII. Fig. 143. IX. 144.

THEOREMA 14.

509. *Omnis ſphæra eſt alteri ſimilis.* Tab. IX. Fig. 145.

DEMONSTRATIO.

Omnem ſemicirculum eſſe alteri ſimilem, patet ex demonſtratione theorematis 2 part. 1 (§. 131). Sed ſphæra deſcribitur ſemicirculo K circa diametrum AB gyrato (§. 442); omnes igitur ſphæræ eodem modo determinantur (§. 115), adeoque ſimiles ſunt (§. 116). *Q. e. d.*

THEOREMA 15.

510. *Omnia priſmata, parallelepipeda, cylindri, pyramides & coni ſunt in ratione compoſita baſium & altitudinum.*

DEMONSTRATIO.

Sunt enim ut facta ex baſibus in altitudines (§. 475. 478. 480. 487. *Geom.* & §. 172 *Arithm.*): ergo in ratione compoſita baſium & altitudinum (§. 148 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROL-

COROLLARIUM 1.

511. Quare ſi baſes fuerint æquales, altitudinum; ſi altitudines, baſium rationem habent (§. 172 *Arithm.*).

COROLLARIUM 2.

512. Cylindrorum & conorum baſes ſunt circuli (§. 438 440). Circuli ſunt in ratione duplicata diametrorum (§. 387). Ergo cylindri & coni quicunque ſunt in ratione compoſita ex directa altitudinum & duplicata diametrorum (§. 510); & ſi fuerint æque alti, ut quadrata diametrorum (§. 511. 286);

COROLLARIUM 3.

513. Quare ſi in cylindris altitudo fuerit diametro baſium æqualis; erunt in ratione triplicata diametrorum baſium (§. 148 *Arithm.*).

PROBLEMA 24.

514. *Invenire cubum dato corpori, cujus ſoliditas inveniri poteſt, æqualem, vel qui ſit ad hoc in data quacunque ratione, e. gr. ut 3 ad 1, vel ut 1 ad 4.*

RESOLUTIO.

1. Inveſtigetur ſoliditas corporis per problemata *cap. præc.* tradita.
2. Ex ea vel ejus multiplo aut ſubmultiplo deſiderato, e. gr. triplo aut ſubquadruplo, ex trahatur radix cubica (§. 258 *Arithm.*), quæ erit latus cubi deſiderati (§. 471 *Geom.* & §. 235 *Arithm.*).

E. gr. Sit ſoliditas cylindri 107°171′ 875″; reperietur latus cubi æqualis 4°7′5″.

PROBLEMA 25.

515. *Dato corpore, cujus ſoliditas inveniri poteſt, invenire dimenſiones alterius ipſi æqualis dati generis & altitudinis vel baſeos.*

RESOLUTIO.

1. Inveniatur ſoliditas corporis per problemata *cap. præc.* tradita.
2. Dividatur per baſin datam, quotus erit altitudo in priſmatis, parallepipedis & cylindris (§. 475. 478. 480 *Geom.* & §. 194 *Arithm.*), tertia vero altitudinis pars in pyramidibus atque conis (§. 487 *Geom.* & §. *cit.* *Arithm.*).
3. Si altitudo detur, ſoliditas corporis inventa dividatur per eam, ut habeatur baſis priſmatum, parallelepipedorum & cylindrorum; per tertiam altitudinis partem, ut habeatur baſis pyramidum & conorum (§§. *cit.*).
4. Pro parallelepipedis & priſmatis triangularibus & quadrangula-

gularibus area baſeos diſcerpatur in factores duos, ut habeatur longitudo & altitudo (§. 357. 370. 429. 436) quorum alteruter pro baſi triangulari priſmatis per 2 multiplicanda (§. 375) & inſuper pro multangularis baſi alter per numerum laterum dividendus, ut prodeat latus figuræ polygonæ (§. 383).

5. Pro Cylindro & cono ex baſi inventa porro quærenda ejus diameter (§. 411).

E. gr. Sit ſoliditas alicujus corporis 3°456′978″. Inveniri debet cylindrus, cujus altitudo 2°4′6″. reperietur baſis 1°40′53″ fere; diameter 1185‴.

THEOREMA 16.

516. *Corpora ſimilia, priſmata, parallelepipeda, cylindri, pyramides atque coni ſunt in ratione triplicata homologorum laterum, itemque altitudinum.*

DEMONSTRATIO.

Sunt enim in ratione compoſita baſium & altitudinum (§. 510). Sed baſes ſunt in ratione duplicata homologorum laterum (§. 385) & altitudines lateribus baſium homologis proportionales ſunt (§. 505). Ergo corpora ipſa in ratione triplicata laterum homologorum, itemque altitudinum, exiſtunt (§. 148 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 17.

517. *Sphæræ ſunt ut cubi diametrorum.*

DEMONSTRATIO.

Sit circulo DAEB quadratum GFIH circumſcriptum (§. 334). Quodſi ſemicirculus AEB cum quadrato dimidio AGHB circa axem communem AB in orbem moveatur, ille ſphæram, hoc cylindrum deſcribet, cujus altitudo AB diametro baſis IH æqualis (§. 442. 438). Quare ſi ponamus circulum adhuc alium cum quadrato ſimiliter circumſcripto; quoniam ex theorematis 2 part. 1. demonſtratione conſtat (§. 131), omnem ſemicirculum eſſe alteri ſimilem & AB ad BH utrobique eſt ut 1 ad 2, adeoque rectangulum unum alteri ſimile (§. 166); inde generabitur ſphæra & cylindrus alteri ſimilis (§. 115. 116). Cum adeo diſtingui hæc corporum aggregata nequeant niſi per compræſentiam (§. 22 *Arithm.*); erit cylindrus unus ad ſuam ſphæram ut alter ad ſuam (§. 123 *Arithm.*), conſequenter ſphæræ ſunt inter ſe ut iſti cylindri (§. 164 *Arithm.*). Habent ergo rationem triplicatam diametrorum (§. 513) hoc eſt, ut cubi earundem exiſtunt (§. 238 *Arithm.*). *Q. e. d.* Tab. VI. Fig. *

THEO-

THEOREMA. 18.

518. *Æqualia parallelepipeda, priſmata, cylindri, coni & pyramides reciprocant baſes & altitudines.*

DEMONSTRATIO.

Si enim hæc corpora fuerint æqualia, facta ex baſibus in altitudinem æqualia ſunt (§. 475 &c.). Quamobrem altitudo corporis A eſt ad altitudinem alterius B uti reciproce baſis ipſius B ad baſin ipſius A (§. 269 *Arithm*). *Q. e. d.*

THEOREMA. 19.

Tab. X. Fig. 172. n. 1.

519. *Cylindrus, cujus altitudo æqualis eſt diametro baſeos, eſt ad cubum diametri ut 785 ad 1000.*

DEMONSTRATIO.

Si diameter AB 100, erit baſis 7850 (§. 406). Et quoniam altitudo DC = AB, *per hypoth.* ſoliditas cylindri, 785000 (§. 480). Sed cubus diametri AB = 1000000 (§. 471). Ergo Cylindrus ad cubum diametri ut 785 ad 1000 (§. 172 *Arithm.*). *Q. e. d.*

CAPUT V.

De

STEREOMETRIA DOLIORUM.

PROBLEMA 26.

520. *Virgulam conſtruere, cujus ope haud difficulter invenitur numerus menſurarum fluidi alicujus, e. gr. vini, cereviſiæ &c. in vaſe cylindrico contenti.*

RESOLUTIO.

Tab. X. Fig. 172. n. 1. 2.

1. Diameter vaſis cylindrici, AB DA uni menſuræ, qua ad fluida menſuranda utimur, æqualis AB jungatur lineæ indefinitæ A 7 ad angulos rectos (§. 234).
2. Ex A transferatur in 1 rectæ AB æqualis; erit B 1 diameter vaſis, quod duas menſuras capit, ſed eandem cum vaſe priore altitudinem habet.
3. Fiat A 2 = B 2, erit B 3 diameter vaſis tres menſuras capientis, ſed ejusdem denuo altitudinis cum vaſe, quod nonniſi unam capit. Eodem modo inveniuntur diametri vaſorum capaciorum A 4, A 5, A 6, A 7 &c.
4. In unum virgulæ latus transferantur diviſiones inventæ A 1, A 2, A 3, A 4 &c. in alterum vero altitudo cylindri uni menſuræ æqualis, quoties fieri poteſt. Ita virgula conſtructa eſt.

Aliter.

Aliter.

Diametri A2, A3, A4, A5, A6, A7 &c. etiam per calculum inveniri in numeris & in particulis diametri AB per modum ſcalæ Geometricæ diviſæ (§. 161) centeſimis aut milleſimis determinari poſſunt. Sit nempe diameter AB = 1000; erit ejus quadratum 1000000. Ex hujus duplo extracta radix quadrata (§. 248 *Arithm.*) erit A 2. Si ex triplo, quadruplo, quintuplo &c. radix extrahatur; prodibunt diametri A3, A4, A5 &c. quem in uſum conſtructa eſt tabula ſequens:

Menſ.	Diam.	Menſ.	Diam.	Menſ.	Diam.
1	1.000	17	4.123	33	5 744
2	1.414	18	4.242	34	5.831
3	1.732	19	4.359	35	5 916
4	2 000	20	4.472	36	6.000
5	2.236	21	4.582	37	6.082
6	2.449	22	4 690	38	6.164
7	2.645	23	4.796	39	6.244
8	2 828	24	4 898	40	6,324
9	3.000	25	5.000	41	6.403
10	3.162	26	5.099	42	6.480
11	3.316	27	5.196	43	6.557
12	3.464	28	5.291	44	6.633
13	3.605	29	5.385	45	6.708
14	3.741	30	5.477	46	6.782
15	3.873	31	5.567	47	6.855
16	4.000	32	5.657	48	6.928

DEMONSTRATIO.

Cylindri eandem altitudinem habentes ſunt inter ſe ut quadrata diametrorum (§. 512). Ergo quadratum diametri vaſis duas, tres, quatuor &c. menſuras capientis eſt duplum, triplum, quadruplum &c. quadrati diametri vaſis menſuram nonniſi unam capientis. Quare ſi inde radices extrahantur, habebuntur in reſolutione altera diametri ipſæ (§. 235 *Arithm.*). Quoniam vero in prima AB = A1, erit ipſius B1 quadratum duplum, quadratum ipſius B2 triplum, quadratum ipſius B3 quadruplum &c. quadrati ipſius A1 (§. 394). Unde denuo patet eſſe rectas A2, A3, A4 &c. diametros vaſorum quæſitas. Quodſi itaque has diviſiones ad diametrum vaſis cylindrici applices; illico conſtabit, quot menſuras capiat vas cylindricum eandem cum iſto baſin, ſed altitudinem illius habens, quod unam menſuram capit. Quare ſi porro ope alterius diviſionis in virgula factæ inveſtiges, quoties altitudo unius menſuræ in altitudine vaſis dati contineatur & per hunc numerum diametrum modo inventam multiplices; prodibit numerus menſurarum cavitatem vaſis dati adimplentium. *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

521. *E. gr. Sit diameter vaſis cylindrici 8, altitudo 12; erit numerus menſurarum, quas capit, 96.*

SCHO-

SCHOLION 2.

522. *Altitudo cylindri menſuram unam capientis quo minor aſſumitur, eo diameter baſis ſit major. Unde tam ipſa, quam diametri cylindrorum plures menſuras capientes poſtea facilius in ſuas minutias ſubdividuntur.* Bayerus (x) *ſuadet, ut nonniſi unius digiti aſſumatur.*

SCHOLION 3.

523. *Inveniuntur autem diametri vaſorum unam vel plures partes decimas menſuræ capientium, ſi decima vel plures decimæ partes vaſis, unam menſuram capientis, dividantur per hujus altitudinem, ut habeatur baſis cylindri circularis* (§. 480) : *etenim hac data diameter habetur per probl. 58* (§. 411). *Eodem modo inveniuntur diametri pro ſcrupulis vaſorum duas & plures menſuras capientium.*

Diametri pro menſuris integris & earum partibus decimalibus.

0.1	.316	2.0	1.414	4.0	2.000	6.0	2.449
2	.447	1	1.449	1	2.025	1	2.469
3	.548	2	1.483	2	2.049	2	2.489
4	.632	3	1.517	3	2.073	3	2.509
5	.707	4	1.549	4	2.097	4	2.529
6	.775	5	1.581	5	2.121	5	2.549
7	.837	6	1.612	6	2.145	6	2.569
8	.894	7	1.643	7	2.168	7	2.588
9	.949	8	1.673	8	2.191	8	2.607
		9	1.703	9	2.214	9	2.626
1.0	1.000	3.0	1.732	5.0	2.236	7.0	2.645
1	1.049	1	1.761	1	2.258	1	2.664
2	1.095	2	1.788	2	2.280	2	2.683
3	1.140	3	1.816	3	2.302	3	2.702
4	1.183	4	1.844	4	2.324	4	2.720
5	1.225	5	1.871	5	2.345	5	2.738
6	1.265	6	1.897	6	2.366	6	2.756
7	1.304	7	1.923	7	2.387	7	2.774
8	1.342	8	1.949	8	2.408	8	2.792
9	1.378	9	1.975	9	2.429	9	2.810

8.0	2.828	9.0	3.000	10.0	3.162	11.0	3.316
1	2.846	1	3.016	1	3.178	1	3.331
2	2.864	2	3.033	2	3.194	2	3.346
3	2.881	3	3.049	3	3.210	3	3.361
4	2.898	4	3.066	4	3.226	4	3.371
5	2.915	5	3.082	5	3.241	5	3.391
6	2.932	6	3.098	6	3.256	6	3.406
7	2.949	7	3.114	7	3.271	7	3.421
8	2.966	8	3.130	8	3.286	8	3.436
9	2.383	9	3.146	9	3.301	9	3.451

SCHOLION 4.

524. *Cæterum me non monente patet, cylindrorum menſuram hic conſtitui cylindrum, quemadmodum ſupra ſolidorum omnium menſura aſſumtus eſt cubus. Similiter hic circulorum menſura conſtituitur circulus, ſicuti ſupra omnium ſuperficierum menſura quadratum.*

PROBLEMA 27.

525. *Invenire ſoliditatem dolii, hoc eſt, determinare numerum menſurarum, quas capit.*

RESOLUTIO.

1. Virga pithometrica vi probl. præc. (§. 520) decenter applicata, exploretur tam longitudo dolii AC, quam utraque diameter GH & AB. Tab. X. Fig. 173.

2. Cum, experientia non invita, rigore licet Geometrico repugnante, dolium pro cylindro habeatur, cujus baſis inter fundum & ventrem dolii media æquidifferens; inter AB & GH quæratur numerus medius æquidifferens (§. 298 *Arithm.*), qui *diameter æquata* dici ſolet.

Dd 3. Nu-

(x) in der vollkommenen Viſierkunſt c. 25. p. 126.

3. Numerus inventus multiplicetur per longitudinem dolii AC, erit factum *vi demonſtrationis probl. præced.* (§. 520) numerus menſurarum, quas capit dolium.

Sit e. gr.	AB = 8	AC	15
	GH = 12	$\frac{1}{2}$ AB + GH = 10	
erit	AB + GH = 20	capac. dolii 150 menſ.	
	$\frac{1}{2}$ (AB + GH) = 10		

SCHOLION 1.

526. *Quodſi contingat, fundum non eſſe perfecte circularem, ſed unam diametrum eſſe altera longiorem, utramque diametrum metiri & earum ſemiſummam pro diametro circuli fundo dolii æqualis aſſumere ſolent.*

SCHOLION 2.

527. *Tabulæ, ex quibus inter ſe coaſſatis dolia conſtrui ſolent, ultra fundum prominent. Pro longitudine igitur dolii non aſſumenda eſt recta FE, ſed AC, quæ habetur, ſi quantitas prominentiæ tabularum una cum ejus dimidio, cui fundi craſſities æqualis ſupponitur, a recta FE utrinque ſubtrahitur. Solent autem quantitates ſubtrahendas creta notare utrinque in ipſa ſuperficie dolii, e. gr. in K, ſi quantitas ſubtrahenda fuerit IK. Eum in finem peculiarem virgulam parant in partes minutas æquales diviſam.*

SCHOLION 3.

528. *Alios decepturi ex tabulis in medio gracilibus, circa extrema craſſis & orbibus ligneis pariter craſſis dolium conſtruunt: quæ fraus non facile detegitur.*

SCHOLION 4.

529. *Poſſemus equidem ſoliditatem cavitatis dolii eodem modo explorare, quo ſupra corpora cava metiri docuimus* (§. 502): *ſi enim per ſoliditatem unius menſuræ divideretur, prodiret dolii capacitas. Enimvero prolixitas calculi obſtat, quo minus ea methodo utantur.*

SCHOLION 5.

530. *Proſtat etiam methodus, qua ſine ullo calculo capacitas dolii invenitur. Utuntur ea in Batavia & variis Germaniæ locis. Sed cum ſupponat, omnia dolia eſſe inter ſe ſimilia & longitudinem duplam diametri æquatæ hoc eſt ſemiſummæ diametrorum AB & GH; non tuto ubique adhibetur.* Keplerus (y) *illam omnibus reliquis præfert, quia omnes cautelas menſorum in ſe continet.* Virga enim, *inquit*, introrſum immiſſa eliminat craſſitiem tabularum, circulorum qui vincula ſunt, viminumque quibus circuli lignei ſtringuntur. Eliminat & exceſſum marginum, quorum in crenis hærent orbes. Hoc autem ratio alia menſurandi una eademque opera præſtare nulla poteſt. *Unde ad privatorum ſecuritatem fraudesque eliminandas ſuadet:* ut lex illa dolii conſtruendi, quæ tertia parte longitudinis tabularum jubet deſcribere circulum orbium ligneorum, Magiſtratuum autoritate diligentiaque conſervetur, pœnisque & proſcriptione vaſorum, quæ hanc figuram non habent, vindicetur. *Ea nimirum proportio in doliis Auſtriacis obſervatur.*

SCHOLION 6.

531. *Sunt, qui aſſumunt, dolium ex duobus conis truncatis componi, & ejus ſoliditatem per probl.* 19 (§. 488) *quærunt. Alii cum aliis corporibus Geometricis id comparant;* Clavi-

(y) in Stereometria doliorum vinariorum part. 3. art. 3 ſ. n. 3.

Clavius (z) *alia pro duobus conis truncatis, alia pro fruſto ſphæroidis Archimedea habet, quoad prius conſentiente, quoad poſterius vero contradicente* Keplero. (a) Clavio *tamen aſſentitur* Oughtredus *eumque in finem regulam a ſe inventam propoſuit* (b). Walliſius *pro fruſto fuſi Parabolici habet* (c). *Enimvero cum methodus propoſita praxi ſatis reſpondeat, reliquæ vero, quæ ab Anglis potiſſimum proponuntur,* (d) *moleſtiores ſint; illa contenti eſſe poſſumus. Pauca attamen adhuc dicemus de Virga menſoria a* Keplero *tantopere deprædicata fabrica.*

PROBLEMA 28.

532. *Conſtruere virgulam pithometricam qua ſine calculo capacitatem dolii explorare licet.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Tab. X. Fig. 172. n. 1. 1. Cum vaſa, pro quibus virga hæc paratur, eſſe debeant cylindri, quorum altitudo DC æqualis diametro AB: ſi fiat ut 785 ad 1000 ita ſoliditas unius menſuræ ad numerum quartum proportionalem, per probl. 29 (§. 272 *Arithm.*) inveniendum; reperietur cubus diametri cylindri unam menſuram capientis (§. 519).

2. Inde ergo ſi extrahitur radix cubica (§. 258 *Arithm.*); prodibit diameter vaſis cylindrici menſuram unam capientis.

3. Jam cum vas illud habeat altitudinem AE diametro AB æqualem & diagonalis BE aſſumatur pro indice capacitatis *per hypoth.* ſi ex duplo quadrati diametri modo inventæ AB extrahatur radix (§. 248 *Arithm.*); prodibit index vaſis BE menſuram unam capientis (§. 394).

4. Ut porro inveniantur diagonales ſimilium vaſorum, quæ capiunt menſuras duas, tres, quatuor &c. tenendum eſt, ea eſſe ut cubos diametrorum (§. 517), conſequenter etiam ob ſimilitudinem triangulorum quale ABE (§. 173) ut cubos diagonalium (§. *cit.* & §. 239 *Arithm.*). Quare ſi diagonalis vaſis unam menſuram capientis concipiatur in 1000 partes diviſa & ex cubi 1000000000 duplo 2000000000, triplo 3000000000; quadruplo 4000000000 &c. extrahantur radices cubicæ (§. 258 *Arithm.*); prodibunt diagonales vaſorum, quæ duas, tres, quatuor &c. menſuras capiunt.

5. Denique longitudo diagonalis primæ transferatur in virgulam & una dividatur in 1000 partes

Dd 2 æqua-

(z) Geom. pract. lib. 5. c. 10. Tom. II Oper. f. 145. (a) in Stereometria part. 2. fol. H3. (b) in clave Mathematica c. 19. p. m. 103. (c) in Algebra c. 81. Vol. II Oper. f. 350. (d) vid. The general Gauger by Mr. Dougharty p. 141 & ſeqq.

æquales (§. 262): ita enim ex parata hac ſcala particulæ milleſimæ diagonalibus reliquis competentes in virgulam transferre licet.

Quoniam itaque dolium habetur pro cylindro gemino, cujus altitudo æqualis eſt ſemiſummæ diametrorum orbis AB & ventris GH; capacitas ejus ſtatim innoteſcit ſi per orificium G virgula usque ad B detrudatur. *Q. e. i. & d.* Tab. X. Fig. 173.

SCHOLION.

533. *Conſtructioni virgulæ itaque inſervit Tabula ſequens:*

Menſ.	Diag.	Menſ.	Diag.
1	1000	21	2758
2	1259	22	2802
3	1442	23	2843
4	1587	24	2884
5	1709	25	2924
6	1817	26	2962
7	1912	27	3000
8	2000	28	3036
9	2080	29	3072
10	2154	30	3107
11	2223	31	3141
12	2289	32	3174
13	2351	33	3207
14	2410	34	3239
15	2466	35	3271
16	2519	36	3301
17	2571	37	3332
18	2620	38	3361
19	2668	39	3391
20	2714	40	3419
41	3448	51	3708
42	3476	52	3732
43	3503	53	3756
44	3530	54	3779
45	3556	55	3802
46	3583	56	3825
47	3608	57	3848
48	3634	58	3870
49	3659	59	3892
50	3683	60	3914

PROBLEMA 29.

534. *Virgam pithometricam conſtruere ad determinandam quantitatem fluidi in dolio non pleno.*

RESOLUTIO.

1. Aſſumatur dolium aqua plenum, cujus capacitas jam cognita, & numerus menſurarum e. gr. per 20 aut numerum alium minorem vel majorem dividatur, prout dolii capacitatem in partes majores vel minores dividi commodum viſum fuerit.
2. Dolio beneficio libellæ Q ita collocato, ut axis ejus ſit horizonti parallelus, virga per orificium ventris intrudatur, donec fundum dolii attingat. Tab. IV. Fig. 81.
3. Ea quantitate fluidi ex dolio emiſſa, quæ numero menſurarum per diviſionem paulo ante n. 1. invento reſpondet, in virgula notetur decrementum altitudinis in fluido, quod exprimit totius capacitatis partem vigeſimam.

4. Eo-

4. Eodem modo notabis decrementum altitudinis, reliquis particulis vigeſimis quantitatis fluidi in dolio contenti reſpondens.
5. Horum decrementorum intervallis in una virgulæ facie notatis; altera dividitur in partes quotcunque minutas inter ſe æquales, ultra vigeſimarum intervalla inæqualia continuandas, e. gr. in 200 aut plures.

Ita virga pro dolio non pleno metiendo conſtructa eſt.

PROBLEMA 30.

535. *Determinare quantitatem fluidi in dolio non pleno.*

RESOLUTIO.

1. Inveſtigetur capacitas totius dolii *per probl.* (§. 525).
2. Tab. X. Fig. 173. Dolio libellæ beneficio ita collocato, ut axis ejus ſit horizonti parallelus, ne ſcilicet fluidum in una dolii parte altius ſit, quam in altera, virga per problema præcedens (§. 534) parata per orificium dolii G intrudatur, donec fundum in H attingat.
3. Ea rurſus extracta notetur, quot partes in facie æqualium vino madidæ ſint.
4. Hinc inferatur: ut numerus partium æqualium in altera virgulæ facie profunditati totius dolii GH reſpondentium ad numerum ſimilium partium altitudini fluidi LH convenientium, ita numerus earundem partium, quæ intervallo ſcrupulorum vigeſimorum congruunt, ad numerum quartum proportionalem *per probl. 29. Arithm.* (§. 272) inveniendum.
5. Capiatur circino intervallum tot partium æqualium in virga, quot numerus inventus exprimit & transferatur in ſcalam ſcrupulorum vigeſimorum, noteturque eorum numerus, quæ ipſi congruunt.
6. Per hunc dividatur numerus menſurarum, quas dolium integrum capit: quotus erit numerus menſurarum, quas fluidum in dolio contentum replere poteſt. *Q. e. i.*

E. gr. ſit GH 160, HL 58, numerus partium æqualium, quæ integro ſcrupulorum vigeſimorum intervallo congruunt, 120, capacitas denique dolii 128 menſurarum.

Fiat: 160 — 58 — 120   ~~1~~2
40)   4   3   3   ~~174~~ (43½
                            ~~44~~
           174

Ponamus partibus $43\frac{1}{2}$ æqualibus reſpondere in ſcala inæqualium $\frac{4}{20}$ ſive $\frac{1}{5}$. Quodſi itaque 128 per 5 dividas, quotus $25\frac{3}{5}$ numerum menſurarum indicabit;

bit, quas fluidum in dolio contentum replere poteſt.]

SCHOLION 1.

536. *Si dolia omnia eſſent ſimilia, per methodum propoſitam ſatis accurate inveniretur quantitas fluidi in dolio non pleno* (§. 115. 116) *: ſed in diſſimilibus eadem exacte reperiri hac ratione nequit. Nondum autem inventa eſt methodus, & rigori Geometrico ſatis faciens & praxi reſpondens. Quam enim* Keplerus *dedit* (c), *ea nec demonſtrativa, nec praxi adaptata. Unde neque ipſi ſatisfacit. Et quamvis aliam poſtea eidem ſubſtituerit* (d)*; ſatis tamen intricata eſt. Intricatiores adhuc ſunt, quas* Bayerus (e) *&* Dougharty (f) *tradunt.*

SCHOLION 2.

537. *Cum in aliquibus demonſtrationibus ſuppoſuerimus, figuras regulares circulo circumſcribi poſſe & in* probl. 39. (§. 334) *tantum de quadrato id demonſtratum fuerit, ideo hic problematis illius ſolutionem generalem ſubjungimus, antequam elementis Geometriæ coronidem imponamus. Nimirum circulo polygonum regulare e. gr. pentagonum circumſcripturus,* 1. Figuram regularem ſimilem, e. gr. pentagonum ABCDE circulo inſcribat (§. 336). 2. chordam AE bifariam dividat per rectam FG ad AE normalem (§. 199), quæ arcum cognominem AE continuata in *g* ſecat. 3. Per A & E producantur radii AF & EF & 4. per *g* ducatur ipſi AE parallela (§. 243) utrinque radiis continuatis in *a* & *e* occurrens. Erit *ae* latus unum polygoni circumſcripti. 5. Producatur radius FB in *b*, donec F*b* = F*a*, ducaturque *ab*. *Demonſtratio.* Quoniam *ae* parallela ipſi AE, *per conſtr.* G = *g* (§ 222). Sed G rectus *per conſtr.* Ergo & *g*, conſequenter *ae* circulum tangit in *g* (§. 75. 289). Ex eadem ratione liquet, eſſe angulum FAG = F*ag*, conſequenter dimidium angulum pentagoni. Porro quoniam F*b* = F*a per conſtr.* & F*e* = F*a* (§. 169), præterea *e*F*a* = *a*F*b* (§. 274 & 135) ob AE = AB *per conſtr.*; erit *ab* = *ae* & F*ab* = F*ae* (§. 169), conſequenter *eab* angulus pentagoni. Eodem modo oſtenditur, angulos reliquos *b*, *c*, *d*, *e* eſſe angulos pentagoni & latera reliqua eſſe ipſi *a* æqualia. Quod vero *ab* circulum in *h* tangat, ita patet: Demittatur ex centro F perpendicularis ad *ab* (§. 205), erit *h* rectus (§. 75). Quoniam porro F*ah* = F*ag*, *per demonſtr.* & *a*F = *a*F (§. 73 *Arithm.*); erit F*h* = F*g* (§. 237), conſequenter F*h* radius circuli (§. 38), adeoque *ab* circulum tangit in *h* (§. 75. 289). Quare *abcde* eſt polygonum regulare (§. 102) circulo circumſcriptum (§. 113).

Q. e. d.

Tab. VI. Fig. 107.

(c) in Stereometria Doliorum f. O 2. b. (d) in dem Auszuge aus der uhralten Meſſe-Kunſt Archimedis §. 88 f. 95. (e) in Conometriæ Mauritianæ c. 9 p. 102 & ſeqq. (f) the General-gauger p. 164 & ſeqq.

FINIS.
Elementorum Geometriæ.

ERRATA ſic corrige:

Pag. 189 lin. 13 CD l. CF. p. 191 lin. 7 deleantur hæc verba: *& EO parallela ipſi AV* (§. 240). p. 197 l. 29. *peripheria* l. ſemiperipheria. p. 198 pro ſuperficie coni & p. 171 pro trapezio ſume numeri dimidium p. 204 FO l. FE. p. 108 lin. 2 §. 512 l. §. 513.

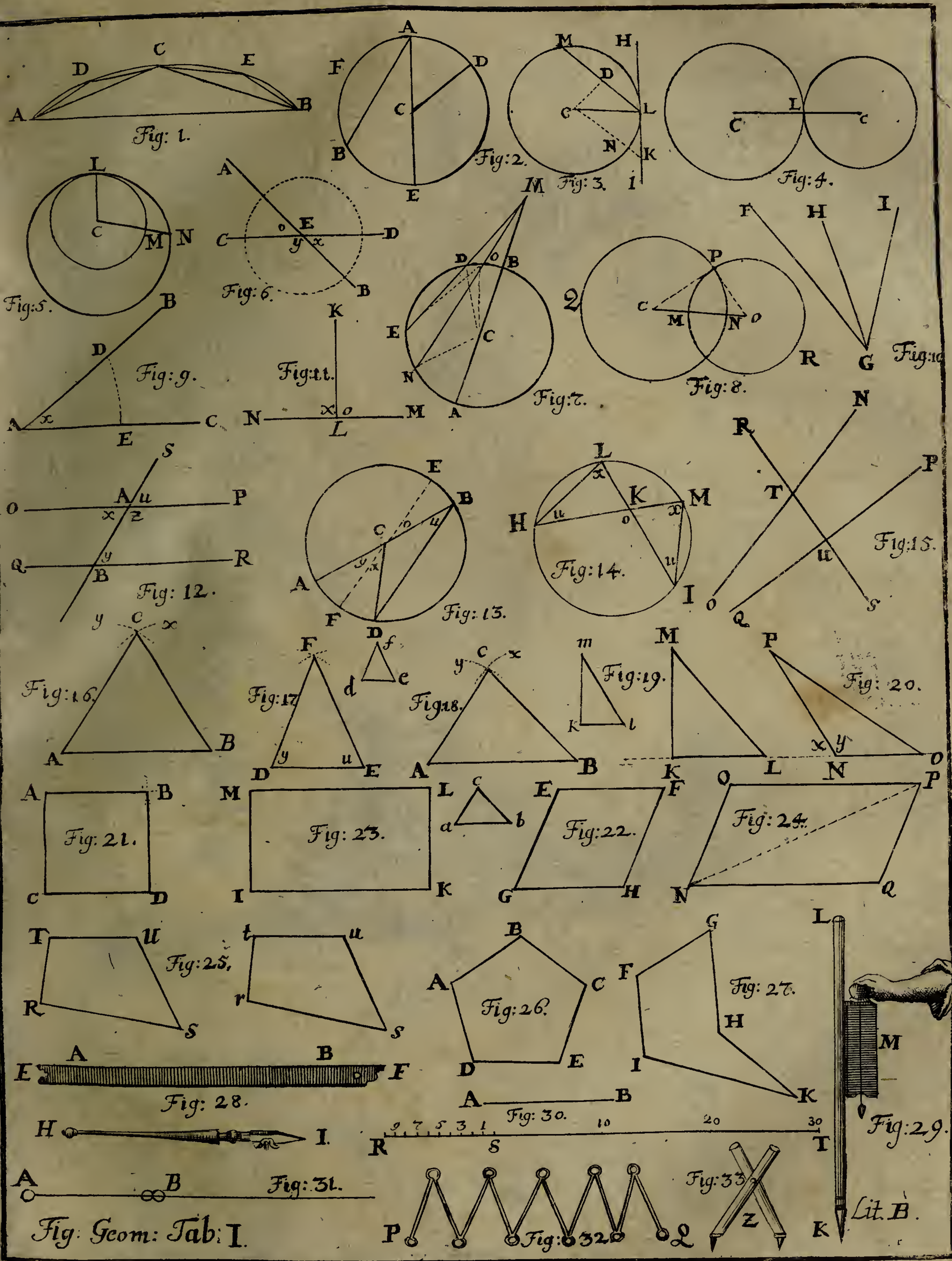


Fig: Geom: Tab: I.

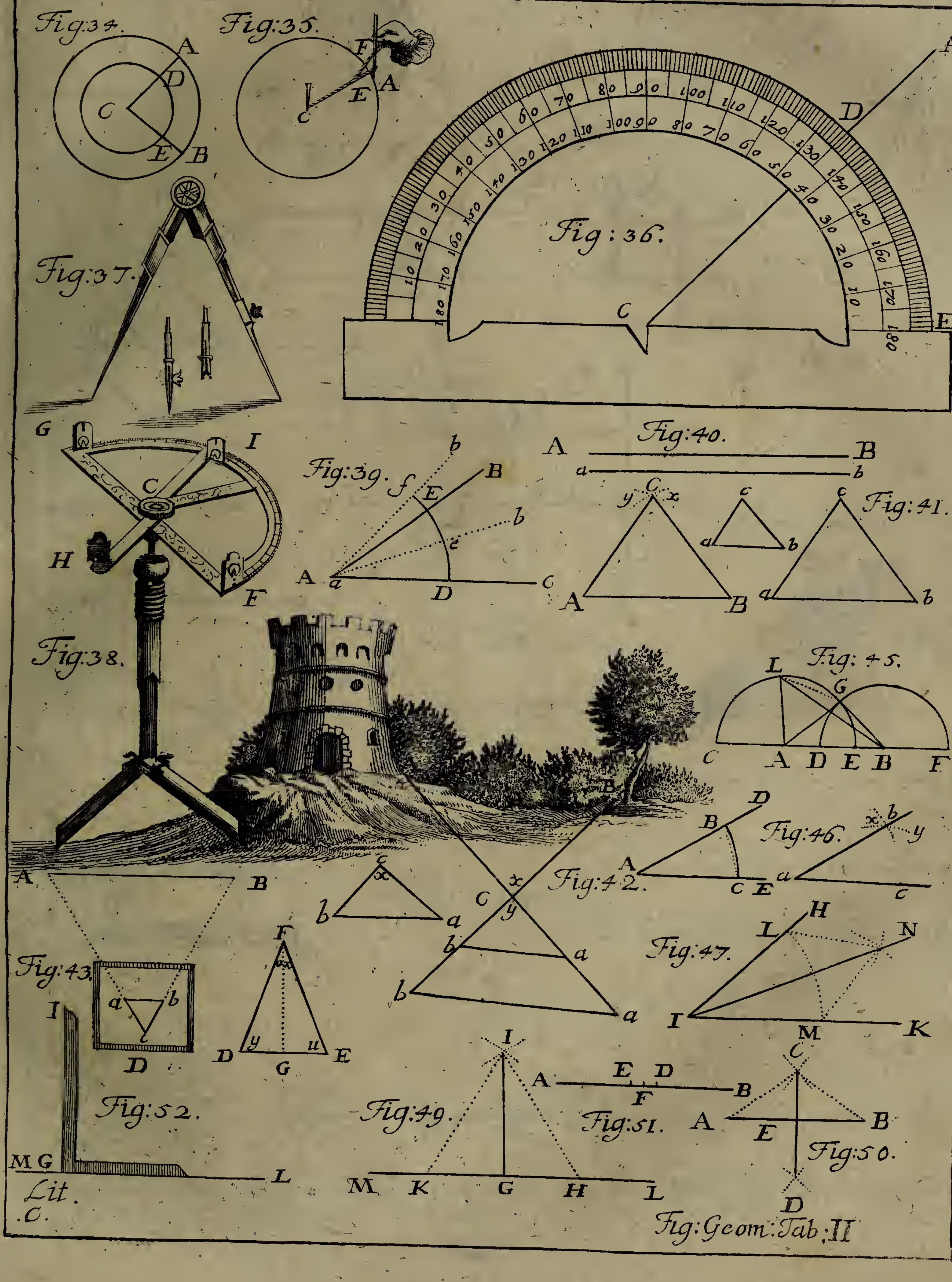


Fig:Geom:Tab:II

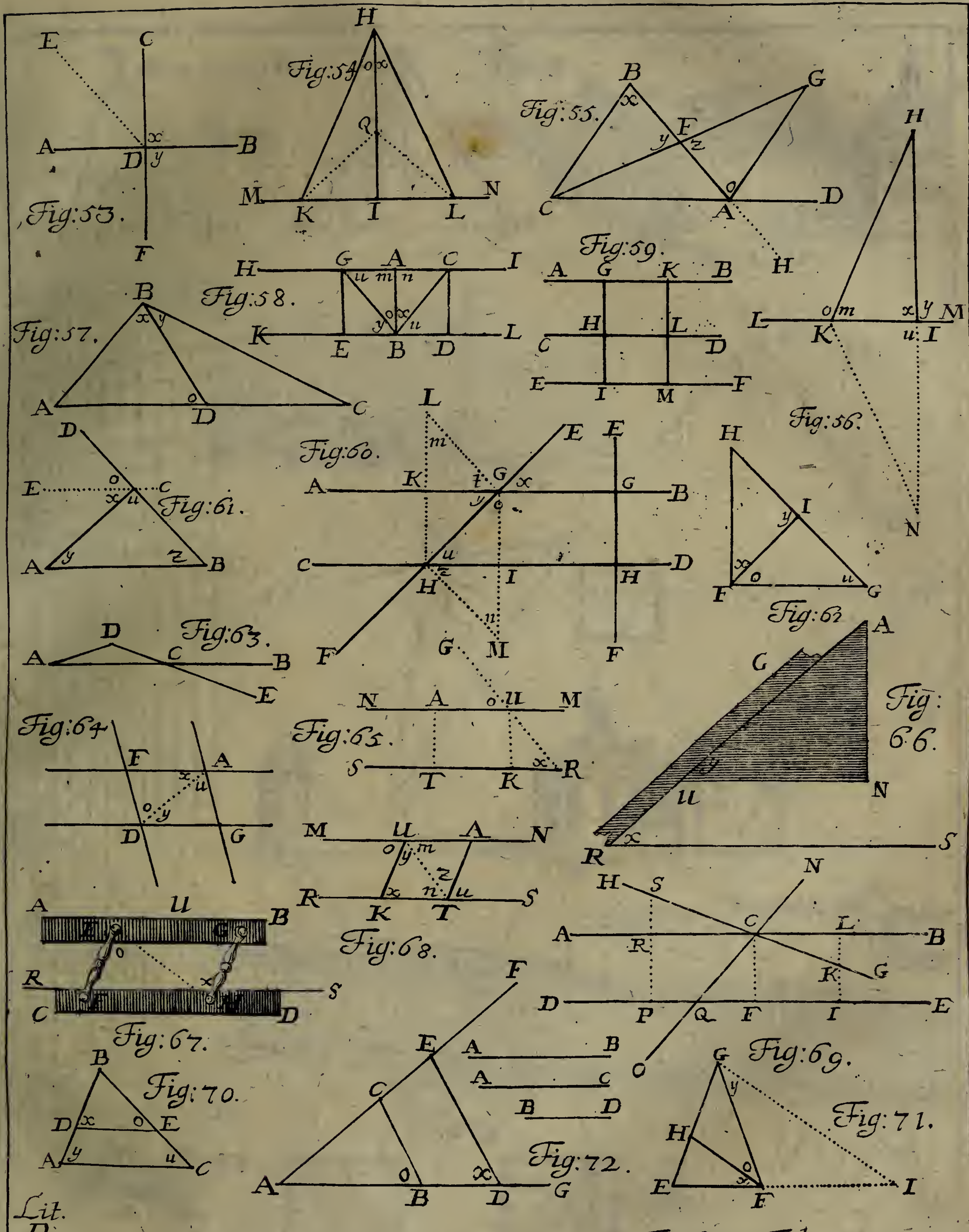
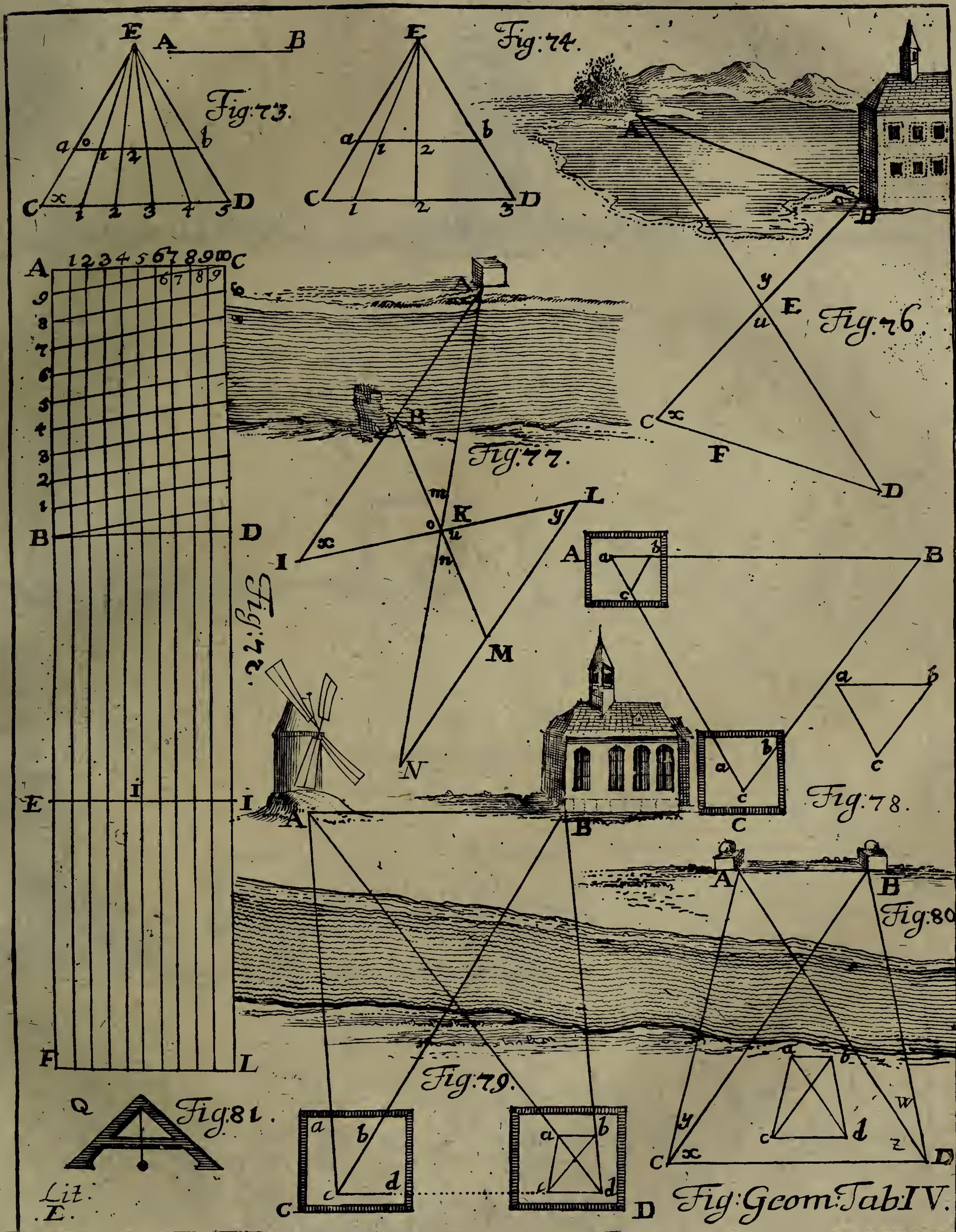
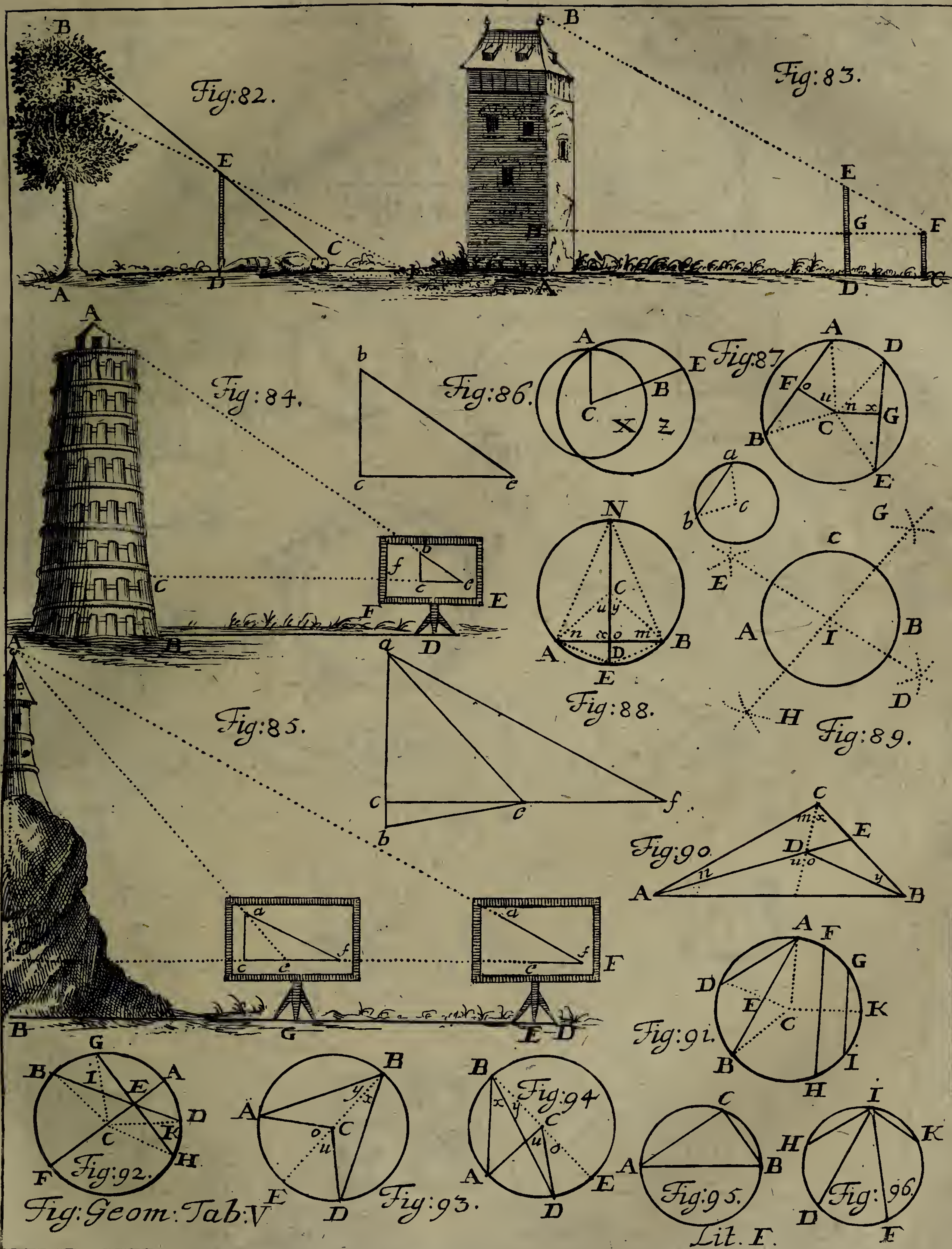


Fig:Geom:Tab: III.


Fig:73.
Fig:74.
Fig:76.
Fig:77.
Fig:72.
Fig:78.
Fig:79.
Fig:80
Fig:81.
Lit. E.
Fig:Geom:Tab IV.


Fig: 82.
Fig: 83.
Fig: 84.
Fig: 85.
Fig: 86.
Fig: 87
Fig: 88.
Fig: 89.
Fig: 90.
Fig: 91.
Fig: 92.
Fig: 93.
Fig: 94
Fig: 95.
Fig: 96.
Fig: Geom: Tab: V
Lit. F.

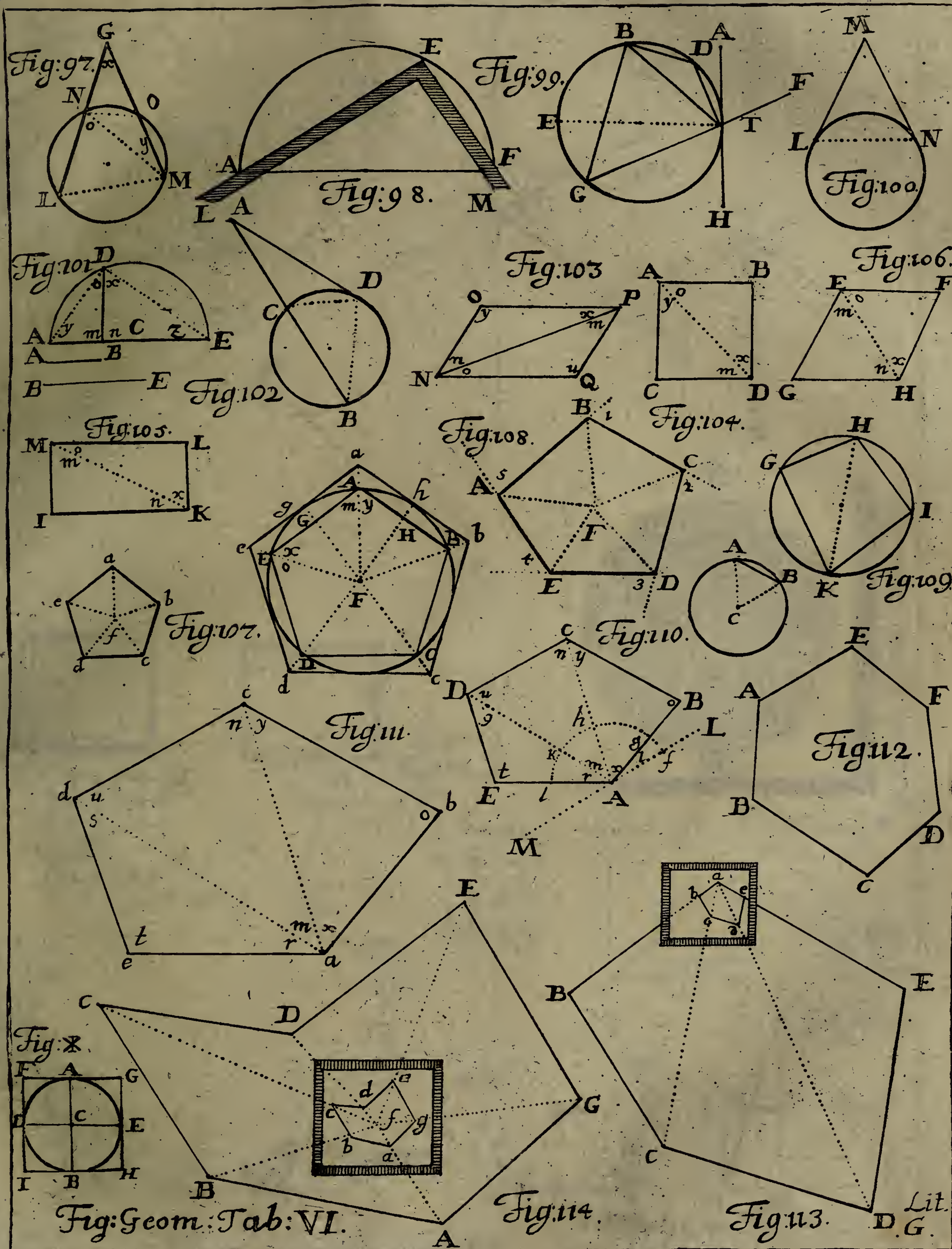


Fig: Geom: Tab: VI.

Lit. G.

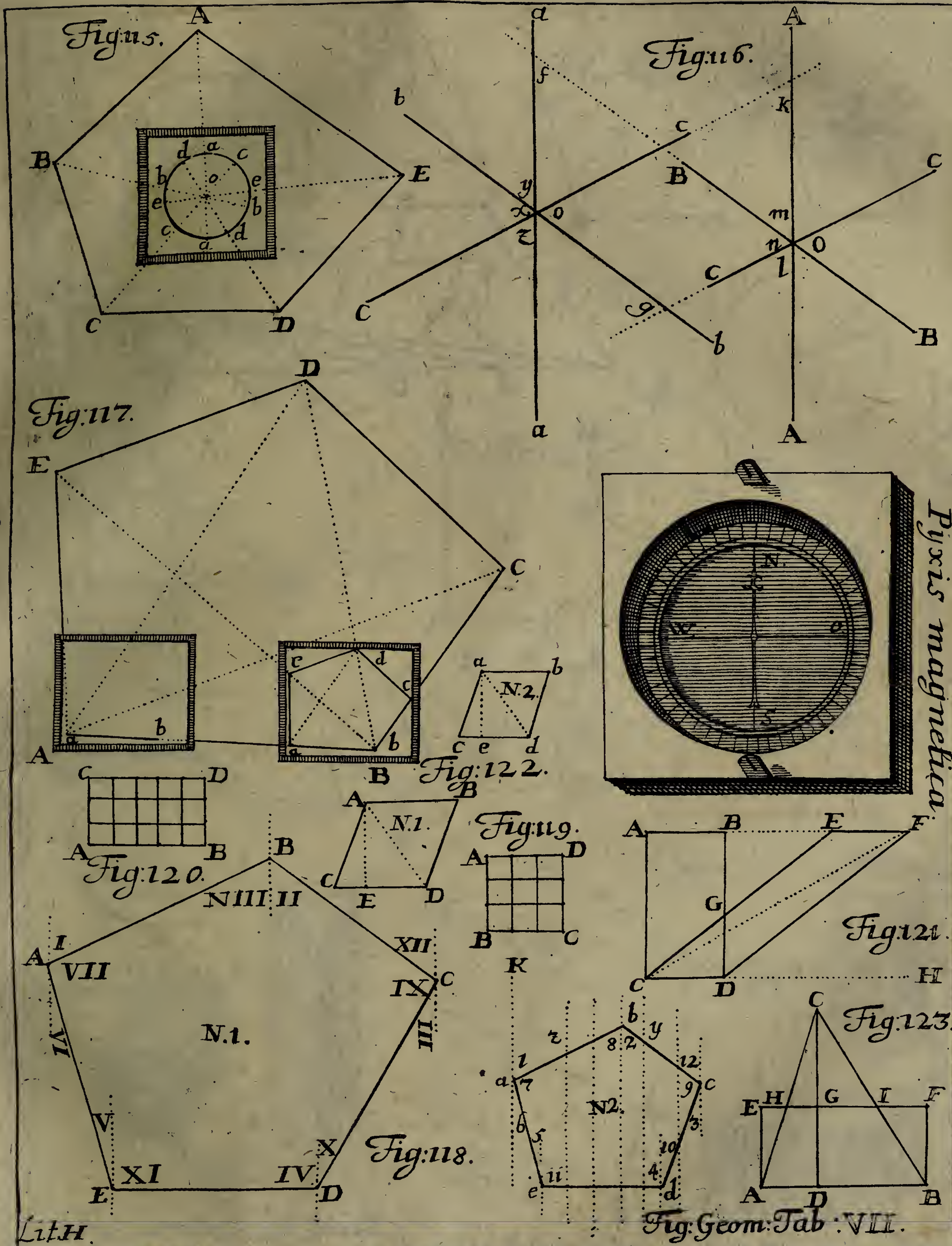


Fig: Geom: Tab: VII.

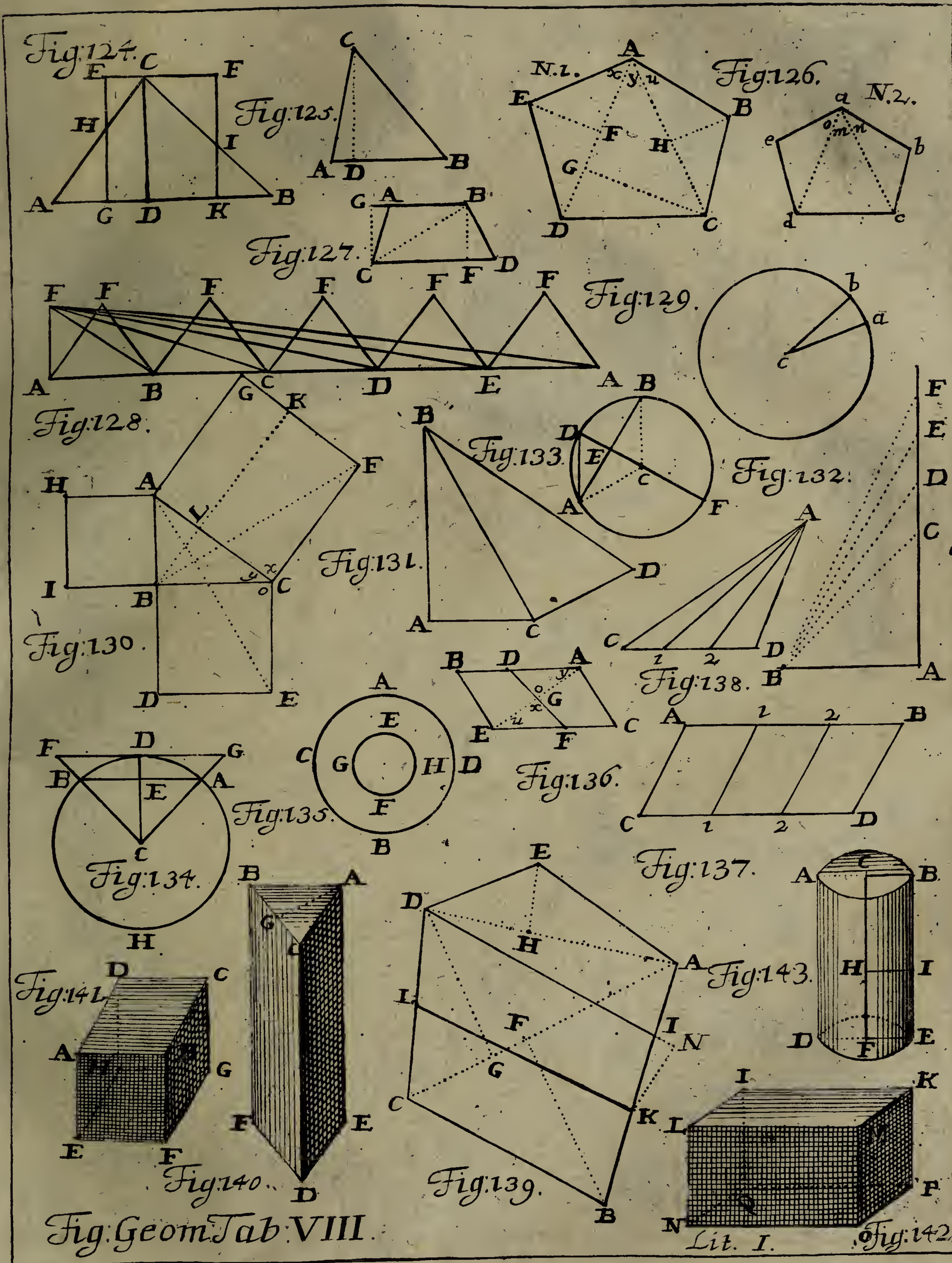
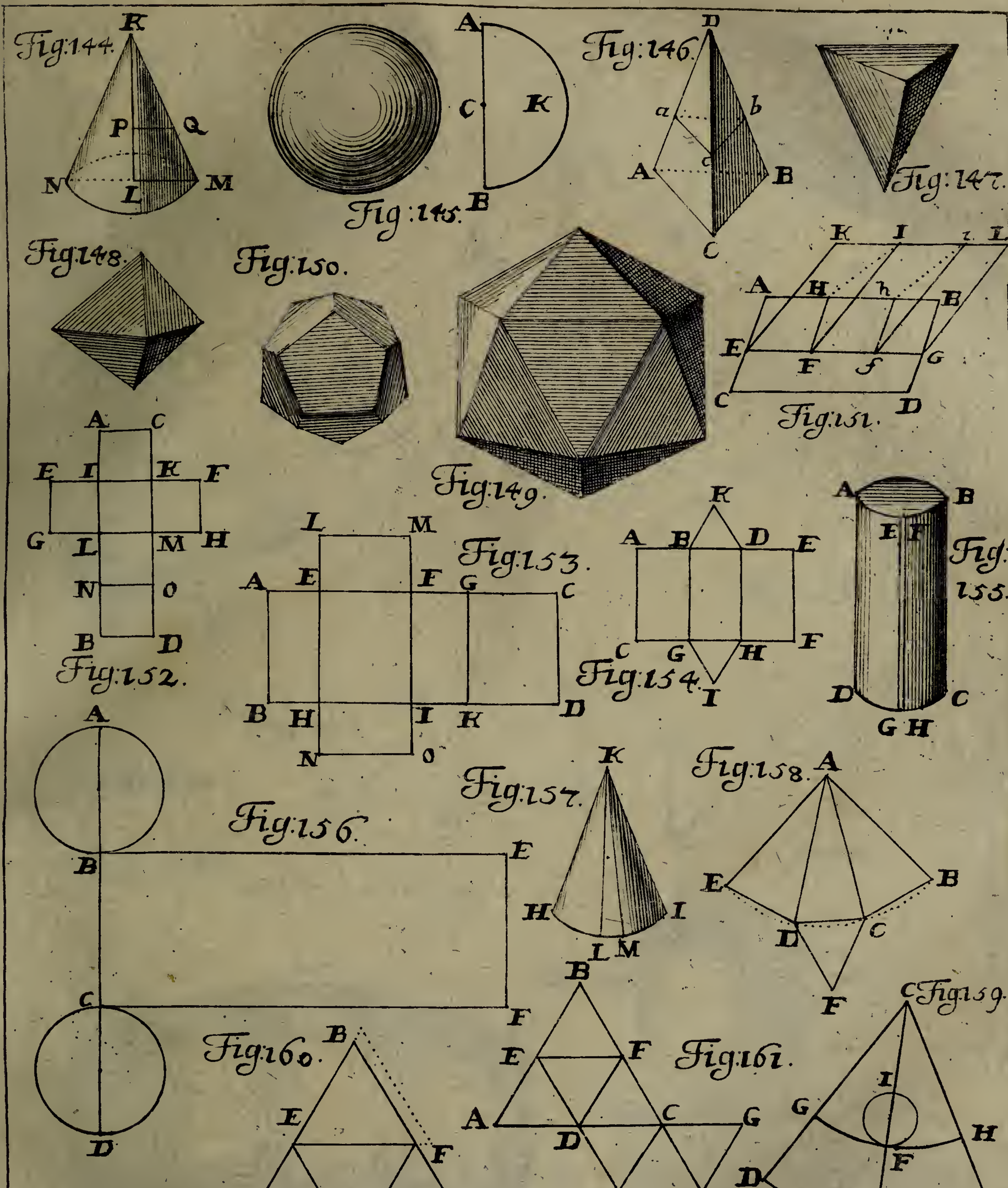


Fig:Geom:Tab:VIII.


Fig:144.
Fig:145.
Fig:146.
Fig:147.
Fig:148.
Fig:149.
Fig:150.
Fig:151.
Fig:152.
Fig:153.
Fig:154.
Fig:155.
Fig:156.
Fig:157.
Fig:158.
Fig:159.
Fig:160.
Fig:161.
Lit. K.
Fig. Geom: Tab. IX.

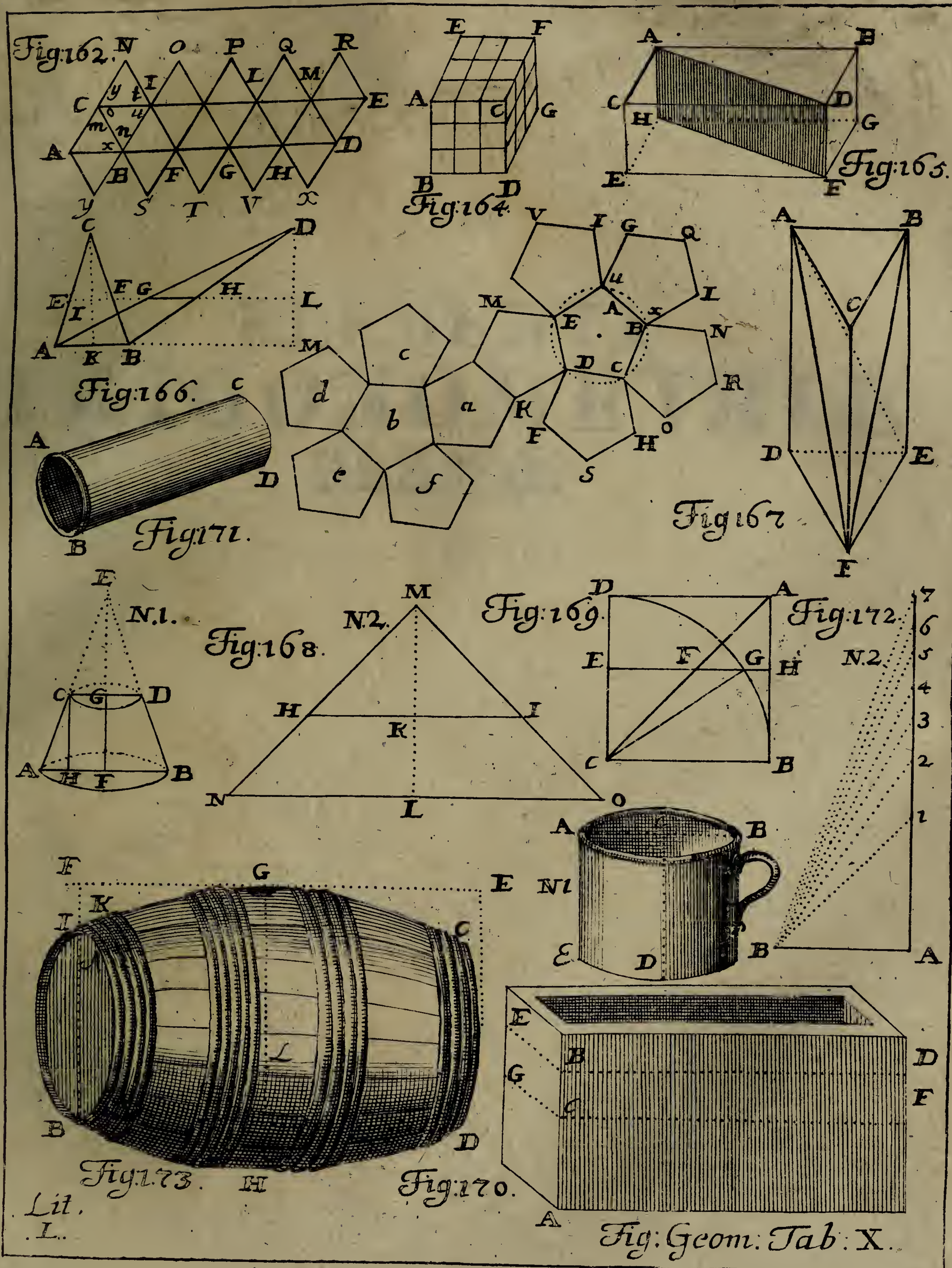


Fig: Geom: Tab: X.

ELEMENTA TRIGONOMETRIÆ PLANÆ.

PRÆFATIO.

MOmenti perquam exigui tyronibus videtur Trigonometria, utilitatis prorſus nullius. Enimvero rerum Mathematicarum periti ore unanimi confitentur, quod, ſublata Trigonometria, maxima eorum pars pereat, quæ in Matheſi admiramur. Certe ſtellarum magnitudinem, diſtantiam a Terra, motum, eclipſium tam ſolarium, quam lunarium computum, magnitudinem globi terraquei & innumera alia prorſus ignoraremus, ſi nobiliſſimæ hujus ſcientiæ auxilio deſtitueremur. Trigonometria igitur pro arte haberi debet, qua maxime abſcondita & a cognitione hominum remota in apricum producuntur. Eam qui neſcit, non magnos in Matheſi impura ſentiet progreſſus: ſæpius ipſi in Philoſophia naturali hærebit aqua, e. gr. iridis phœnomena ad rationes ſuas revocaturo aliaque meteora emphatica

Ee expli-

explicaturo. Studium igitur Trigonometriæ addiſcendæ afferatur indefeſſum, nec impatiens ſit mora, donec in partibus Matheſeos ſubſequentibus ineffabilis ejusdem uſus ex his ipſis etiam elementis pateſcat. Fides oculata impediet, quo minus in poſterum judicia de rerum uſu (quod vulgo plerumque fieri ſolet) præcipitemus. Paucis problematibus comprehendi, quæ alias per caſus plures diſtribuuntur: in elementis enim præter neceſſitatem multiplicanda non ſunt, quæ ſpinoſa videntur tyronibus, nec culpatur brevitas, quæ perſpicuitati non officit, memoriæ levamen certiſſimum exiſtit. Cumque Trigonometria etiam in Geometria practica uſum habeat, quam cum theoretica conjungi conſultum duximus; ideo hunc uſum ſub finem annectere placuit.

ELE-

ELEMENTA TRIGONOMETRIÆ PLANÆ.

CAPUT I.

De

CONSTRUCTIONE CANONIS SINUUM, TANGENTIUM ATQUE SECANTIUM TAM NATURALIVM, QUAM ARTIFICIALIUM.

DEFINITIO 1.

1.

Tab. I. Fig. I. TRigonometria plana eſt ſcientia ex tribus trianguli rectilinei partibus inveniendi reliquas. E. gr. Ex duobus lateribus AB & AC atque angulo B inveniuntur anguli reliqui B & C cum latere tertio BC.

DEFINITIO 2.

Tab. I. Fig. 2. 2. *Sinus rectus* AD arcus AE & AI eſt chordæ AB arcus dupli AEB dimidium. *Sinus totus* eſt radius HC, ſeu ſinus Quadrantis HE. *Sinus verſus* eſt pars radii ED inter ſinum rectum AD & arcum AE intercepta.

COROLLARIUM 1.

3. Sinus ergo AD ad radium EC perpendicularis (§. 276 *Geom.*): conſequenter ſinus omnes eidem radio inſiſtentes inter ſe paralleli (§. 241 *Geom.*).

COROLLARIUM 2.

4. Quoniam arcus AE eſt menſura anguli ACE, & AI ejus contigui ACI (§. 55 *Geom.*); quadrans vero HE menſura anguli recti (§. 137 *Geom.*): AD etiam ſinus rectus & ED ſinus verſus eſt angulorum ACE & ACI; ſinus vero totus eſt ſinus anguli recti.

COROLLARIUM 3.

5. Duo igitur anguli, qui ſunt deinceps, eundem habent ſinum.

COROLLARIUM 4.

6. Angulorum adeo obtuſorum ſinus iidem ſunt, quos habent eorum complementa ad duos rectos (§. 141 *Geom.*).

DEFINITIO 3.

7. *Tangens* arcus EA eſt portio rectæ tangentis circulum EF inter rectas ex centro C per extrema arcus E & A ductas interceptæ. Recta FC dicitur *ſecans* ejusdem arcus. Tab. I. Fig. 2.

 CO-

COROLLARIUM 1.

8. Tangens FE ad radium EC perpendicularis eſt (§. 293 *Geom.*).

COROLLARIUM 2.

9. Eſt etiam FE tangens & FC ſecans anguli ACE, itemque ACI. (§. 55. *Geom.*).

COROLLARIUM 3.

10. Duo igitur anguli, qui ſunt deinceps, eandem habent tangentem atque ſecantem.

DEFINITIO 4.

Tab. I. Fig. 2. 11. *Coſinus* eſt ſinus; *Cotangens* tangens; *Coſecans* ſecans arcus AH, qui eſt alterius AE complementum ad quadrantem. Ita e. gr. AG ſinus arcus AH dicitur Coſinus arcus AE. Vocantur etiam *Sinus*, *Tangentes* atque *ſecantes complementi.*

THEOREMA 1.

12. *Sinus arcuum ſimilium ad radios ſuos eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

Chordæ enim arcuum ſimilium ad radios eandem rationem habent (§. 275 *Geom.*). Sed ſinus ſunt chordarum dimidia (§. 2). Ergo & hi ad radios rationem eandem habent (§. 172 *Arithm.*). *Q. e. d.*

HYPOTHESIS.

13. *Sumatur radius pro unitate & per ejus fractiones decimales determinetur quantitas ſinuum, tangentium atque ſecantium.*

SCHOLION.

14. *Ex* Ptolemæi *Almageſto diſcimus, veteres radium in* 60 *partes, quas gradus vocabant, diviſiſſe & inde chordas per minuta prima, ſecunda, tertia &c. hoc eſt, fractiones radii ſexageſimales determinaſſe, quibus in analyſi triangulorum utebantur. Dimidiis chordis ſeu ſinibus primum uſi ſunt, quantum conſtat, Saraceni.* Johannes Regiomontanus *primum radio cum veteribus tribuit* 60 *gradus & ſinus ſingulorum graduum per ejus fractiones decimales determinavit. Enimvero poſtea animadvertit, commodius fore, ſi radius ſumatur pro unitate, ac ideo hypotheſin præſentem in Trigonometriam introduxit. In tabulis ſinuum & tangentium ordinariis radius concipitur in* 10000000 *partes diviſus & ultra has fractiones in determinanda ſinuum & tangentium quantitate non deſcenditur. Qui tamen tabulas iſtas conſtruxerunt, ad fractiones multo minores deſcenderunt, ne error irreperet in ſcrupulis primis aſſignabilis. Secantibus hodie opus non habemus, cum omnia Trigonometriæ problemata abſque illarum ope ſolvi poſſint.*

COROLLARIUM.

15. Cum latus hexagoni ſextam circuli partem ſubtendat (§. 100. 325 *Geom.*) atque radio æqualis ſit (§. 338 *Geom.*); ſinus graduum triginta eſt 5000000 (§. 2 *Trigon.* & §. 39 *Geom.*).

PROBLEMA 1.

16. *Dato ſinu AD, invenire coſinum AG.* Tab. I. Fig. 2.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam EC perpendicularis ad

ad HC & AG ad AH (§. 3); erit AG parallela ipſi DC (§. 241 *Geom.*) & ad G angulus rectus (§. 75 *Geom.*) adeoque △ AGC rectangulum (§. 87 *Geom.*). Quare cum ex eadem ratione AD ſit parallela ipſi HC; erit GC = AD (§. 22, *Geom.*). Si ergo

1. Ex quadrato radii AC ſubtrahatur quadratum ſinus AD; relinquetur quadratum Coſinus AG (§. 394 *Geom.*). Unde ſi
2. Radix quadrata extrahatur (§. 248 *Arithm.*); prodibit Coſinus AG.

E. gr. Sit AC 10000000; AD 5000000: reperietur AG 8660254, ſinus 60°.

PROBLEMA 2.

Tab. I. Fig. 2. 17. *Dato ſinu AD arcus AE, invenire ſinum arcus dimidii ½ AE.*

RESOLUTIO.

Inveniatur chorda arcus AE (§. 400 *Geom.*). Hujus enim dimidium eſt ejus ſinus (§. 2).

E. gr. Sint AC & AD ut in probl. præc. reperietur ſinus arcus ½ AE ſeu ſinus 15° = 2588190.

PROBLEMA 3.

Tab. I. Fig. 3. 18. *Dato ſinu DG arcus DF, invenire ſinum DE arcus dupli DB.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Cum anguli ad E & G recti ſint (§. 3) & angulus B utrique triangulo BCG & DEB communis; erit BC : CG = BD : DE (§. 252 *Geom.*). Quare cum CG inveniri poſſit, dato DG (§. 16) & BD ſit duplum ipſius DG (§. 2): invenietur quoque DE (§. 272 *Arithm.*). *Q. e. f. & d.*

PROBLEMA 4.

19. *Datis ſinibus FG & DE arcuum FA & DA, quorum differentia DF 45′ major non eſt, invenire ſinum quemcunque intermedium IL.* Tab. I. Fig. 4.

RESOLUTIO.

1. Quæratur ad differentiam arcuum FD, quorum ſinus dantur, differentiam arcus, cujus ſinus quæritur, IF & differentiam ſinuum datorum DH quartus numerus proportionalis (§. 272. *Arithm.*).
2. Is addatur ſinui dato minori FG. Erit aggregatum ſinus quæſitus IL.

DEMONSTRATIO.

Cum arcus DF & FI paucorum minutorum exiſtant, *per hypoth.* pro lineis rectis citra errorem ſenſibilem haberi poterunt. Porro FG, IL & DE parallelæ ſunt (§. 3). Quare ſi ex F ad DE perpendicularis demittatur FH (§. 205 *Geom.*); erit HE = FE (§. 223 *Geom.*) adeoque DH differentia ſinuum datorum FG & DE (§. 57 *Arithm.*). Unde

Unde ob parallelas IK & DH *per demonſtrata*; DF : FI = DH : IK (§. 253 *Geom.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 5.

20. *Datis ſinibus BD & FE duorum arcuum quorumcunque AB & AF, invenire ſinum arcus ſemidifferentiæ eorundem BF.* Tab. I. Fig. 5.

RESOLUTIO.

1. Sinus minor BD ſubtrahatur a majore FE, relinquetur differentia FK.
2. Ex datis ſinibus BD & FE inveniantur Coſinus BI & FH (§. 16).
3. Coſinus minor FH ſubtrahatur e majore BI, erit BK differentia.
4. Ex ſumma quadratorum differentiarum BK & FK extrahatur radix quadrata (§. 248 *Arithm.*); prodibit chorda arcus differentiæ BF, cujus dimidium eſt ſinus quæſitus (§. 2). *Q. e. i.*

DEMONSTRATIO.

BD, FE & GC, tum AC, BI & FH inter ſe parallelæ & illæ ad HC, hæ ad GC perpendiculares (§. 3), conſequenter FH = KI & BD = EK (§. 213 *Geom.*) & angulus BKF rectus (§. 219. 75 *Geom.*). Quamobrem FK differentia ſinuum BD & FE, BK vero differentia coſinuum FG & BI atque FKB triangulum rectangulum (§. 87 *Geom.*). Ergo cum ſit $BF^2 = BK^2 + FK^2$ (§. 94 *Geom.*); reperietur chorda BF, ſi ex ſumma quadratorum differentiæ ſinuum FK & coſinuum BK radix quadrata extrahitur (§. 235 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 6.

21. *Invenire ſinum 45 graduum.* Tab. I. Fig. 2.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Sit HI circuli quadrans; erit HCI angulus rectus (§. 137. *Geom.*) adeoque △ cognomine rectangulum (§. 87 *Geom.*), conſequenter $HI^2 = HC^2 + CI^2$ (§. 394 *Geom*) $= 2 HC^2$ (§. 38. 356 *Geom.*). Quare cum HC ſinus totus (§. 2) ſit 10 000000 (§. 13); ſi ex $2HC^2$ quadrato 200 000 000 000 000 extrahatur radix 14142136 (§. 248 *Arithm.*); prodibit chorda HI (§. 235 *Arithm.*), cujus dimidium 7071068 ſinus 45° deſideratus. *Q. e. i. & d.*

SCHOLION.

22. *Inferius in Analyſi docebimus, quomodo ex dato radio latus pentagoni regularis, hoc eſt, 72°* (§. 325 Geom), *conſequenter ſinus 36°* (§. 2). *inveniatur.*

PROBLEMA 7.

23. *Dato ſinu unius minuti ſeu 60″ FG, invenire ſinum unius vel aliquot ſecundorum MN.* Tab. I. Fig. 4.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam arcus AM & AF ſunt admo-

admodum exigui, AMF pro linea recta haberi poteſt citra errorem in fractionibus radii decimalibus, quibus ſinus exprimimus, asſignabilem, hoc eſt, arcus AM & AF chordis eorum proportionales aſſumere licet. Quare cum MN ſit ipſi FG parallelus (§. 3); erit AF:FG = AM : MN (§. 253 *Geom*). Datis ergo AF, FG, & AM, *per hypoth.* invenitur MN (§. 272 *Arithm.*). *Q. e. i. & d.*

SCHOLION.

24. *Eadem ratione, ſi opus foret, inveniri poſſet ſinus aliquot ſcrupulorum tertiorum.*

PROBLEMA 8.

25. *Datis ſinibus* 30 (§. 15), 15 (§. 17), 45 (§. 21) *&* 36 *graduum* (§. 22); *canonem omnium ſinuum conſtruere, nonniſi unico minuto aut denis ſecundis, imo unico ſecundo inter ſe differentibus.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Ex ſinu 36 graduum inveniatur Sinus 18°, 9°, 4° 30′, 2° 15′ (§. 17); ſinus 54°, 72°, 81°, 85° 30′, 87° 45′ (§. 16): porro ſinus 27°, 13° 30′, 6° 45′, 40° 30′, 20° 15′, 42° 45′ (§. 17): inde ſinus 63°, 76° 30′, 83° 15′, 49° 30′, 69° 45′, 47° 15′ (§. 16): ulterius ſinus 31° 30′, 15° 45′, 38° 15′, 24° 45′ (§. 17): hinc ſinus 58° 30′, 74° 15′, 51° 45′, 65° 15′ (§. 16): denique ſinus 29° 15′ (§. 17) & ejus coſinus 60° 45′ (§. 16).
2. Ex ſinu 45° inveniantur ſinus 22° 30′ & 11° 15′ (§. 17), ſinus 67° 30′ & 78° 45′ (§. 16), ſinus denique 33° 45′ (§. 17) & 56° 15′ (§. 16).
3. Ex ſinu 30° & ſinu 54° inveniatur ſinus 12° (§. 20).
4. Ex ſinu 12° inveniantur ſinus 6°, 3°, 1° 30′, 45′ (§. 17), ſinus 78°, 84°, 87°, 88° 30′, 89° 15′ (§. 16): porro ſinus 39°, 19° 30′, 9° 45′, 42°, 21°, 10° 30′, 5° 15′, 43° 30′, 21° 45′, 44° 15′ (§. 17): ulterius ſinus 51°, 70° 30′, 80° 15′, 48°, 69°, 79° 30′, 84° 45′, 46° 30′, 68° 15′, 45° 45′ (§. 16): inde ſinus 25° 30′, 12° 45′, 35° 15′, 24°, 34° 30′, 17° 15′, 39° 45′, 23° 15′ (§. 17): hinc ſinus 64° 30′, 77° 15′, 54° 45′, 66°, 55° 30′, 72° 45′, 50° 15′, 66° 45′ (§. 16): hinc porro ſinus 32° 15′, 33°, 16° 30′, 8° 15′, 27° 45′ (§. 17): inde ulterius ſinus 57° 45′, 57°, 73° 30′, 81° 45′, 62° 15′ (§. 16): porro ſinus 28° 30′, 14° 15′, 36° 45′ (§. 17) & horum coſinus 61° 30′, 75° 45′, 53° 45′ (§. 16): denique ſinus 30° 45′ (§. 17) & ejus coſinus 59° 15′ (§. 16).
5. Ex ſinu 15° inveniantur ſinus 7° 30′ & 3° 45′ (§. 17): hinc ſinus 75°, 82° 30′, 86° 15′ (§. 16): inde 37° 30′, 18° 45′, 41° 15′ (§. 17) & ho-

& horum coſinus 52° 30′, 71° 15′, 48° 45′ (§. 16): denique ſinus 26° 15′ (§. 17) & ejus coſinus 63° 45′ (§. 16).

6. Quodſi ſinus hac ratione inventi in ordinem redigantur, numero 120, & differentiam inter duos immediate ſibi mutuo ſuccedentes 45′ deprehendes: quemadmodum ex Tabula, quem eum in finem hic apponimus, primo intuitu apparet.

1	0° 45′	31	23° 15′	61	45° 45′	91	68° 15′
2	1. 30	32	24. 0	62	46. 30	92	69. 0
3	2. 15	33	24. 45	63	47. 15	93	69. 45
4	3. 0	34	25. 30	64	48. 0	94	70. 30
5	3. 45	35	26. 15	65	48. 45	95	71. 15
6	4. 30	36	27. 0	66	49. 30	96	72. 0
7	5. 15	37	27. 45	67	50. 15	97	72. 45
8	6. 0	38	28. 30	68	51. 0	98	73. 30
9	6. 45	39	29. 15	69	51. 45	99	74. 15
10	7. 30	40	30. 0	70	52. 30	100	75. 0
11	8. 15	41	30. 45	71	53. 15	101	75. 45
12	9. 0	42	31. 30	72	54. 0	102	76. 30
13	9. 45	43	32. 15	73	54. 45	103	77. 15
14	10. 30	44	33. 0	74	55. 30	104	78. 0
15	11. 15	45	33. 45	75	56. 15	105	78. 45
16	12. 0	46	34. 30	76	57. 0	106	79. 30
17	12. 45	47	35. 15	77	57. 45	107	80. 15
18	13. 30	48	36. 0	78	58. 30	108	81. 0
19	14. 15	49	36. 45	79	59. 15	109	81. 45
20	15. 0	50	37. 30	80	60. 0	110	82. 30
21	15. 45	51	38. 15	81	60. 45	111	83. 15
22	16. 30	52	39. 0	82	61. 30	112	84. 0
23	17. 15	53	39. 45	83	62. 15	113	84. 45
24	18. 0	54	40. 30	84	63. 0	114	85. 30
25	18. 45	55	41. 15	85	63. 45	115	86. 15
26	19. 30	56	42. 0	86	64. 30	116	87. 0
27	20. 15	57	42. 45	87	65. 15	117	87. 45
28	21. 0	58	43. 30	88	66. 0	118	88. 30
29	21. 45	59	44. 15	89	66. 45	119	89. 15
30	22. 30	60	45. 0	90	67. 30	120	90. 0

Inveniantur ergo ſinus intermedii per probl. 4. (§. 19).

7. Denique ſinus ſcrupulorum ſecundorum ab 1 usque ad 60 inveniantur per probl. præc. (§. 23).

Ita Canon Sinuum erit conſtructus. *Q. e. f.*

PRO-

PROBLEMA 9.

26. *Dato ſinu AD arcus AE invenire tangentem EF & ſecantem FC ejusdem arcus.* Tab. I. Fig. 2.

RESOLUTIO, & DEMONSTRATIO.

Quia ſinus AD & tangens FE ad radium EC perpendicularis (§. 3. 8); erit ille huic parallelus (§. 241 *Geom.*). Quare ut Coſinus DC ad ſinum AD ita ſinus totus ad tangentem EF: item ut Coſinus DC ad ſinum totum AC ita ſinus totus EC ad ſecantem CF (§. 253 *Geom.*). Invenietur adeo per illationem primam tangens EF; per alteram ſecans FC (§. 272 *Arithm.*). *Q. e. i. & d.*

SCHOLION.

27. *Conſtructo igitur Canone ſinuum* (§. 25), *haud difficilis eſt conſtructio Canonis tangentium atque ſecantium. Uterque junctim ſumtus Canon triangulorum naturalis dici ſolet, quia triangulorum analyſi inſervit. Equidem paſſim apud Autores theoremata non inelegantia occurrunt, quibus multi ſinus facilius inveniuntur, quam expoſita hactenus methodo.* Urſinus (a) *præſertim docet, quomodo ex ſinu Canonis omnium primi, e. gr. unius ſecundi per ſolam quaſi additionem & ſubtractionem totus Canon derivetur. Enimvero cum ab aliis dudum conſtructus ſit; ſufficit utcunque oſtendiſſe, quomodo conſtrui potuerit.*

PROBLEMA 10.

28. *Invenire ſinus cujuscunque dati logarithmum.*

RESOLUTIO.

Ut logarithmi eo accuratiores inveniantur, aſſumendi ſunt ſinus ad radium 10000000000 conſtructi. Mulctantur nempe Sinus in Canone *Pitiſci* majore 4 ultimis notis. Cum adeo ſinus ſint numeri 10 ut plurimum notis conſtantes, in canone autem logarithmorum, qui proſtat, maximo numeri naturales ultra 5 notas non aſcendunt; logarithmi eorum inveniuntur *per probl. 33 Arithm.* (§. 315). Utendum vero eſt canone logarithmorum majore.

E. gr. Sit inveniendus logarithmus Sinus 23°, qui apud *Pitiſcum* 3907311 284. Reſectis verſus ſiniſtram quinque notis 39073, ipſis reſpondens logarithmus eſt 4.5918768, conſequenter logarithmus numeri 3907300000 eſt 9.5918768. Differentia tabularis eſt 111. Quare infertur: ut 100000 ad 111 ita notæ reſiduæ ſinus dati 11284 ad numerum quartum proportionalem 12: qui ſi addatur logarithmo 9.5918768, prodit logarithmus quæſitus 9.5918780, qualis in Canone triangulorum artificiali reperitur.

(a) Trigon. lib. 2. c. 5. p. 164.

PROBLEMA 12.

29. *Invenire logarithmum tangentis, dato logarithmo ſinus & coſinus.*

RESOLUTIO.

1. Logarithmus ſinus addatur logarithmo ſinus totius.
2. A ſumma ſubtrahatur logarithmus Coſinus. Reſiduum eſt logarithmus tangentis (§. 26 *Trigon.* & §. 325 *Arithm.*).

E. gr. Inveniri debet logarithmus tangentis 23°.

Addantur Log Sin. 23° = 9.5918780
Log. Sin. tot. = 100000000

a ſumma = 195918780
ſubtrahatur Log. Coſ. = 99640261

relinquitur Log. tang. = 96278519

PROBLEMA 12.

30. *Invenire logarithmum ſecantis arcus cujuscunque, dato ſinu complementi ejusdem.*

RESOLUTIO.

1. Logarithmus ſinus totius multiplicetur per 2.
2. Ab ejus duplo ſubtrahatur ſinus complementi datus. Reſiduus fiet logarithmus ſecantis (§. 26 *Trigon.* & §. 325 *Arithm.*).

E. gr. Quærendus eſt logarithmus ſecantis arcum 23°. Calculi typus talis eſt:

Log. ſin. tot. = 100000000

Ejus duplum = 200000000
Log. Sin. Compl. = 99640261

Log. Secant. 23° = 10.0359739

SCHOLION.

31. Johannes Neperus, *qui primus logarithmos in Trigonometriam introduxit, ſinus totius logarithmum facit* 0. *Hinc creſcunt logarithmi ſinuum, ſinibus decreſcentibus, & tangentium atque ſecantium ſinu toto majorum logarithmi ſunt defectivi ſeu nihilo minores.* Neperus *logarithmos coſinuum* Antilogarithmos, *logarithmos vero tangentium* differentiales; Keplerus *etiam* Meſologarithmos *vocat. Dicuntur quoque hi logarithmi* Sinus & tangentes artificiales.

CAPUT II.

De

ANALYSI TRIANGULORUM.

THEOREMA 2.

Tab. I. Fig. 2. 32. *Tangens 45° EF æquatur radio EC.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam arcus AE 45°, *per hypoth.* erit quoque angulus ACE 45° (§. 57

(§. 57 *Geom.*), conſequenter angulus F 45° (§. 226 *Geom.*). Quare EF = CE (§. 238). *Q. e. d.*

THEOREMA 3.

Tab. I. Fig. I. 33. *In omni triangulo ABC latera ſunt ut ſinus oppoſitorum angulorum.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim omne triangulum circulo inſcriptibile ſit (282 *Geom*); erunt latera AC, CB & AB chordæ arcuum cognominum (§. 36 *Geom.*); conſequenter latera dimidia ſinus arcuum dimidiorum (§. 2). Sed arcus dimidii ſunt menſuræ angulorum oppoſitorum B, A & C (§. 299 *Geom.*). Ergo ut latus AC ad ſinum anguli ſibi oppoſiti B; ita latus BC ad ſinum angula ſibi oppoſiti A, ita etiam AB ad ſinum anguli ſibi oppoſiti C. *Q. e. d.*

PROBLEMA 13.

Tab. I. Fig. I. 34. *Datis duobus angulis A & C, una cum latere uni eorum C oppoſito AB, invenire latus alteri A oppoſitum BC.*

RESOLUTIO.

Inferatur (§ 33):
ut ſinus anguli C
ad latus ſibi oppoſitum datum AB.
Ita Sinus anguli alterius A
ad latus quæſitum BC.

Invenietur adeo Logarithmorum ope BC *per probl. 38 Arithm.* (§. 325).

E. gr. Sit C = 48° 35′, A = 57° 28′ AB = 74′. Calculus talis erit:

Log. Sin. C	9.8750142
Log. AB	1.8692317
Log. Sin. A	9.9258681
Sum. Log. AB & Sin. A	11.7950998
Log. BC	1.9200856

cui in Canone logarithmorum pro numeris vulgaribus reſpondent 83′. Cum vero logarithmus in tabulis non exactus reperiatur; inveniri poſſunt numeri inventi 83′ fractiones decimales, hoc eſt, in caſu noſtro digiti, ſi ſub characteriſtica 2 poſt 830″ denuo logarithmus ipſius BC evolvatur: cui proxime reſpondet numerus 831″. Quodſi præter digitos etiam lineas deſideres: eundem logarithmum quære poſt 8310‴ & ei quam proxime reſpondere deprehendes 8319‴. Immo ſi canon major ad manus ſit, ipſa ſcrupula quarta expiſcari licet, ſi logarithmus inventus poſt 83190⁗ evolvatur; ubi eidem quam proxime reſpondet logarithmus numeri 83192. Eſt ergo BC 8° 3′ 1″ 9‴, 2⁗ (§. 321 *Arithm.*).

SCHOLION.

35. *Quid factu opus ſit, ſi logarithmi characteriſtica fuerit 3, in Arithmetica loco citato docuimus.*

PROBLEMA 14.

36. *Datis duobus lateribus AB & BC una*

Tab. I. Fig. II. *BC una cum angulo C uni eorum oppoſito, invenire angulos reliquos A & B.*

RESOLUTIO.

Inferatur (§ 33):
ut latus unum AB
ad Sinum anguli dati ſibi oppoſiti C:
Ita latus alterum BC
ad ſinum anguli quæſiti ſibi oppoſiti A.

Invenietur adeo logarithmus ſinus anguli A, utendo logarithmis *per probl. 38 Arithm.* (§. 325).

E. gr. Sit AB = 94′, BC = 69′, C = 72° 15′

Log. AB	1.9731279
Log. Sin. C	9.9788175
Log. BC	1.8388491
Sum. Log. Sin. C & BC	11.8176666
Log. Sin. A	9.9444387,

cui in canone proxime reſpondent 61° 37′. Quodſi Canon major non fuerit ad manus & præter ſcrupula prima etiam ſecunda deſiderentur *vi probl. 4.* (§. 19) hunc in modum inveniuntur.

A logarith. invento 99444387 ſubtrahe
Tabul. prox. min. 99443092

& notetur Differ. I. 1295

Simil: ex prox. maj. 99444457 ſubduc
prox. min. 99443092

& notetur Diff. II. 1365

Inferatur:

1365 — 60 — 1295

273 | 259
60
15540

7 5)
87
700.
7009
15540 (57″
2733
27

Eſt ergo angulus A = 61° 37′ 57″,
Sed C = 72 15 0

Quare A + C = 133 52 57
Quon. A + C + B = 179 59 60

erit B = 46° 7′ 3″

Similiter dentur in triangulo rectangulo præter rectum A hypothenuſa BC & cathetus AC pro angulo B. Sit nempe BC 49′ AC 36′. Calculus talis erit: Tab. I. Fig. 6.

Log. BC	1.6901961
Log. Sin. tot.	10.0000000
Log. AC	1.5563025
Log. Sin. B	9.8661064,

cui in canone proxime reſpondent 47° 16′. Ergo C = 42° 44′ (§. 226 *Geom.*).

LEMMA.

37. *Si a ſemiſumma duarum quantitatum ſubtrahatur ſemidifferentia, relinquitur quantitas minor: Si vero illi hæc addatur, prodit major.*

DEMONSTRATIO.

Numerus major componitur ex minore

minore & differentia (§. 57 *Arithm.*): ergo ſumma ex minore bis ſumta & differentia, conſequenter ſemiſumma ex minore & ſemidifferentia. Quare ſi a ſemiſumma ſemidifferentia ſubtrahatur, minor quantitas relinquitur (§. 57 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Quodſi vero ſemiſummæ ſemidifferentia addatur, aggregatum erit compoſitum ex quantitate minore & differentia (§. 55 *Arithm.*), adeoque numerus major, *per demonſtr. Quod erat alterum.*

PROBLEMA 15.

38. *Datis duobus lateribus BA & AC cum angulo intercepto A, invenire angulos reliquos.*

RESOLUTIO.

Tab. I. Fig. 7. I. Si triangulum ABC fuerit rectangulum; aſſumto crure uno circa rectum AB pro radio, erit CA tangens anguli oppoſiti B (§. 8). Inferatur ergo:

ut crus unum AB
ad alterum AC:
Ita ſinus totus
ad tangentem anguli B.

E. gr. Sit BA 79′, AC 54′: erit

Log. BA	18976271
Log. AC	17323938
Log. Sin. Tot.	100000000
Log. Tang. B,	9.8347667, cui in

Canone reſpondent quam proxime 34° 21′. Ergo angulus C 55° 39′ (§. 226. *Geom.*).

II. Si angulus A fuerit obliquus; Tab. I. Fig. 7.

1. inferatur:
ut ſumma laterum datorum AB & AC
ad differentiam eorundem.
Ita tangens ſemiſummæ angulorum quæſitorum C & B.
ad tangentem ſemidifferentiæ eorundem.

2. Addatur ſemidifferentia ad ſemiſummam; aggregatum erit angulus major C. Eadem a ſemiſumma ſubtrahatur, reſiduus fiet angulus minor B.

E. gr. Sit AB 75′, AC 58′, A 108° 24′, erit

AB 75	AB 75	A+B+C	179° 60′
AC 58	AC 58	A	108 24
Sum: 133	Diff: 17	B+C	71 36
		½(B+C)	35 48

Log. AB + AC	2.1238516
Log. AB − AC	1.2304489
Log. Tang. ½ (B+C)	9.8580694
Summa Logg.	12.0885183
Log. Tang. ½ (C−B)	8.9646667, cui

in tabulis proxime reſpondent 5° 16′.

$\frac{1}{2}(B+C) = 35°48'$	$\frac{1}{2}(B+C) = 35°48'$
$\frac{1}{2}(C-B) = 5\ 16$	$\frac{1}{2}(C-B) = 5\ 16$
$C = 41.\ 4$	$B = 30\ 32$

DEMONSTRATIO.

Crure majore dato AB ex vertice anguli dati A deſcribatur circulus (§. 127 *Geom.*), & crus minus AC utrinque continuetur (§. 19 *Geom.*) donec circulo in E & D occurrat. Erit ob AE = AB = AD (§. 38 *Geom.*) CE ſumma laterum datorum, CD differentia eorundem. Quoniam DE diameter (§. 37 *Geom.*); erit EBD ſemicirculus (§. 131 *Geom.*), conſequenter angulus EBD rectus (§. 302 *Geom.*), adeoque EB ad BD perpendicularis (§. 75 *Geom.*). Quare ſi BD ſumatur pro ſinu toto; erit EB tangens anguli EDB (§. 8). Eſt vero $o = x + y$ (§. 224 *Geom.*) & inde ob $u = \frac{1}{2}o$ (§. 298 *Geom.*), $u = \frac{1}{2}(x+y)$. Ergo EB tangens ſemiſummæ angulorum quæſitorum x & y. Quoniam $x = u + n$ (§. 224 *Geom.*); erit n ſemidifferentia angulorum x & y (§. 37). Sumto itaque DB denuo pro radio ſi deſcribatur arcus DG (§. 127 *Geom.*) & in D excitetur perpendicularis DF (§. 225 *Geom.*); erit DF tangens anguli n (§. 8), hoc eſt, ſemidifferentiæ angulorum quæſitorum x & y *per demonſtr.* Jam cum anguli EBD & FDB ſint recti *per demonſtr.* adeoq; BED & FDE æquales (§. 241. 222 *Geom.*), item verticales ad C æquales (§. 150 *Geom.*); erit CE : BE = DC : DF (§. 252 *Geom.*), conſequenter & CE : DC = BE : DF (§. 164 *Arithm.*). Data itaque per tangentem DF angulorum quæſitorum ſemidifferentia, reliqua in reſolutione manifeſta ſunt per lemma præcedens (§. 37). *Q. e. d.*

PROBLEMA 16.

39. *Datis tribus lateribus AB, BC & CA, invenire angulos A, B & C.* Tab. I. Fig. 8.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Ex vertice anguli A latere minimo AB deſcribatur circulus (§. 127 *Geom.*); erit ob AD = AB (§. 38 *Geom.*) CD ſumma crurum AC & AB; CF vero differentia eorundem. Et ideo inferre licet (§. 318 *Geom.*):
   ut Baſis BC
   ad ſummam crurum CD,
   Ita differentia crurum CF
   ad ſegmentum baſis CG.
2. Inventum adeo ſegmentum CG (§ 272 *Arithm.*) ſi ſubtrahatur a baſi CB; relinquitur chorda GB.
3. Demittatur ex A perpendicularis AE ad chordam GB (§. 205 *Geom.*), erit BE = EG = $\frac{1}{2}$GB (§. 276 *Geom.*). Datis adeo in tri-

triangulo rectangulo AEB lateribus A B & BE, & in altero ACE lateribus AC & CE; inveniuntur anguli B atque A (§. 36). *Q. e. f. & d.*

E. gr. Sit AB = 36', AC = 45', BC = 40': erit

AC = 45'	AC = 45'
AB = 36	AB = 36
AC + AB = 81	FC = 9

Log. BC	= 1.6020600
Log. AC + AB	= 1.9084850
Log. FC	= 0.9542425
Logg. ſumma	= 2.8627275
Log. CG	= 1.2606675,

cui in tabulis quam proxime reſpondent 18'2''2''' (§. 321 *Arithm.*).

BC = 4000'''	EG = 1089'''
CG = 1822	CG = 1822
BG = 2178	CE = 2911
BE = 1089	

Log. AB	= 3.5563025
Log. Sin. tot.	= 10.0000000
Log. EB	= 3.0370279

Log. Sin. EAB = 9.4807254, cui in tabulis quam proxime reſpondent 17° 36', adeoque angulus ABE 72° 24' (§. 226 *Geom.*).

Log. AC	= 3.6532125
Log. Sin. tot.	= 10.0000000
Log. CE	= 3.4640422

Log. Sin. EAC = 9.8108297, cui in tabulis quam proxime reſpondent 40° 18'. Ergo ACE 49° 42' (§. 226 *Geom.*) & CAB 57° 54' (§. 78 *Arithm.*).

CAPUT III.
De
USU TRIGONOMETRIÆ PLANÆ IN GEOMETRIA PRACTICA.

PROBLEMA 17.

40. *Conſtruere inſtrumentum transportatorium rectilineum, hoc eſt, ſcalam ſecundum eam proportionem diviſam quam habent ſubtenſæ arcuum ad radium.*

RESOLUTIO.

1 Ex communi canone ſinuum excerpantur ſinus arcuum 2°30', 5°, 7° 30', 10°, 12°30' &c. nempe in progreſſione arithmetica progredientium, in qua terminorum

norum differentia eſt $2\frac{1}{2}$. Eos multiplica per 2; erunt facta chordæ arcuum 5, 10, 15, 20, 25 &c. (§. 2): ut hic in tabella factum vides.

Gr.	Chor. dimid.	Chor. integ.	Gr.	Chor. dimid.	Chor. integ.
5	43.6	87	50	422.6	845
10	87.1	174	55	461.7	923
15	130.5	261	60	500.0	1000
20	173.6	347	65	537.2	1074
25	216.4	433	70	573.5	1147
30	258.8	517	75	608.7	1217
35	300.7	601	80	642.7	1285
40	342.0	684	85	675.5	1351
45	382.6	765	90	707.1	1414

Tab. I. Fig. 9. 2. Ducatur recta AD & ad eam erigatur perpendicularis AB (§. 201 *Geom.*) pro arbitrio in quinque, decem, viginti, &c. partes æquales dividenda, prout vel ſolos gradus, vel gradus dimidios, vel partes quartas &c. indicare debent ſubtenſæ.

3. Per ſingula diviſionum puncta agantur rectæ ipſi AD parallelæ (§. 243 *Geom.*).

4. In lineam AD, incipiendo ſemper a puncto A, transfer particulas chordarum integrarum gradibus 5°, 15°, 25°, 35° &c. reſpondentes ex ſcala Geometrica in particulas minutisſimas diviſa (§. 262 *Geom.*): in linea vero ſuperiori BC eodem modo deſignentur particulæ chordarum reſpondentes gradibus 10, 20, 30, 40, 50 &c. Quodſi ſcala Geometrica non continet particulas adeo minutas, quales deſiderantur; utendum eſt chordis dimidiis: quod perinde ac ſi particulæ in ſcala bifariam dividerentur. Negligenda autem eſt nota puncto a reliquis ſeparata, vel ſi major fuerit, ejus loco addenda eſt unitas ultimæ earum, quæ retinentur. E. gr. loco 258.8 aſſume 259. Ultimas nimirum notas ideo adjecimus, ut appareret, quomodo earum dupla pro chordis computata fuerint.

5. Ducantur transverſæ ex B in 5, ex 5 in 10, ex 10 in 15, ex 15 in 20, ex 20 in 25 &c.

Cum enim A 5, B 10 &c. ſint chordæ 5, 10 &c. graduum & chordæ a quinis ad quinos gradus fere arcubus proportionaliter creſcant; erit c1 ſubtenſa arcus 1°, d2 ſubtenſa 2° &c. graduum (§. 253 *Geom.*).

COROLLARIUM I.

41. Quia ſubtenſa 60° eſt radius (§. 338 *Geom.*); anguli quantitatem inveſtigaturus intervallo B 60 deſcribat ex vertice anguli intra crura ejus arcum, qui eſt menſura ipſius (§. 55 *Geom.*), & ejus chordam ad ſcalam applicet, quæ, ſi e. gr. ex *d* in 43 pertingat, oſtendit angulum eſſe 43°.

COROL-

COROLLARIUM 2.

42. Angulus datæ quantitatis conſtruetur, ſi radio B60 deſcribatur ex centro B arcus CF & ſubtenſa gradus dati e. gr. 23, in ſcala reperta transferatur ex C in D. Erit enim DC menſura anguli B (§. 55 *Geom.*), adeoque tot graduum, quot arcus continet (§. 57 *Geom.*).

SCHOLION.

43. *Hujus inſtrumenti beneficio quantitatem angulorum etiam in ſcrupulis ſatis accurate explorari experientia loquitur.*

PROBLEMA 18.

44. *Circulo polygonum regulare inſcribere & circumſcribere.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Tab. I. Fig. I. 1. Aſſumto radio 10000 partium, quales in Canone triangulorum habere ſupponitur, inde excerpatur ſinus ejus arcus, qui prodit, peripheria integra 360° per duplum numerum laterum polygoni, aut (quod perinde eſt) ſemiperipheria hoc eſt 180° per numerum laterum polygoni diviſa. Illius enim duplum eſt chorda arcus dupli (§. 1), adeoque latus AB polygoni circulo inſcribendi (§. 325 *Geom.*).

2. Quodſi radius circuli, cui e. gr. pentagonum inſcribendum, detur juxta certam aliquam menſuram, e. gr. 345″; latus polygoni in eadem menſura invenitur per regulam trium (§. 272 *Arithm.*) inferendo nempe

10000 — 1176 — 345″

345

5880

4704

3528

4057|200 (40′5″7‴ Lat. Pentag.
1 0|000

3. Dato radio deſcribatur circulus & in eo applicetur latus polygoni, quoties fieri poteſt (§. 325 *Geom.*).

4. Polygono regulari circulo inſcripto ſimile circumſcribetur (§. 537 *Geom.*).

SCHOLION.

45. *Ne moleſta ſit rationis lateris polygoni ad radium ex canone ſinuum inveſtigatio, in tabula hic exhibemus latera polygonorum iſtiusmodi particulis expreſſa, qualium radius habet* 100000000: *In praxi tot notæ verſus dexteram reſecantur, quot per circumſtantias ſingulares ſuperfluæ judicabuntur.*

Num. Later.	Quantitas Lateris	Num. Later.	Quantitas Lateris
III	17320508	VIII	7653668
IV	14142135	IX	6840402
V	11755705	X	6180339
VI	10000000	XI	5634651
VII	8677674	XII	5176380

PROBLEMA 19.

Tab. I. Fig. 11. 46. *Super data recta AB polygonum regulare deſcribere: & dato polygono regulari ABCDE circulum circumſcribere.*

RESOLUTIO.

Non alia re opus eſt, quam ut ratione lateris ad radium ex tabula præcedente aſſumta quæratur radius in ea menſura, in qua datur latus AB (§. 272 *Arithm.*) dato enim latere AB & radio AL polygonum deſcribi poteſt (§. 44). Si vero intervallo radii ex A & B ſuper latere polygoni uno fiat interſectio in L, habebitur centrum L circumſcribendi circuli (§. 37 *Geom.*).

PROBLEMA 20.

47. *Datis ſinu verſo AB & ſinu BC in menſura communi, non in particulis radii decimalibus, invenire arcum FC in gradibus.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Tab. I. Fig. 12. 1. Quæratur ex his datis ſemidiameter AD (§. 313 *Geom.*).

2. Datis jam in triangulo DBC præter rectum B (§. 3) lateribus BC & DC, invenitur angulus ADC (§. 36): qui indicat numerum graduum in arcu AC (§. 57 *Geom.*), cujus duplus eſt arcus FC (§. 277. *Geom.*). *Q. e. i. & d.*

SCHOLION.

48. *Hujus problematis uſus eſt in inveniendo ſegmento circuli* (§. 413 Geom.).

PROBLEMA 21.

49. *Datis in figura rectilinea quacunque omnibus lateribus AB, BC, CD, DE, præter unam EA & angulis* o & y; *invenire diagonales.* Tab. I. Fig. 13.

RESOLUTIO.

1. In △ ABE datis duobus lateribus AB & AE invenitur primum angulus *o* (§. 36); dein diagonalis BS (§. 34).
2. Eodem modo reſoluto triangulo BCD invenitur diagonalis BD. *Q. e. f.*

SCHOLION.

50. *Cum ichnographiæ arearum optime perficiantur, datis omnibus lateribus itemque diagonalibus* (§. 345 Geom) *; hujus problematis in planimetria uſus eſt non ſpernendus. Qui tamen praxi operam dant moleſtias calculi fugiunt; lucro magis quam accurationi intenti.*

PROBLEMA 22.

51. *Metiri diſtantiam duorum locorum BC ex eodem tertio A acceſſorum.* Tab. I. Fig. 14.

RESOLUTIO.

1. Inveſtigetur quantitas anguli A, puncto A ad arbitrium aſſumto (§. 146 *Geom.*), nec non rectarum AB & AC (§. 122 *Geom.*).
2. Datis in △ BAC duobus lateribus

bus BA & BC cum angulo intercepto A, inveniatur primum angulus B (§. 38) & hinc porro diſtantia BC (§. 36). *Q. e. f.*

SCHOLION.

52. *Exempla non addimus, cum problemata, quibus triangula in hac trigonometria applicatione ſolvuntur, jam in ſuperioribus fuerint exemplis illuſtrata. Ut tamen de commoda ſtationis electione A judicari poſſit, ſequentia addere libet.*

THEOREMA 4.

53. *Si error in quantitate anguli A admittitur, erit diſtantia vera ad diſtantiam erroneam per calculum productam ut ſinus anguli veri ad ſinum anguli erronei.*

DEMONSTRATIO.

Tab. II. Fig. 16. I. Ponamus peccari in ſola poſitione rectæ AC, ita quidem ut angulus DAC ſit juſto major, excedens verum DAE quantitate anguli EAC. Demiſſo ex A perpendiculo AD (§. 205 *Geom.*): erit ut ſinus totus ad AE ita ſinus anguli veri DAE ad diſtantiam veram DE (§.). Infertur autem in calculo: ut ſinus totus ad AE in campo menſuratam ita ſinus anguli erronei DAC ad diſtantiam quæſitam (§. *cit.*); quæ neceſſario erronea eſt ob ſinum anguli A juſto majorem aſſumtum. Quare ut ſinus anguli veri DAE ad diſtantiam veram DE; ita ſinus anguli erronei DAC ad diſtantiam erroneam (§. 156 *Arithm.*) conſequenter diſtantia vera & erronea ſunt ut ſinus angulorum veri & erronei (§. 164 *Arithm.*).

II. Eodem modo idem demonſtratur, ſi quantitas anguli veri fuerit DAC, erronei DAE, ut hic deficiat ab illo quantitate anguli EAC.

III. Denique ſi in poſitione rectæ AB ſimiliter aberretur, e. gr. exceſſu anguli BAF: itidem ut ante demonſtratur, eſſe ut ſinum anguli veri DAF ad ſinum erronei DAB ita partem diſtantiæ veræ DF ad erroneam, conſequenter ut ſinum anguli integri veri EAF ad ſinum integri erronei BAC ita diſtantiam veram FE ad erroneam BC (§. 178 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

54. Quoniam eadem poſita quantitate anguli veri & erronei eadem eſt ratio diſtantiæ veræ & erroneæ (§. 53); in hoc caſu error plurium pedum committitur, ſi diſtantia major, quam ſi minor.

COROLLARIUM 2.

55. Quia arcuum minorum ſinus rationem minorem inter ſe habent quam ſinus arcuum majorum æquidifferentium teſte canone ſinuum; ſi eadem quantitate aberratur in angulo minore ac majore, in caſu priore major

eſt error, quam in poſteriore, qui in definienda diſtantia committitur.

SCHOLION 1.

Tab. II. Fig. 16. 56. *Corollarii hujus veritatem caſu aliquo ſingulari illuſtrare juvat. Sit e.gr. angulus DAE 5°; per errorem aſſumatur DAC 5° 30′ porro AE 45′. Erit*

Log. ſin. tot.	10.0000000
Log. AE	1.6532125
Log. Sin. DAE	8.9402960
Log. Diſtant. veræ	70.5935085,

cui in Tabulis reſpondent 3′9″2‴.

Log. ſin. tot.	10.0000000
Log. AE	1.6532125
Log. Sin. DAC	8.9815729
Log. Diſt. erroneæ	70.6347854,

cui in Tabulis reſpondent 4′3″1‴.

Ponamus jam angulum DLE eſſe 80° & per errorem aſſumi angulum 80° 30′. Ut diſtantia erronea inveniri poſſit, reperienda eſt prius recta LE. Eſt autem

Log. Sin. DLE	9.9933515
Log. Diſt. veræ DE	0.5935085
Log. Sin. tot.	10.0000000
Log. LE =	0.6001570

Porro

Log. Sin. tot.	10.0000000
Log. LE	0.6001570
Log. Sin. 80° 30′	9.9940027
Log. Diſt. erroneæ	70.5941597,

cui in Tabulis reſpondent 3′9″2‴8⁗. *Deficit adeo diſtantia erronea nunc reperta ab erronea ſuperius inventa* 3″8‴2⁗.

COROLLARIUM 3.

57. Quare cum angulus DLE major ſit angulo DAE (§. 177 *Geom.*); ſtationem præſtat eligi viciniorem, quam remotiorem.

SCHOLION 2.

58. *Aliter vero ſe res habet, ſi quantitas DE ſine calculo inveſtigetur, triangulo ope inſtrumenti transportatorii & ſcalæ Geometricæ conſtructo* (§. 183 Geom.): *quod diſcrimen ut appareat, ſequens addimus theorema.*

THEOREMA 5.

59. *Si in definienda quantitate anguli A error aliquis admittatur, & diſtantia tum per calculum trigonometricum inveniatur, tum per conſtructionem trianguli DAC juxta ſcalam modicam determinetur; erit diſtantia erronea in caſu primo DG ad diſtantiam erroneam in altero DC ut ſecans anguli veri DAE ad ſecantem erronei DAC.* Tab. II. Fig. 15.

DEMONSTRATIO.

Si exceſſu peccetur eſt ut ſinus totus ad ſinum DAC ita AE ad DG (§. 53) & ut ſinus totus ad Sin. DAC ita AC ad DC (§. 34). Ergo AE: DG = AC : DC (§. 156 *Arithm.*), conſequenter AE : AC = DG : DC (§. 164 *Arithm.*). Sumto vero DA pro radio, AE eſt ſecans anguli veri DAE, AC ſecans anguli erronei DAC (§. 7.). Quare diſtantiæ erroneæ DG & DC ſunt ut ſecantes angulorum veri DAE & erronei DAC. Eadem prorſus

eſt

eſt demonſtratio, ſi in quantitate anguli A aſſignanda defectu peccatur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

60. Si angulus verus major erroneo; diſtantia erronea primi caſus major eſt diſtantia erronea ſecundi (§. 59), conſequenter in caſu primo minus deficit a vera, quam in altero.

COROLLARIUM 2.

61. Si angulus verus minor erroneo; diſtantia erronea primi caſus minor eſt diſtantia erronea ſecundi (§. 59), adeoque in caſu primo minus excedit veram quam in ſecundo.

COROLLARIUM 3.

62. Error itaque in caſu ſecundo admiſſus major ſemper eſt errore, qui in caſu primo committitur.

SCHOLION.

63. *Hinc intelligimus illas praxes eſſe errori omnium maxime obnoxias, in quibus angulos in campo ope inſtrumenti goniometrici inveſtigatos in chartam ope inſtrumenti transportatorii transferimus: omnium vero accuratiſſimas eſſe, quæ calculo trigonometrico ſuperſtruuntur aut ſolis lineis in campo menſuratis nituntur, ubi in earum poſitione ob errorem in angulorum quantitate commiſſum aberrari nequit. Dedimus hic ſpecimen aliquod eorum, quæ circa praxin Geometriæ accuratam expendi merentur, ut oſtenderemus, theoriam accuratam parere praxin accuratam, & ad theoriam perfecte addiſcendam excitemus, qui olim praxi operam daturi. Falluntur enim, qui ſibi perſuadent, per theoriam addiſci non poſſe certas praxium accuratarum circumſtantias, tum demum obſervandas, ubi manum praxi admoveris. Etenim plerumque tantum confuſe obſervantur; per theoriam vero accurate determinantur.*

PROBLEMA 23.

64. *Invenire diſtantiam duorum locorum AC, quorum unus A tantum acceſſibilis.* Tab. I. Fig. 16.

RESOLUTIO.

1. Inveſtigetur quantitas angulorum A & B, ſtatione in B electa (§. 146 *Geom.*), itemque rectæ AB (§. 122 *Geom.*).
2. Inveniatur AC (§. 34). *Q. e. f.*

PROBLEMA 24.

65. *Invenire diſtantiam duorum locorum inacceſſorum AB.* Tab. II. Fig. 17.

RESOLUTIO.

1. Statione commoda in C electa inveſtigetur quantitas anguli ACB, itemque angulorum D & E atque BCE (§. 146 *Geom.*), punctis D & E cum C in eadem linea deſignatis (§ 121 *Geom.*).
2. Inveſtigetur etiam quantitas rectarum DC & CE (§. 122 *Geom.*).
3. Summa angulorum ACB & BCE, itemque BCE & E ſubtrahatur ex 180°, ut relinquantur anguli ACD & CBE (§. 142 *Geom.*): eodemque modo inveniatur angulus DAC.
4. Datis jam in triangulis DAC & CBE angulis cum latere uno, nempe DC in primo, CE in al-

tero, inveniuntur AC & CB (§. 34) & hinc porro angulus CAB (38), tandemque AB (§. 36).

PROBLEMA 25.

Tab. II. Fig. 18. 66. *Invenire altitudinem acceſſibilem* AB.

RESOLUTIO.

1. Statione in E electa inſtrumentoque (§. 270 *Geom.*) rite collocato, inveſtigetur quantitas anguli ADC (§. 146 *Geom.*).
2. Quæratur porro diſtantia ſtationis ab altitudine DC (§. 122 *Geom.*) quæ erit ad AC perpendicularis (§. 216 *Geom.*).
3. Cum adeo C ſit rectus (§. 75 *Geom.*) in triangulo ACD invenietur AC (§. 34).
4. Huic ſi addatur BC; prodibit altitudo integra AB. *Q. e. i.*

THEOREMA. 6.

Tab. II. Fig. 19. 67. *Si in quantitate anguli A inveſtiganda aberretur, erit altitudo vera BD ad falſam BC ut tangens anguli veri DAB ad tangentem anguli erronei CAB: & idem error in definienda altitudine committitur tam per calculum, quam per conſtructionem, ſi utrobique idem admiſſus fuerit in quantitate anguli A.*

DEMONSTRATIO.

Aſſumto AB pro ſinu toto, erit DB tangens anguli DAB; CB autem tangens anguli CAB (§. 7). Sunt itaque altitudines BD & BC ut tangentes angulorum DAB & BAC. *Quod erat unum.*

Si in quantitate anguli A peccetur quantitate DAC: error per calculum admiſſus eſt DC, *per demonſtr.* Sed idem per conſtructionem admittitur (§. 249 *Geom.*). Ergo utroque in caſu idem error committitur. *Quod erat alterum.*

Eodem modo ſe habet demonſtratio, ſi angulus erroneus ſit minor vero.

COROLLARIUM 1.

68. Quoniam poſita eadem quantitate anguli veri atque erronei eadem eſt ratio altitudinis veræ ad erroneam (§. 67); error plurium pedum committitur in altitudine majore quam in minore.

COROLLARIUM 2.

69. Quia tangentes arcuum majorum & valde exiguorum ſeu recto vel minuto proximorum minorem rationem inter ſe habent quam tangentes mediocrium ſeu ſemirecto vicinorum, canone tangentium teſte; ſi idem error committitur in angulo majore aut valde exiguo & mediocri; error in altitudine admiſſus major erit in caſu priore quam in poſteriore (§. 139 *Arithm.*).

SCHO-

SCHOLION.

70. *Sit e. gr. angulus verus DAB* 30°; *AB* 67′: *erit altitudo vera* 3°8′ 6″. *Ponamus aſſumi angulum erroneum BAC* 31°: *is producet altitudinem erroneam BC* 4°0′2″ (§.). *Sit in diſtantia minore DE angulus DEB recto proximus* 86° *& aſſumatur per errorem angulus* 87°: *reperietur altitudo erronea* 5°1′6″, *quæ erroneam ſupra inventam excedit* 1°1′4″.

COROLLARIUM 3.

71. Quoniam itaque in diſtantia minore EB angulus E major eſt quam DAB in majore AB (§. 177 *Geom.*), in diſtantia autem valde remota difficulter anguli admodum exigui quantitas exacte determinatur: in metiendis altitudinibus diſtantia ſtationis ab altitudine aſſumenda eſt mediocris, ita ut angulus DEB non multum abeat a ſemirecto.

THEOREMA. 7.

Tab. II. Fig. 20. 72. *Si inſtrumentum in A non fuerit horizontaliter collocatum, ſed e. gr. quantitate anguli BAD verſus horizontem inclinatum; erit altitudo vera ad falſam ut tangens anguli veri CAB ad tangentem erronei CAD.*

DEMONSTRATIO.

Sumto enim AB pro radio, CB eſt tangens anguli veri CAB (§. 7). Inferendum ergo: ut ſinus totus ad tangentem CAB ita AB ad altitudinem veram. Infertur autem per errorem: ut ſinus totus ad tangentem CAD ita AB ad altitudinem erroneam. Quamobrem ut tangens CAB ad tangentem CAD ita altitudo vera ad erroneam (§. 167 *Arithm.*). Idem eodem modo oſtenditur, ſi inſtrumentum quantitate anguli EAB a ſitu horizontali reclinetur. *Q. e. d.*

SCHOLION.

73. *Eadem ergo hic locum habent corollaria quæ modo theoremati præcedenti ſubjecimus. Cæterum patet altitudines exactas non inveniri ob duplicem errorem, ex vitioſo nempe ſitu tam lineæ AC, quam AB commiſſum.*

PROBLEMA 26.

74. *Metiri altitudinem inacceſſam AB.*

RESOLUTIO.

1. Eligantur duæ ſtationes G & E cum altitudine AB in eadem recta (§. 121 *Geom.*) tanto intervallo DF diſtantes, ut angulus FAD non ſit nimis exiguus nec altera ſtatio G nimis vicina altitudini AB (§. 71. 73). Tab. II. Fig. 21.
2. Inveſtigetur quantitas angulorum ADC, AFC & CFB (§. 146 *Geom.*) itemque diſtantiæ FD longitudo (§. 122 *Geom.*).

3. In-

3. Inveniatur primum in triangulo AFD ex datis angulo D *per obſervationem*, & angulo AFD (§. 142 *Geom.*) & latere FD latus AF (§.34): dein ex notis in triangulo ACF præter rectum C angulo F & latere AF, latus AC itemque CF (§. 34): tandem ex cognitis in triangulo FCB præter rectum C angulo CFB & latere CF latus CB (§. 34).

4. Addantur AC & CB. Ita prodit altitudo quæſita AB (§. 78 *Arithm.*).

FINIS

Trigonometriæ planæ.

ERRATA.

p. 222 lin. 27 HC l. AC & lin. 33 FG l. FH.

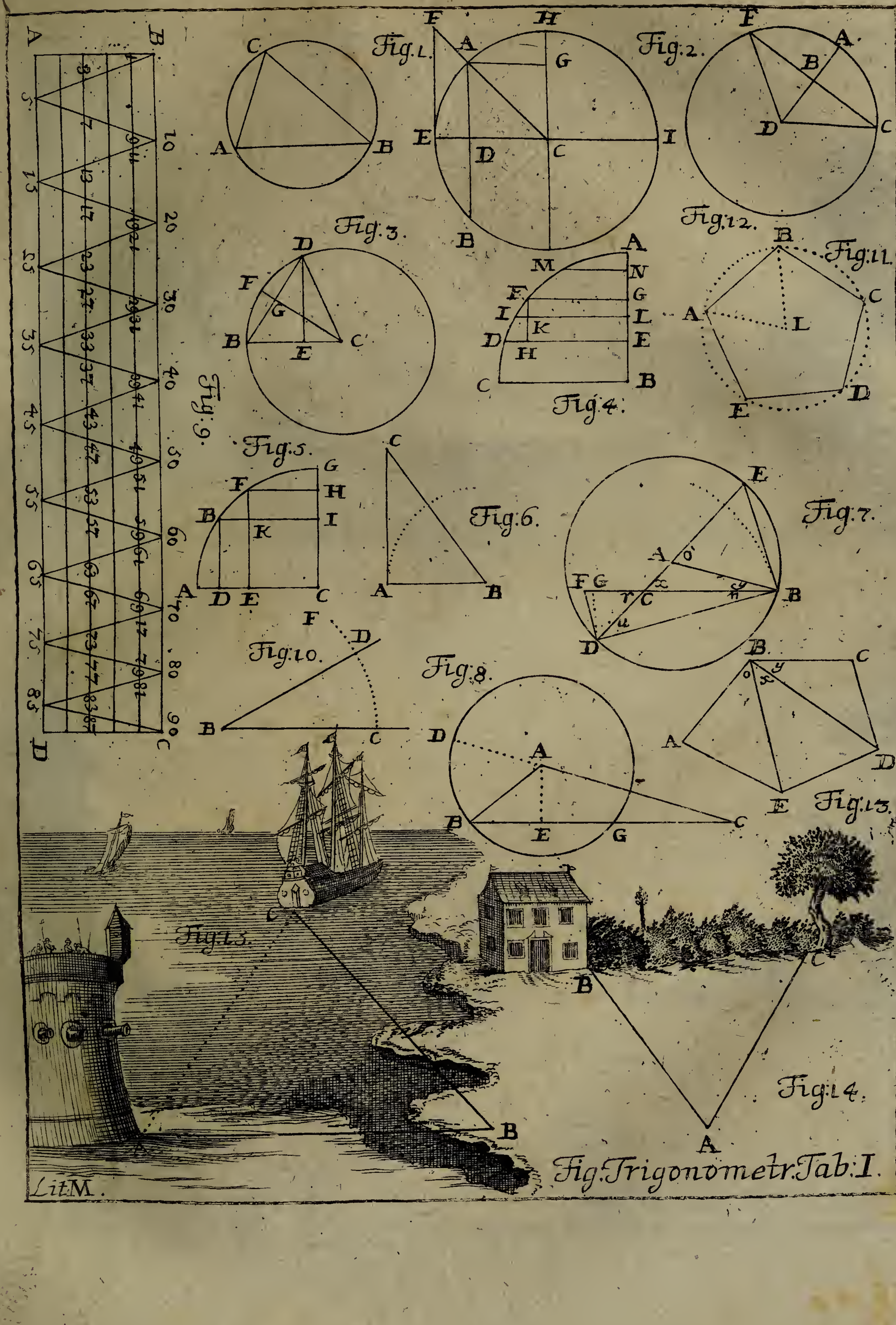


Fig. Trigonometr. Tab: I.

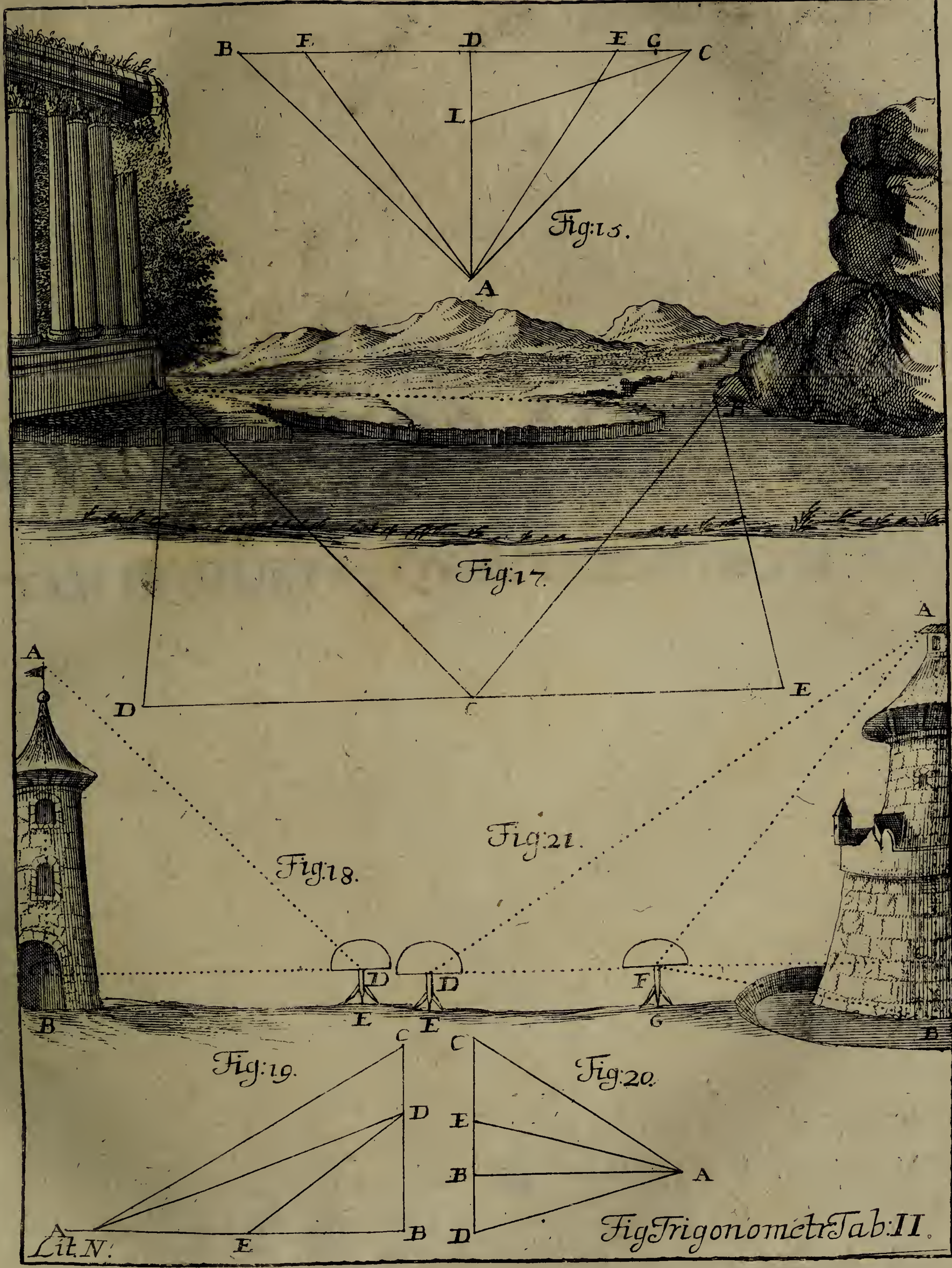


Fig.Trigonometr.Tab.II.



ELEMENTA
ANALYSEOS MATHEMATICÆ
TAM FINITORVM, QVAM INFINITORVM.

PRÆFATIO.

APicem totius eruditionis humanæ conſcendimus Analyſin tradituri: eſt enim ars per calculum quantitatum generalem proprio Marte inveniendi veritates in Matheſi non minus pura, quam applicata. Elementis Arithmeticæ communis atque Geometriæ hactenus expoſitis inſtructus & Analyſi adjutus multa inveniet, quæ ex aliorum ſcriptis non ſine tædio alias haurire deberet; immo omnibus adhuc ignorata deteget. Ea vero perfectiſſima eſt ſtudiorum noſtrorum ratio, quæ paucis memoriæ mandatis aptos reddit ad inveniendum quodlibet eo maxime tempore, quo ejus cognitione opus. Nec major intellectus perfectio concipitur promptitudine ex datis quibusdam alia incognita eliciendi. Accedit, in moderna Analyſi artis ratiocinandi perfectiſſima occurrere exempla. Notiones enim ſignis expreſſæ imaginationi præſentia ſiſtunt, quæ alias ultra ejus ſphæram aſcenderent: longa ratiociniorum ſeries, quibus non ſine multa attentione ac circumſpectione notionum nexus detegitur, in artem ſignorum combinatoriam convertitur, conſtanter eandem & principiis paucis ac manifeſtis ſuperſtructam. Illud autem prorſus mirabile exiſtit, ope analyſeos unica ſæpius linea tot veritates exprimi, quæ juxta communem methodum exponenda ac demonſtranda volumina integra non caperent.

Hinc unius lineæ intuitu integras fere diſciplinas paucorum minutorum ſpatio addiſcere licet, quibus juxta communem methodum comprehendendis anni complures vix ſufficerent. Solidam ergo in Matheſi eruditionem conſecuturus Analyſi ſtudeat opus eſt. Ne autem, non tam difficultate (ea enim revera nulla eſt), quam novitate rei deterritus a præſtantiſſimo ſtudiorum genere arceatur: Arithmeticam ſpecioſam familiarem ſibi reddat, neglectis ſub initium regularum rationibus, ſicubi difficultatem faceſſant, & exemplis numericis in locum earundem ſubſtitutis. Ubi ad exempla Algebraica pervenerit, non inutile judicamus, ut tyrones data per numeros variis modis explicent & idem problema in caſibus ſpecialibus aliquoties ſolvant: ita enim futurum, ut calculo facilius adſueſcant & ejus rationes ſimplices perſpiciant. Neque vero putandum eſt, integram Analyſin jamdum eſſe inventam; quin potius tenendum, plurima adhuc ſubſidia deeſſe poſterorum induſtria detegenda. Certe quæ in elementis Geometriæ docuimus, per modernam analyſin non omnia eruuntur, inprimis ſi a linearum & ſuperficierum ſitu pendent. Quamobrem *Leibnitius*, vir in omni eruditione ſummus, pro ea, quæ ipſi eſt, ingenii perſpicacitate novam quandam *Analyſin ſitus* excogitavit, peculiari calculi generi (quem *calculum* ſitus appellat) ſuperſtructam, a calculo magnitudinum, quibus in noſtra Analyſi utimur, toto cœlo differentis. Immo qui hactenus reperta animo comprehenderit & ad ſolvenda problemata cum cura adhibuerit; pluribus regulis inveniendi artem ipſe locupletabit. Cæterum quæ vel in Arithmetica, vel in Geometria elementari ſtudio prætermiſſa, ea per Analyſin eruimus, ex Geometria quoque ſublimiori inveſtigantes, quæ præ reliquis ſcitu neceſſaria.

ELE-

ELEMENTA ANALYSEOS MATHEMATICÆ.

Pars I.

ELEMENTA ANALYSEOS FINITORUM TRADIT.

Sectio I.

De ARITHMETICA SPECIOSA.

CAPUT I.

De ARITHMETICA RATIONALIUM.

DEFINITIO 1.

1. ANalyſis *Mathematica* eſt methodus reſolvendi problemata Mathematica.

DEFINITIO 2.

2. *Arithmetica ſpecioſa* eſt, quæ computum quantitatum ſeu numerorum indeterminatorum docet.

HYPOTHESIS 1.

3. *Quantitatum datarum ſigna ſint literæ Alphabeti priores*, a, b, c, d &c. *quæſitarum poſtremæ* z, y, x &c. *Quantitates æquales eadem litera indigitentur.*

SCHOLION.

4. *Nempe cum quantitates datæ ac quæſitæ tanquam diſtinctæ intellectui repræſententur per diverſas notiones; eædem quoque tanquam diſtinctæ repræſentandæ ſunt imaginationi per ſigna diverſa.*

HYPOTHESIS 2.

5. *Si quantitatum denominandarum quædam relationes mutuæ dantur, aut aliunde tanquam cognitæ ſupponi poſſunt; eas quoque in denominatione exprimi conſultum eſt.* E. gr. Si fuerint duæ quantitates

quæſitæ, quarum una alterius tripla, & una vocetur x, major rectius dicetur $3x$, quam y. Similiter cum quantitas major ſit aggregatum ex ſemiſumma duarum quantitatum & earundem ſemidifferentia; minor vero differentia inter ſemiſummam & ſemidifferentiam earundem quantitatum (§. 37 *Trigonom.*); conſultum ſæpius eſt, ut ſemiſumma dicatur x & ſemidifferentia y, atque hinc quantitas major $x+y$, minor $x-y$, quam ut ipſa major x & minor y vocetur.

SCHOLION.

6. *Quinam fructus ex commoda quantitatum denominatione exſpectandi, ex ſubſequentibus patebit. Breviatur calculus idemque facilitatur; reſolutiones problematum ſæpe magis genuinæ inveniuntur.*

HYPOTHESIS 3.

7. *Signa operationum Arithmeticarum retineantur, quæ in Arithmetica communi tradidimus* (§. 56. 58. 61. 63. 233. 265), *niſi quod quantitates ſe mutuo dividentes, ubi commodum fuerit, inſtar fractionum ſcribantur.* E. gr. $\frac{a}{b} = a : b$; $\frac{3}{4} = 3 : 4$.

SCHOLION.

8. *Vulgo multiplicationis ſignum eſt* x. *E gr.* ab *ſcribitur* a x b. *Sed cum hoc ſignum facile cum litera* x *a typothetis confundatur; uſus ejus merito improbatur.*

HYPOTHESIS 4.

9. *Si vel unus, vel ambo factores ex pluribus literis componuntur; compoſiti parentheſi* ( ) *includuntur.* E. gr. factum ex $a+b-c$ in d ita ſcribitur: $(a+b-c)\,d$. Similiter factum ex $a+b-c$ in $d-g$ hunc in modum effertur: $(a+b-c)(d-g)$.

SCHOLION.

10. *Vulgo hæc facta ita ſcribunt:* $d \times \overline{a+b-c}$ & $\overline{a+b-c} \times \overline{d-g}$. *Sed cum hæc ſcriptio typothetis moleſtias creet, inprimis ſi ex alio capite linearum ſupra literas ducendarum numerus multiplicatur; ſignis Leibnitianis utendum eſſe judicamus, quæ non inutiliter in Actis Eruditorum Lipſienſibus uſurpantur & ab admodum* R. P. Guidone Grando (a) *in Italia primum introducta.*

HYPOTHESIS 5.

11. *Si quantitatum ſe mutuo dividentium una, vel ambæ ex literis pluribus componuntur; ſigno parentheſeos* ( ) *ſimiliter utimur, niſi circumſtantiæ ſingulares ſuadeant, eas fractionum inſtar ſcribi.* E. gr. Quotus ex $a+b$ per c ita ſcribitur: $(a+b) : c$. Quotus vero ex $a+b$ per $c-d$ ita exprimitur. $(a+b) : (c-d)$. Similiter $a : (a+b)$ deſignat quotum ipſius a per $a+b$ diviſi. Iidem quoti communiter ita ſcribuntur: $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a+b}{c-d}$, $\frac{a}{a+b}$.

HYPOTHESIS 6.

12. *Exponentes indeterminati tam rationum, quam dignitatum indicen-*

(a) in quadratura circuli & Hyperbolæ part. 2. p. m. 58.

dicentur per m, n, r, s, t &c. E. gr. x^m, y^m, z^r &c. deſignant potentias indeterminatas diverſi generis (§. 233 *Arithm.*); mx, ny, rz multipla vel ſubmultipla diverſa quantitatum x, y, z, prout m, n, r vel numeros integros, vel fractos deſignant (§. 127 *Arithm.*).

HYPOTHESIS 7.

13. *Si radix ex pluribus literis componitur, parentheſi includitur & exponens ipſi ſuffigitur, ut ante.* E. gr. $(a+b-c)^2$ deſignat quadratum ex $a+b-c$; $(a+b-c)^n$ potentiam quamlibet ſeu indeterminatam ipſius $a+b-c$.

SCHOLION.

14. *Communiter ita ſcribunt:* $\overline{a+b-c}^{\,2}$ $\overline{a+b-c}^{\,n}$.

DEFINITIO 3.

15. *Quantitas* ſigno + affecta dicitur *poſitiva*, item *affirmativa* atque *nihilo major*: quæ vero ſigno — afficitur, *privativa*, item *negativa* atque *nihilo minor*.

COROLLARIUM 1.

16. Quoniam + eſt ſignum additionis (§. 56 *Arithm.*); — vero ſignum ſubtractionis (§. 58 *Arithm.*): quantitas poſitiva prodit, ſi vera aliqua nihilo additur, e. gr. $0+3=+3$, $0+a=+a$; privativa relinquitur, ſi quantitas aliqua vera ex nihilo ſubtrahitur, e. gr. $0-3=-3$, $0-a=-a$.

SCHOLION 1.

17. *Ponamus, te habere nummorum nihil tibique donari* 100: *habebis ergo* 100 *nummos, adeoque plus nihilo. Plus nempe habes quam ante. Hi nummi quantitatem poſitivam conſtituunt. Ponamus e contrario, te nihil habentem ſolvere debere* 100 *nummos;* 100 *ergo nummorum debitum contrahes, adeoque antequam ſolutio fiat, minus nihilo habebis. Solvendi enim ſunt* 100 *nummi, ut nihil habeas. Hoc debitum quantitas negativa eſt. Notandum vero, quantitates poſitivas initio vel ſolitarie poſitas ſigno nullo affici.*

COROLLARIUM 2.

18. Sunt adeo quantitates privativæ verarum, per quas intelliguntur, defectus; conſequenter non quantitates veræ.

SCHOLION 2.

19. *Defectum per eam quantitatem metimur, qua deficit, & ſic intelligibilis evadit.*

COROLLARIUM 3.

20. Si reſiduo additur, quod fuerat ablatum, ea prodit quantitas, ex qua ſubtractio facta (§. 57 *Arithm.*). Ergo $-a+a=0$, $-3+3=0$ (§. 16).

COROLLARIUM 4.

21. Quoniam defectus unus alterum excedere poteſt (e. gr. Si 7 deficiunt, plura deſunt quam ubi 3 deficiunt), quantitates vero privativæ ſunt verarum defectus (§. 18) ideo quantitas una privativa aliquoties ſumta alteram ſuperare

perare poteſt. Quamobrem quantitates privativæ inter ſe homogeneæ ſunt (§. 30 *Arithm.*).

COROLLARIUM 5.

22. Sed quia defectus poſitivæ quantitatis aliquoties ſumtus poſitivam ſuperare nequit, cum potius multo magis ab ea deficiat (§. 16); quantitates privativæ poſitivis heterogeneæ ſunt (§. 30 *Arithm.* & §. 18).

COROLLARIUM 6.

23. Cum adeo quantitates privativæ poſitivis heterogeneæ, privativis homogeneæ ſint, (§. 21, 22); inter privativam & poſitivam ratio intercedere nequit, inter privativas vero ratio datur (§. 117 *Arithm.*). E. gr. $-3a : -5a = 3 : 5$.

SCHOLION 3.

24. *Non mirum videri debet inter quantitates privativas* $-3a$ & $-5a$ *eandem eſſe rationem, quæ eſt inter poſitivas* $+3a$ & $+5a$. *Quod enim quantitates quatuor, quarum binæ binis heterogeneæ ſunt, proportionales eſſe poſſint, tum ex rationum doctrina intelligitur, tum ex Geometria manifeſtum eſt, in qua eandem rationem inter lineas eſſe demonſtravimus, quæ inter ſuperficies datur. Falluntur autem, qui inter* 1 & -1 *atque inter* -1 & 1 *rationem eandem eſſe ſibi perſuadent* (§. 23).

THEOREMA 1.

25. *Quantitas quælibet pro unitate aſſumi poteſt.*

DEMONSTRATIO.

Quantitas enim quælibet in ſe una eſt (§. 3 *Arithm.*), nec ad aliam determinatam tanquam ad unitatem jam refertur (§. 13 *Arithm.*). Ergo ipſa pro unitate aſſumi poteſt (§. 4 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 1.

26. *Quantitates tam eodem, quam diverſis ſignis affectas addere.*

RESOLUTIO.

1. Si quantitates eadem litera notatæ eodem ſigno afficiuntur; numeri iis præfixi adduntur ut in Arithmetica communi.
2. Si ſignis diverſis afficiuntur, additio mutatur in ſubtractionem & reſiduo præfigitur ſignum majoris.
3. Quantitates diverſis literis notatæ junguntur mediante ſigno + (§. 3).

$$\begin{array}{l} 4a + 2b - 2c - 5d - g \\ 5a - 2b + 6c + 2d - 3g \\ \hline 9a + 4c - 3d - 4g. \end{array} \qquad \begin{array}{r} a - b \\ c \\ \hline a - b + c \end{array}$$

DEMONSTRATIO.

Cum litera quælibet, qua quantitas aliqua indigitatur, pro unitate aſſumi poſſit (§. 25); erit $a + a + a + a = 4a$, conſequenter $4a + 5a = 9a$ (§. 88 *Arithm.*). Eodem modo patet eſſe $-g - 3g = -4g$. *Quod erat unum.*

Quoniam $6c = 4c + 2c$, *per demon-*

monſtr. erit $6c - 2c = 4c + 2c - 2c$ (§. 83 *Arithm.*). Sed $2c - 2c = 0$ (§. 20). Ergo $6c - 2c = 4c$. Similiter $-5d = -3d - 2d$, *per demonſtr.* Sed $-5d + 2d = -3d - 2d + 2d$ (§. 80 *Arithm.*) & $-2d + 2d = 0$ (§. 20). Ergo $-5d + 2d = -3d$. *Quod erat alterum.*

Tertium per ſe patet (§. 7).

SCHOLION.

27. *Ut hic calculus facilius intelligatur, ponamus* a *denotare thalerum*, b *groſſum*, c *nummum*; *habebimus*

$7a - 9b + 5c$	=	7 th.	- 9 gr.	+ 5 num.
$3a + 5b - 9c$	=	3	+ 5	- 9
$10a - 4b - 4c$	=	10 th.	- 4 gr.	- 4 num.

THEOREMA 2.

28. *In ſubtractione quantitatum compoſitarum ſigna ſubtrahendæ mutantur in contraria, nempe + in — & — in +.*

DEMONSTRATIO.

Si $c + d$ fuerit ſubtrahenda ex $a + b$; differentiam eſſe debere $a + b - c - d$, adeoque ſigna + in quantitate ſubtrahenda in - mutari, ex hypoth. 3 (§. 7) patet. Sed ſi $c - d$ ſubtrahenda ex $a + b$ & integrum c ſubtrahitur, quantitas major ſubducta, quam fieri debebat. Ergo quod plus juſto ſubtractum eſt, d, iterum addendum. Prodit ergo $a + b - c + d$. *Q. e. d.*

PROBLEMA 2.

29. *Quantitates tam eodem, quam diverſis ſignis affectas a ſe invicem ſubtrahere.*

RESOLUTIO.

1. Si quantitates eadem littera notatæ ſigna eadem habent & minor e majore ſubtrahenda; ſubtractio ut in Arithmetica communi (§. 95 *Arithm.*) abſolvitur.
2. Si vero major e minori ſubducenda; contraria ratione minor e majore ſubtrahitur & reſiduo præfigitur ſignum -, ſi quantitates ſigno + afficiuntur; ſignum vero +, ſi ſigno - gaudent.
3. Si quantitates diverſa ſigna habent; in additionem mutatur ſubtractio & aggregato præfigitur ſignum ejus quantitatis ex qua ſubtractio facta eſt.
4. Si quantitates diverſis literis notatæ, ſigna ſubtrahendæ tantum in contraria mutantur.

$8a - 5c + 9d$	=	8 th.	- 5 gr.	+ 9 num.
$6a - 8c - 7d$	=	6	- 8	- 7
$2a + 3c + 16d$	=	2 th.	+ 3 gr.	+ 16 num.

$$9b + 15c - 7d + 8e - f$$
$$6b + 20c - 9d - 9e + 7f$$
$$\overline{3b - 5c + 2d + 17e - 8f}$$

$$a + b - c \qquad a + d$$
$$d - e + f \qquad c - e - g$$
$$\overline{a + b - c - d + e - f \qquad a + d - c + e + g}$$

DEMONSTRATIO.

Cum quantitates eadem litera notatæ ſint vel unitates eædem, vel ejus-

ejusdem unitatis multiplæ aut ſubmultiplæ (§. 25); erit $8a - 6a = 2a$ (§. 31. 95 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Si quantitas major $20c - 9d$ ex minore $15c - 7d$ ſubtrahenda; erit reſiduum $15c - 7d - 20c + 9d$ (§. 28). Sed $15c - 20c = - 5c$ & $- 7d + 9d = 2d$ (§. 26). Ergo $15c - 7d - 20c + 9d = - 5c + 2d$. *Quod erat alterum.*

Si $- 9e + 7f$ ſubtrahi debent ex $8e - f$; erit reſiduum $8e - f + 9e - 7f$ (§. 28). Sed $- f - 7f = - 8f$ & $8e + 9e = 17e$ (§. 26). Ergo $8e - f + 9e - 7f = 17e - 8f$. *Quod erat tertium.*

Quartum patet per theor. 2. (§. 28).

SCHOLION.

30. *Mirum videri poterat, quod cum quantitates privativæ poſitivis heterogeneæ ſint* (§. 22), *heterogeneæ autem nec addi* (§. 55 Arithm.), *nec a ſe invicem ſubtrahi poſſint* (§. 57 Arithm.), *privativæ tamen poſitivis addantur & ab iis ſubtrahantur. Enimvero rem curatius perpendens animadvertet proprie loquendo privativam nunquam addi poſitivæ nec ab eadem ſubtrahi: ſed in additione tantum ſubtrahi, quod plus juſto fuerat additum; in ſubtractione addi, quod plus juſto fuerat ſubductum.*

THEOREMA 3.

31. *Si quantitas poſitiva per poſitivam multiplicetur aut dividatur, in utroque caſu quantitas prodit poſitiva.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim in multiplicatione ut unitas ad factorem unum, ita alter ad productum (§. 59 *Arithm.*). Sed uterque factor eſt poſitivus, *per hypoth.* Ergo & factum poſitivum eſſe debet (§. 23). *Quod erat unum.*

Si $+ a$ ducitur in $+ b$, factum eſt $+ ab$, *per demonſtr.* Ergo ſi $+ ab$ dividitur per $+ a$, quotus erit $+ b$; ſi per $+ b$; quotus $+ a$ (§. 194 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 4.

32. *Si quantitas negativa per poſitivam multiplicetur aut dividatur, in utroque caſu quantitas prodit negativa.*

DEMONSTRATIO.

Multiplicare idem eſt ac quantitatem aliquam aliquoties ſibimet ipſi addere (§. 60 *Arithm.*). Eſt vero ſumma quantitatum negativarum negativa (§. 26). Ergo factum ex negativa in poſitivam negativum eſt. *Quod erat unum.*

Factum ex $- a$ in $+ b$ eſt $- ab$ *per demonſtr.* Ergo ſi $- ab$ dividitur per $+ b$, quotus eſt $- a$ (§. 194 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 5.

33. *Si quantitas negativa per negativam multiplicetur aut dividatur, quantitas poſitiva prodit.*

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Quoniam inter quantitates poſitivas & privativas ratio eſſe nequit (§. 23); privativa per privativam multiplicari neque proprie loquendo multiplicari nequit (§. 59 *Arithm.*): quod & ipſa notio quantitatis privativæ inſinuat (§. 18). Quare hæc multiplicatio proprie tantum locum habet, ubi privativæ poſitivis junguntur, ita ut addi rurſus debeat, quod plus juſto fuerat ſubtractum: id quod evidentiſſime ita demonſtramus.

Sit ACDB parallelogrammum rectangulum & in eo AC $= a$, CD $= b$. Ducatur EF ipſi CD parallela (§. 243 *Geom.*); erit ob rectos ad E & F (§. 222 *Geom.*) & EF $=$ AB, itemque AE $=$ BF (§. 223 *Geom.*), ABFE rectangulum (§ 96 *Geom.*). Eodem modo oſtenditur, ducta HG ipſi BD parallela; fore GHBD & BHIF conſequenter AEIH & GIFD rectangula. Sit ergo AE $=$ BF $= c$, GD $=$ IF $= d$: erit EC $=$ FD $= a - c$, CG $=$ AH $= b - d$, atque hinc ACDB $= ab$, BFIH $= cd$, AEIH $= bc - dc$ & GDFI $= ad - cd$ (§. 357 *Geom. & per* n. 2). Quodſi areas rectangulorum AI, HF & ID ſubtrahas ab area rectanguli AD; relinquitur area rectanguli ECGI, hoc eſt, factum ex $a - c$ in $b - d$ (§. 357 *Geom.*). Reperitur adeo $(a - c)(b - d) = ab - cd - bc + dc - ad + cd$ (§. 29), hoc eſt, quia $cd - cd = 0$ (§. 20), $ab - bc - ad + cd$. Unde apparet, factum ex $-c$ in $-d$ eſſe $+cd$, ideo nempe, quia ſubductis rectangulis bc & ad ex ab, hoc eſt, AEBF & HGDB ex ACDB, rectangulum HIBF ſeu cd bis ſubductum eſt, cum tamen nonniſi ſemel auferri debeat, ſi area ECIG deſideretur. *Quod erat unum.*

In diviſione quærimus, quoties quantitas una in altera contineatur (§. 61 *Arithm.*). Diviſurus ergo quantitatem privativam per privativam quærit, quoties defectus unus in altero contineatur (§. 18). Quare cum defectus per quantitates veras metiamur (§. 19); idem quotus emergere debet, ſi quantitatem privativam per privativam, quam ſi poſitivam per poſitivam dividis, utraque nempe poſitiva utrique privativæ reſpondente. Sed in caſu poſteriori quotus eſt poſitivus (§. 31). Ergo & in priori. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 6.

34. *Si quantitas poſitiva per negativam multiplicatur aut dividitur, quantitas privativa prodit.*

DEMONSTRATIO.

Cum in multiplicatione quantitas multiplicanda toties ſibimetipſi addatur, quoties multiplicans uni-

tatem continet (§. 59 *Arithm.*); quantitas vero privativa ſit defectus alicujus quantitatis (§. 18): proprie loquendo poſitiva per privativam multiplicari nequit. Hinc denuo multiplicatio tantum locum habet, ubi privativæ poſitivis junguntur ita ut ſubtrahatur, quod plus juſto fuit additum: id quod ita demonſtramus.

Tab. I. Fig. 2. Sint LMON & PMOQ rectangula & in iis $NO = a$, $MO = b$, $QO = c$, erit $NQ = a - c$, area $PQOM = bc$, $LNOM = ab$, (§. 357 *Geom.*), conſequenter $LNQP = b(a - c) = ab - bc$. Ergo b ductum in $-c$ efficit $-bc$. *Quod erat unum.*

Factum ex $-c$ in $-d$ eſt $+cd$ (§ 33). Ergo ſi $+cd$ dividis per $-c$, quotus eſſe debet $-d$ (§. 194 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 7.

35. *In multiplicatione ac diviſione eadem ſigna efficiunt +, diverſa —.*

DEMONSTRATIO.

Si quantitates ſe mutuo multiplicantes aut dividentes fuerint poſitivæ vel privativæ; quantitas prodit in utroque caſu poſitiva (§. 31. 33); ſi vero altera privativa, altera poſitiva, quantitas prodit privativa (§. 32. 34). Ergo eadem ſigna efficiunt +, diverſa —. *Q. e. d.*

PROBLEMA 3.

36. *Quantitates tam eodem, quam diverſis ſignis affectas in ſe invicem ducere.*

RESOLUTIO.

Omnia hic fiunt ut in Arithmetica communi (§. 101 *Arithm.*), niſi quod notetur regula: *eadem ſigna faciunt* +; *diverſa* —.

$$\begin{array}{l}
a + c \\
b + d \\
\hline
+ ad + cd \\
ab + bc \\
\hline
ab + ad + bc + cd
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
a + b - d \\
a - b - d \\
\hline
- ad - bd + dd \\
- ab - bb + bd \\
aa + ab - ad \\
\hline
aa - bb - 2ad + dd
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
10 = 8 + 4 - 2 \\
2 = 8 - 4 - 2 \\
\hline
-16 - 8 + 4 \\
-32 - 16 + 8 \\
64 + 32 - 16 \\
\hline
20 = 68 - 48
\end{array}$$

PROBLEMA 4.

37. *Quantitates compoſitas dividere.*

RESOLUTIO.

Si quantitas una per alteram actu dividi poteſt, orta nempe ex diviſore in aliam (§. 194 *Arithm.*); diviſio inſtituitur ut in numeris (§. 107 *Arithm.*), notata tamen regula;

gula: *eadem ſigna faciunt* †, *diverſa* — (§. 35).

In aliis caſibus tantum obſervanda, quæ ſupra præcepimus (§. 7).

E. gr. dividere jubemur $aa - bb - 2ad + dd$ per $a-b-d$.

$$\begin{array}{r|l} & aa-bb-2ad+dd\,(a+b-d \\ a-b-d) & aa-ab-ad \\ \hline & +ab-bb-ad+dd \\ & +ab-bb-bd \\ \hline & +bd-ad+dd \\ & -ad+bd+dd \\ \hline & 0 \end{array}$$

PROBLEMA 5.

38. *Fractionem fractioni addere, aut unam ex altera ſubtrahere.*

RESOLUTIO.

Omnia hic fiunt ut in Arithmetica communi (§. 218. 219. *Arithm.*).

E. gr. Sint fractiones addendæ $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$. Reductæ ad eandem denominationem erunt $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, (§. 217 *Arithm.*). Ergo ſumma $\frac{ad+bc}{bd}$ (§. 26.).

Similiter ſit fractio $\frac{a}{b}$ ſubtrahenda ex $\frac{c}{d}$. Reductæ erunt $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, ut ante. Ergo differentia $\frac{bc-ad}{bd}$ (§. 29).

PROBLEMA 6.

39. *Fractionem per fractionem multiplicare aut dividere.*

RESOLUTIO.

Denuo hic omnia fiunt ut in Arithmetica communi (§. 220. 223).

E. gr. Sint fractiones ſe mutuo multiplicaturæ $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$: erit factum $\frac{ac}{bd}$.

Sint fractiones ſe mutuo diviſuræ $\frac{ac}{bd}$ & $\frac{a}{b}$; erit quotus $\frac{ac}{bd} \cdot \frac{b}{a} = \frac{abc}{abd} = \frac{c}{d}$ (§. 213 *Arithm.*).

COROLLARIUM 1.

40. Cum $a = \frac{a}{1}$ (§. 53 *Arithm.*); erit factum ex a in $\frac{c}{d}$, hoc eſt, ex integra quantitate in fractam, $\frac{c}{d} \cdot \frac{a}{1} \quad \frac{ac}{d}$. Unde patet, numeratorem fractæ multiplicandum eſſe per integram.

COROLLARIUM 2.

41. Ergo quotus ex $\frac{c}{d}$ per a, hoc eſt, ex quantitate fracta per integram diviſa, $\frac{c}{d} \cdot \frac{1}{a} = \frac{c}{ad}$.

PROBLEMA 7.

42. *Quantitatem quamcunque per diviſorem compoſitum dividere, utut diviſionem exactam non admittat.*

RESOLUTIO.

Diviſio inſtituatur ut in Arithmetica communi (§. 107 *Arithm.*), tamdiu continuanda, donec quotus legem manifeſtet, juxta quam termini ejus in infinitum progrediuntur, obſervata ſubtractionis, itemque multiplicationis ac diviſionis lege de ſignorum mutatione (§. 28. 35).

E. gr. Sit quantitas dividenda b, dividens $a + c$, erit:

$$a + c \;\Big)\; b \;\Big(\frac{b}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{bc^2}{a^3} - \frac{bc^3}{a^4} \text{ \&c. in inf.}$$

$$b + \frac{bc}{a}$$

$$-\frac{bc}{a}$$

$$-\frac{bc}{a} - \frac{bc^2}{a^2}$$

$$+\frac{bc^2}{a^2}$$

$$+\frac{bc^2}{a^2} + \frac{bc^3}{a^3}$$

$$-\frac{bc^3}{a^3} \text{ \&c. in infinitum.}$$

Nimirum ſi b per a dividitur, quotus eſt $\frac{b}{a}$ (§. 7). Factum ex $\frac{b}{a}$ in $a + c$ eſt $\frac{ab}{a} + \frac{bc}{a}$ (§. 40), hoc eſt, $\frac{b}{a} + \frac{bc}{a}$ (§. 213 *Arithm.*): quod ex dividenda b ſubductum relinquit $-\frac{bc}{a}$ (§. 28). Si porro $-\frac{bc}{a}$ per a dividitur, erit quotus $-\frac{bc}{a^2}$ (§. 41). Factum ergo ex $a + c$ in $-\frac{bc}{a^2}$, hoc eſt, $-\frac{abc}{a^2} - \frac{bc^2}{a^2}$ (§. 40. 35), ſeu $-\frac{bc}{a} - \frac{bc^2}{a^2}$ (§. 213 *Arithm.*), ex dividenda $-\frac{bc}{a}$ ſubtractum relinquit $+\frac{bc^2}{a^2}$ (§. 28). Unde patet, quomodo diviſio continuanda. Inventis autem vel quinque terminis, tum quotus, tum ipſa diviſionis ratio inſinuat, quotum conſtare ex infinita terminorum ſerie, quorum numeratores ſunt potentiæ ipſius c, quarum exponentes a numero ordinis unitate differunt, per b multiplicatæ; denominatores vero potentiæ ipſius a, quarum exponentes æquantur numero ordinis terminorum. E. gr. in termino tertio potentia ipſius c in numeratore ſecunda eſt; potentia vero ipſius a in denominatore tertia.

COROLLARIUM 1.

43. Si $b = 1$ & $a = 1$, ſubſtituto valore

valore hoc in quoto, prodit $1 - c + c^2 - c^3$ &c. in infin. Quare $\frac{1}{1+c} = 1 - c + c^2 - c^3$ &c. in infin.

COROLLARIUM 2.

44. Quod ſi termini in quoto continuo decreſcant, ſeries dat quotum vero quantumlibet propinquum. E.gr. ſi $b = 1$, $c = 1$ & $a = 2$; valoribus his ſubſtitutis in ſerie generali, aut diviſione ut in exemplo univerſali inſtituta, reperietur $\frac{1}{3} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$ &c. Ponamus jam ſeriem terminari in termino quarto; in defectu quidem peccabitur, ſed qui minor quam $\frac{1}{32}$. Si eadem terminetur in ſexto; denuo peccabitur in defectu, ſed qui minor $\frac{1}{128}$. Series igitur quo longius continuatur, eo propius ad verum quotum accedit.

SCHOLION.

45. *Similiter invenietur* $\frac{1}{4} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$ &c. in infin. $\frac{1}{5} = \frac{1}{4+1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \frac{1}{256}$ &c. in infin. $\frac{1}{6} = \frac{1}{5+1} = \frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \frac{1}{125} - \frac{1}{625}$ &c. in infin. *En legem conſtantem, juxta quam omnes fractiones, quarum numerator unitas, per ſeries infinitorum terminorum exprimere licet. Sunt nempe illæ ſeries progreſſiones Geometricæ decreſcentes, ita quidem ut numerator ſemper ſit unitas, denominator termini primi idemque exponentis rationis unitate differat a denominatore fractionis reſolvendæ.*

COROLLARIUM 3.

46. Si termini in quoto continuo creſcunt, ſeries a quoto tanto magis diſcedit, quo longius continuatur, nec quoto æqualis ſit, niſi terminetur ultimumque reſiduum ſub ſigno ſuo adjiciatur. E gr. Sit $\frac{1}{3} = \frac{1}{1+2}$; reperietur quotus $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 64 + 128$ &c. Terminus unus 1 ſuperat $\frac{1}{3}$ exceſſu $\frac{2}{3}$: termini duo deficiunt $\frac{4}{3}$. Termini tres excedunt $\frac{8}{3}$; quatuor deficiunt $\frac{15}{3}$. Et ita porro. Ponamus ſeriem terminari in -8; erit $\frac{1}{1+2} = 1 - 2 + 4 - 8 + \frac{16}{3}$. Sed $1 - 2 + 4 - 8 = -5 = -\frac{15}{3}$. Ergo $\frac{1}{1+2} = \frac{16}{3} - \frac{15}{3} = \frac{1}{3}$.

Ponamus ſeriem univerſalem (§. 43) terminari in $-c^3$: erit $\frac{1}{1+c} = 1 - c + c^2 - c^3 + \frac{c^4}{1+c} = \frac{1 + c - c^2 + c^2 + c^3 - c^3 - c^4 + c^4}{1+c}$ (§. 217 *Arithm.*) $= \frac{1}{1+c}$ (§. 20).

SCHOLION.

47. *Tyrones hoc problema cum ſuis corollariis ſub initium prætermittere poſſunt, donec inferius ad illud provocetur.*

PRO-

PROBLEMA 8.

48. *Potentiam quamcunque per aliam ejusdem radicis multiplicare vel dividere.*

RESOLUTIO.

I. In multiplicatione addantur exponentes, ſumma eſt exponens facti.

$$\begin{array}{cccc} x^3 & y^m & y^m & a^m\,x^n \\ x^4 & y^m & y^n & a^r\,x^s \\ \hline x^7 & y^{2m} & y^{m+n} & a^{m+r}\,x^{n+s} \end{array}$$

II. In diviſione exponens dignitatis dividentis ſubtrahatur ab exponente dividendæ; reſiduum eſt exponens quoti.

$$\frac{x^7}{x^4}\left(x^3 \quad \frac{y^{m+n}}{y^n}\left(y^m \quad \frac{a^m\,x^n}{a^r\,x^s}\left(a^{m-r}x^{n-s}\right.\right.\right.$$

DEMONSTRATIO.

Cum exponentes dignitatum in progreſſione Arithmetica (§. 230. 301 *Arithm.*), dignitates in Geometrica (§. 229. 300 *Arithm.*) progrediantur; illi pro harum Logarithmis recte habentur (§. 302 *Arithm.*). Ergo ſumma exponentium, quos habent dignitates ſe mutuo multiplicantes, eſt exponens facti (§. 303 *Arithm.*); differentia exponentium, quos habent dignitates ſe mutuo dividentes, eſt exponens quoti (§. 309 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

Progreſſiones iſtæ hæ ſunt:

1^0. x^1. x^2. x^3. x^4. x^5. x^6. x^7 &c.
0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7 &c.

PROBLEMA 9.

49. *Potentiam quamcunque datam ad aliam dati exponentis evehere, aut ex eadem dati ſimiliter exponentis radicem extrahere.*

RESOLUTIO.

I. Quoniam potentia data intuitu ejus, ad quam evehenda, radix eſt (§. 225 *Arithm.*) & exponentes logarithmi dignitatum exiſtunt *per demonſtr. in probl. præc.* (§. 48): exponens potentiæ novæ habebitur, potentiæ datæ exponente in exponentem ejus, ad quam evehi debet, ducto (§. 307 *Arithm.*).

E. gr. Potentia x^m evecta ad dignitatem n eſt x^{mn}. Potentia y^3 evecta ad dignitatem 2 eſt y^6.

II. Non abſimili modo liquet, exponentem radicis haberi, ſi exponens dignitatis datæ dividatur per exponentem radicis datum (§. 307 *Arithm.*).

E. gr. Radix quadrata ex x^6 eſt x^3: radix n ex x^{mn} eſt x^m: radix n ex x^m eſt $x^{m:n}$

COROL-

COROLLARIUM.

50. Eſt itaque $\sqrt{x} = x^{1:2}$, $\sqrt[3]{x} = x^{1:3}$, $\sqrt[n]{x^m} = x^{m:n}$ (§. 265 *Arithm.*), conſequenter quantitates irrationales ad expreſſionem rationalem reduci poſſunt.

SCHOLION.

51. *Quantum in Analyſi commodi afferat hæc reductio ex capite ſubſequenti eluceſcet. Etenim ſi quantitates irrationales ad formam rationalium reducantur; peculiari pro iis calculo opus non eſt, ſed rationalium inſtar tractari poſſunt: quemadmodum primi docuerunt* Leibnitius *atque* Nevvtonus.

CAPUT II.

De

ARITHMETICA IRRATIONALIVM.

PROBLEMA 10.

52. *Quantitates irrationales diverſæ denominationis reducere ad eandem.*

RESOLUTIO.

Sint quantitates reducendæ $\sqrt[m]{x^n}$ & $\sqrt[s]{y^r}$. Quoniam $\sqrt[m]{x^n} = x^{n:m}$ & $\sqrt[s]{y^r} = y^{r:s}$ (§. 50) diverſitas denominationis ab exponentibus diverſis pendet, exponentes vero fractiones ſunt, quæ ad alias ipſis æquales, ſed ejuſdem denominationis reduci poſſunt (§. 217 *Arithm.*). Ergo quantitates ſurdæ reducuntur ad eandem denominationem, exponentibus earundem ad eandem reductis. Erit adeo $x^{n:m} = x^{ns:ms}$ & $y^{r:s} = y^{mr:ms}$ ſeu $x^{n:m} = \sqrt[ms]{x^{ns}}$ & $y^{r:s} = \sqrt[ms]{y^{mr}}$ (§. 50).

E. gr. Sint quantitates reducendæ $\sqrt{2}$ & $\sqrt[3]{5}$. Quoniam $\sqrt{2} = 2^{1:2}$ & $\sqrt[3]{5} = 5^{1:3}$ (§. 50); erunt reductæ $2^{3:6}$ & $5^{2:6}$ (§. 217 *Arithm.*), hoc eſt, $\sqrt[6]{2^3}$ & $\sqrt[6]{5^2}$ (§. 50), ſeu 2 actu ad potentiam tertiam & 5 ad ſecundam evehendo $\sqrt[6]{8}$ & $\sqrt[6]{25}$.

PROBLEMA 11.

53. *Quantitates irrationales ad ſimpliciorem expreſſionem reducere.*

RESOLUTIO.

Sit quantitas reducenda $\sqrt[m]{a^n x^m}$. Quoniam ea æqualis eſt ipſi

ipſi $a^{n:m} x^{m:m}$ (§. 50) & $x^{m:m} = x$ (§. 203 *Arithm.*); erit $\sqrt[m]{a^n x^m} = a^{n:m} x = x\sqrt[m]{a^n}$. Locum ergo habet reductio, ſi quantitas ſub ſigno radicali per iſtiusmodi potentiam, quæ eundem cum radicali ſigno exponentem habet, diviſibilis. Diviſio nempe actu inſtituenda, quoto ſub ſigno radicali relicto & diviſoris radice eidem præfixa.

E. gr. Sit reducenda $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8.2}$. Quoniam 8 eſt cubus perfectus, cujus radix 2: habebimus $\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$. Eodem modo reperitur $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8.3} = 2\sqrt[3]{3}$; $\sqrt{18} = \sqrt{9.2} = 3\sqrt{2}$; $\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16.3} = 2\sqrt[4]{3}$.

COROLLARIUM 1.

54. Si quantitates irrationales ejusdem gradus ad ſimpliciorem expreſſionem reductæ ſub ſignis radicalibus eandem quantitatem relinquant; erunt inter ſe ut quantitates rationales ſignis præfixæ (§. 172 *Arithm.*), conſequenter quantitates irrationales inter ſe commenſurabiles eſſe poſſunt (§. 149 *Arithm.*) E. gr. $\sqrt{8} = \sqrt{4.2} = 2\sqrt{2}$ & $\sqrt{18} = \sqrt{9.2} = 3\sqrt{2}$. Ergo $2\sqrt{2} : 3\sqrt{2} = 2:3$, hoc eſt, $\sqrt{8} : \sqrt{18} = 2:3$.

SCHOLION 1.

55. *Iſtud quantitatum irrationalium* ... *nus* communicantium *nomine venire ſole*...

COROLLARIUM 2.

56. Per præſens adeo problema in-venitur ratio irrationalium, ſi qua d... tur.

COROLLARIUM 3.

57. Quia $\sqrt[m]{a^n x^m} = x\sqrt[m]{a^n}$ (§ 53); quantitas ex parte rationalis, ex parte irrationalis ad pure irrationalem reducitur, ſi quantitas rationalis ad eam dignitatem evehitur, cujus gradum indicat exponens ſigno radicali præfixus & dignitas per quantitatem ſub ſigno radicali multiplicatur. E. gr. $5\sqrt{2} = \sqrt{2.25} = \sqrt{50}$ & $5\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3.5^3} = \sqrt[3]{3.125} = \sqrt[3]{375}$.

SCHOLION 2.

58. *Quodſi quæſiveris, quomodo in reſolutione innoteſcat, utrum quantitas ſub ſigno radicali poſita per potentiam aliquam requiſitam ſit diviſibilis, nec ne, & quænam ſit iſta potentia; in diviſores reſolvenda eſt, inter quos locum obtineant neceſſe eſt omnes potentiæ a prima usque ad requiſitam, ſi cum numerit nobis res fuerit. E. gr. Quæritur an* $\sqrt[4]{368}$ *ſit diviſibilis per aliquam potentiam quarti gradus. Reſoluturus numerum* 368 *in ſuos diviſores, reperiet*

2	184
4	92
8	46

8	46
16	23,

ntando nempe diviſionem per numeros mi-ores & quotos majores a latere ponendo. In-enies hic 2 potentiam primi gradus, 4 po-entiam ſecundi, 8 potentiam tertii & 16 po-entiam quarti. Ergo 16 eſt diviſor quaſi-us, conſequenter $\sqrt[4]{368} = 2\sqrt[4]{23}$. *Cæterum le iſta reſolutione in diviſores adhuc notan-lum, quod ſi ultra denarium aſcenderis, divi-ores ſuperiores facta eſſe debeant ex binis an-ecedentium.*

PROBLEMA 12.

59. *Quantitates irrationales ad-dere aut unam ex altera ſubtra-here.*

RESOLUTIO.

Si reductæ (§. 53) fuerint com-menſurabiles; quantitates ratio-nales extra vinculum adduntur & ſe invicem ſubtrahuntur, ibique ſumma, hic differentia denuo præ-figitur ſigno radicali. Reliqua omnia ſunt ut in additione & ſub-tractione rationalium.

Ita reperietur $\sqrt{8} + \sqrt{18} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$ (§. 53) $= 5\sqrt{2} = \sqrt{50}$ (§. 57) & $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3.8} + \sqrt[3]{3.27} = 2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} = 5\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{375}$.

Similiter $\sqrt{18} - \sqrt{8} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$ & $\sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{81} = 5\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{24}$.

Contra $\sqrt{7}$ & $\sqrt{5}$ cum ſint incom-menſurabiles (§. 54); ſumma erit $\sqrt{7} + \sqrt{5}$ (§. 26) & differentia $\sqrt{7} - \sqrt{5}$ (§. 29).

Hinc & intelliguntur exempla in compoſitis tum in additione:

$$\begin{array}{l} 4\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 7\sqrt{7} + 8\sqrt{5} \\ \sqrt{3} + 9\sqrt{2} + 3\sqrt{7} - 4\sqrt{5} \\ \hline 5\sqrt{3} + 4\sqrt{2} + 10\sqrt{7} + 4\sqrt{5} \text{ ſum:} \end{array}$$

hoc eſt $\sqrt{3.25} + \sqrt{2.16} + \sqrt{7.100} + \sqrt{5.16}$
ſeu $\sqrt{75} + \sqrt{32} + \sqrt{700} + \sqrt{80}$

tum in ſubtractione

$$\begin{array}{l} 5\sqrt{2} - 7\sqrt{3} + 8\sqrt{10} \\ 3\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 9\sqrt{10} \\ \hline 2\sqrt{2} - 12\sqrt{3} + 17\sqrt{10} \text{ different.} \end{array}$$

hoc eſt $\sqrt{2.4} - \sqrt{3.144} + \sqrt{10.289}$
ſeu $\sqrt{8} - \sqrt{432} + \sqrt{2890}$

DEMONSTRATIO.

Omnia manifeſta ſunt ex de-monſtratione probl. 1 & 2 (§. 26. 29).

PROBLEMA 13.

60. *Quantitates irrationales per irrationales multiplicare ac divi-dere.*

RESOLUTIO.

Multiplicentur aut dividantur quantitates ſub ſigno radicali; ibi facto, hic quoto præfigatur ſignum idem radicale cum ſuo exponen-te. Quodſi radicales quantitates fuerint diverſæ denominationis

ante omnia reducantur ad eandem (§. 52).

E. gr. in multiplicatione $\sqrt{3}.\sqrt{5} = \sqrt{15}$ & $\sqrt{12}.\sqrt{3} = \sqrt{36} = 6$. Item in compoſitis

$$\begin{array}{ll} \sqrt{3}+\sqrt{2} & \sqrt{2}+\sqrt{3} \\ \sqrt{3}-\sqrt{2} & \sqrt{2}+\sqrt{3} \\ \hline -\sqrt{6}-2 & +\sqrt{6}+3 \\ 3+\sqrt{6} & 2+\sqrt{6} \\ \hline 3-2=1 & 2\sqrt{6}+5 \end{array}$$

Similiter in diviſione $\sqrt{8} : \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$ & $\sqrt{12} : \sqrt{6} = \sqrt{2}$. Item in compoſitis.

$$\sqrt{15}-\sqrt{6}+\sqrt{12}\ (\sqrt{5}-\sqrt{2}+2\sqrt{3})$$

$$\begin{array}{l} \sqrt{15} \\ \hline -\sqrt{6}+\sqrt{12} \\ -\sqrt{6} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \\ \hline 0 \end{array}$$

SCHOLION 1.

61. *Interdum etiam diviſio locum habet, ſi diviſor compoſitus eſt. Sed cum rariſſimus ſit ejus uſus & ea diviſione ignorata maxime præclaros in Analyſi progreſſus facere detur, nec difficultate res careat; eam hic exponere ſuperfluum judicamus. Docet ipſam* Ozanamus *in Novis Elementis Algebræ* (a).

SCHOLION 2.

62. *Cæterum ex tradito hactenus calculo liquet, ſi quantitatem duplici ſigno radicali affici contingat e. gr. ſi fuerit* $\sqrt{(3+\sqrt{2})}\ \sqrt{\sqrt{2}}$ *: operationes omnes eodem modo peraguntur, modo notetur, quantitatem ſub primo vinculo eodem modo tractari debere, quo rationalem in antecedentibus tractavimus.* E. gr. $\sqrt{(8\sqrt{3})} = 2\sqrt{(2\sqrt{3})}$ (§. 53) & $\sqrt{(9\sqrt{12})} = \sqrt{(18\sqrt{3})} = 3\sqrt{(2\sqrt{3})}$ (§. *cit.*) *Quare* $\sqrt{(8\sqrt{3})}+\sqrt{(9\sqrt{12})} = 5(\sqrt{2\sqrt{3}})$.

CAPUT III.
De
USU CALCULI LITTERALIS IN INVENIENDIS THEOREMATIBUS.

PROBLEMA 14.

63. *Invenire, qualis numerus prodeat ex parium additione, ſubtractione, ac multiplicatione.*

Quoniam numerus par per 2 dividi poteſt (§. 64 *Arithm.*), dicatur $2a$: ſimiliter alius numerus par ſit $= 2c$. Erit

2 a

(a) Nouveaux Elemens d' Algebre lib. 1. probl. 4. & ſeqq. p. 73 & ſeqq.

$2a$	$2a$	$2a$
$2c$	$2c$	$2c$
ſumma $2a+2c$	Diff. $2a-2c$	Fact. $4ac$

Theorema: Summa, item differentia atque factum duorum numerorum parium eſt numerus par.

PROBLEMA 15.

64. *Invenire, qualis numerus prodeat, ſi parem impari addas, vel parem ab impari ſubtrahas, vel denique parem per imparem multiplices.*

Numerus par ſit $2a$ (§ 64 *Arithm.*) impar $2c+1$ (§. 65 *Arithm.*). Erit

$2c+1$	$2c+1$
$2a$	$2a$
$2a+2c+1$ Summa:	$2c+1-2a$ Diff.

$$\begin{array}{c} 2c+1 \\ 2a \\ \hline 4ac+2a \text{ Factum.} \end{array}$$

Theorema. Si parem impari addas aut unum ex altero ſubtrahas; ibi aggregatum, hic differentia eſt numerus impar. Si vero numerus par & impar ſe mutuo multiplicent, factum eſt numerus par.

PROBLEMA 16.

65. *Invenire, qualis prodeat numerus, ſi impar impari additur, aut unus ex altero ſubtrahitur, aut ſi impar imparem multiplicet.*

Sint numeri impares $2a+1$ & $2b+1$ (§. 65 *Arithm.*): erit

$2a+1$	$2a+1$
$2b+1$	$2b+1$
$2a+2b+2$ Summa	$2a-2b$ Different.

$$\begin{array}{r} 2a+1 \\ 2b+1 \\ \hline +2a+1 \\ 4ab+2b \\ \hline 4ab+2a+2b+1 \text{ Factum.} \end{array}$$

Theorema: Si numerus impar impari additur aut ab eo ſubtrahitur, ibi ſumma, hic differentia eſt numerus par. Si vero impar imparem multiplicet, factum eſt numerus impar.

PROBLEMA 17.

66. *Invenire, qualis numerus prodeat, ſi meros numeros pares, aut numeros impares numero pari, aut denique numeros impares numero impari addas.*

Sint numeri pares $2a$, $2b$, $2c$, $2d$, &c. erit ſumma $2a+2b+2c+2d$ &c. numerus par (§. 64 *Arithm.*).

Theorema Summa numerorum parium quotcunque eſt numerus par.

Sint numeri impares $2a+1$, $2b+1$, $2c+1$, $2d+1$ &c. (§. 65 *Arithm.*) numerus eorundem $2m$ (§. 64 *Arithm.*). Erit ſumma $2a+2b+2c+2d$ &c. $+2m$, numerus par (§. 64 *Arithm.*). Tot ſcilicet ſunt unitates, quot termini.

Theorema. Summa numerorum imparium quotcunque, qui numero pares ſunt, eſt numerus par.

Sint numeri impares ut ante

 $2a+1$,

$2a+1$, $2b+1$, $2c+1$, $2d+1$ &c. numerus eorundem $2m+1$. Erit ſumma $2a+2b+2c+2d$ &c. $+2m+1$, numerus impar (§. 65 *Arithm.*).

Theorema. Summa numerorum imparium quotcunque, ſi numero impares fuerint, eſt numerus impar.

SCHOLION.

67. *Notetur in his problematibus denominandi artificium.*

PROBLEMA 18.

68. *Determinare differentiam quadratorum, quorum radices unitate differunt.*

Sit radix una $= n$, erit altera $n+1$: quadratum majoris n^2+2n+1 (§. 225 minoris n^2 *Arithm.*).

Differentia $2n+1$

Theorema. Differentia duorum quadratorum, quorum radices unitate differunt, eſt numerus impar duplo radicis minoris unitate aucto æqualis.

COROLLARIUM 1.

69. Facillime ergo conſtruuntur Tabulæ numerorum quadratorum pro radicibus in ſerie naturali progredientibus. Duplum nempe radicis antecedentis unitate auctum continuo addendum præcedenti quadrato.

COROLLARIUM 2.

70. Si $n=1$, erit $2n+1=3$; ſi $n=2$, erit $2n+1=5$; ſi $n=3$, erit $2n+1=7$; ſi $n=4$ erit $2n+1=9$ &c. Differentiæ itaque numerorum quadratorum ſunt numeri impares in continua ſerie progredientes: unde ex continua numerorum imparium additione naſcuntur numeri quadrati.

Radic.	Num. impar.	Num. Quadr.
1	1	1
2	3	4
3	5	9
4	7	16
5	9	25
6	11	36
7	13	49
8	15	64
9	17	81
10	19	100

PROBLEMA 19.

71. *Determinare differentiam duorum cuborum, quorum radices unitate differunt.*

Sint radices n & $n+1$: erit Cubus major n^3+3n^2+3n+1 (§ 227 minor n^3 *Arithm.*)

Differentia $3n^2+3n+1$, hoc eſt, $n^2+2n+1+2n^2+n$. Sed $n^2+2n+1=(n+1)^2$. Ergo differentia inventa $(n+1)^2+2n^2+n$.

Theo-

Theorema. Differentia duorum numerorum cubicorum, quorum radices unitate differunt, eſt aggregatum ex quadrato radicis majoris, duplo quadrato minoris & radice minore.

COROLLARIUM.

72. Conſtructo itaque numerorum quadratorum canone (§. 69); per ſolam additionem inde porro conſtruitur canon numerorum cubicorum.

PROBLEMA 20.

73. *Determinare quantitatem rectanguli ex ſumma duarum quantitatum in majorem vel in minorem, itemque in differentiam eorundem.*

Sit quantitas major Q, minor q: erit ſumma $Q+q$, differentia $Q-q$. Hinc (§. 357 *Geom.*).

$$\begin{array}{c} Q+q \\ Q \\ \hline Q^2+Qq \end{array} \qquad \begin{array}{c} Q+q \\ q \\ \hline Qq+q^2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} Q+q \\ Q-q \\ \hline -Qq-q^2 \\ Q^2+Qq \\ \hline Q^2-q^2 \end{array}$$

Theorema. Rectangulum ex ſumma duarum quantitatum (e. gr. linearum) in alterutram æquatur rectangulo partis unius in alteram atque Quadrato partis alterutrius. Rectangulum vero ex ſumma in differentiam æquale eſt differentiæ quadratorum partium.

COROLLARIUM.

74. Quodſi rectangula Q^2+Qq & $Qq+q^2$ addantur; prodit $Q^2+2Qq+q^2$ quadratum ipſius $Q+q$ (§. 240 *Arithm.*). Quare rectangula ex toto in partem alterutram æquantur quadrato totius.

PROBLEMA 21.

74. *Si totum ſit diviſum in duas partes æquales & in duas inæquales, determinare rectangulum partium inæqualium.*

Sint partes æquales a & a, differentia inter partem æqualem & inæqualem b; erit inæqualium major $a+b$, minor $a-b$; conſequenter $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$. Ergo ſi addatur b^2, habebitur a^2.

Theorema. Si totum ſit diviſum in duas partes æquales & inæquales; erit rectangulum partium inæqualium una cum quadrato differentiæ partis æqualis ab inæquali, æquale quadrato partis æqualis.

COROLLARIUM.

75. Quoniam $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ & $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ (§. 241 *Arithm.*); erit ſumma $2a^2+2b^2$, hoc eſt, ſumma quadratorum partium inæqualium æqualis eſt duplo quadrato partis dimidiæ & duplo quadrato differentiæ partis æqualis ab inæquali.

PROBLEMA 22.

76. *Determinare alia rectangula ex*

ex partibus duabus, in quas totum aliquod diviſum.

Sint partes Q & q : erit totum $Q + q$, hujus quadratum $Q^2 + 2Qq + q^2$. Quodſi Q^2 addas; prodibit $2Q^2 + 2Qq + q^2 = 2Q(Q + q) + q^2$.

Theorema. Quadratum totius una cum quadrato partis unius æquale eſt rectangulo ex duplo ejusdem partis in totum atque quadrato partis alterius.

Quodſi $2Q + q$ in ſeipſum ducas; prodibit $4Q^2 + 4Qq + q^2$.

Theorema. Quadratum ex toto & parte una æquatur quadrato partis alterius una cum quadruplo quadrato partis illius & quadruplo rectangulo partium in ſe invicem.

PROBLEMA 23.

77. *Determinare quantitatem rectanguli ex toto in partes tres inæquales diviſo atque parte una.*

Sit totum $a + b + c$; erit $(a + b + c)c = ac + bc + c^2$.

Theorema. Rectangulum ex toto in tres partes inæquales diviſo in partem unam æquatur quadrato ejusdem partis atque rectangulo ex eadem in ſummam duarum reliquarum.

PROBLEMA 24.

78. *Invenire theorema generale pro binomio ad dignitatem quamcunque evehendo.*

Sit $a + b$ radix binomia. Ducatur in ſe ipſam, erit $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ &c. (§. 229 *Arithm.*): ceu videre eſt ex Tabula, quam hic exhibemus.

$1a$	$1b$									
$1a^2$	$2ab$	$1b^2$								
$1a^3$	$3a^2b$	$3ab^2$	$1b^3$							
$1a^4$	$4a^3b$	$6a^2b^2$	$4ab^3$	$1b^4$						
$1a^5$	$5a^4b$	$10a^3b^3$	$10a^2b^2$	$5ab^4$	b^5					
$1a^6$	$6a^5b$	$15a^4b^2$	$20a^3b^3$	$15a^2b^4$	$6ab^5$	$1b^6$				
$1a^7$	$7a^6b$	$21a^5b^2$	$35a^4b^3$	$35a^3b^4$	$21a^2b^5$	$7ab^6$	$1b^7$			
$1a^8$	$8a^7b$	$28a^6b^2$	$56a^5b^3$	$70a^4b^4$	$56a^3b^5$	$28a^2b^6$	$8ab^7$	$1b^8$		
$1a^9$	$9a^8b$	$36a^7b^2$	$84a^6b^3$	$126a^5b^4$	$126a^4b^5$	$84a^3b^6$	$36a^2b^7$	$9ab^8$	$1b^9$	
$1a^{10}$	$10a^9b$	$45a^8b^2$	$120a^7b^3$	$210a^6b^4$	$252a^5b^5$	$210a^4b^6$	$120a^3b^7$	$45a^2b^8$	$10ab^9$	$1b^{10}$

Ex

Ex tabulæ hujus conſideratione manifeſtum eſt; terminos potentiarum componi ex quibusdam factis litteralibus & numeris præfixis, quos *Uncias* cum *Oughtredo* (b) vocant. Patet autem ulterius, facta reperiri, ſi fiant duæ progresſiones Geometricæ, quarum prima a potentia deſiderata partis primæ radicis incipiat & in unitate deſinat, altera vero ab unitate incipiat & in deſiderata potentia partis ſecundæ radicis deſinat, atque termini ejusdem ordinis in utraque ſerie in ſe invicem ducantur. E. gr. quærenda potentia ſexta: ſcribe

$a^6. a^5. a^4. a^3. a^2. a.$ 1. ſeries I.

1. $b. b^2. b^3. b^4. b^5. b^6$ ſeries II.

erunt $a^6 + a^5 b + a^4 b^2 + a^3 b^3 + a^2 b^4 + a b^5 + b^6$ facta, ex quibus componitur potentia ſexta ipſius $a + b$.

Apparet denique, uncias reperiri, ſi exponentes potentiarum ſecundæ ſeriei ſeu ipſius b ſub exponentibus poteſtatum primæ ſeriei ſeu ipſius a ſcribantur & nota prima ex ſerie ſuperiore ſumatur pro numeratore, prima ex inferiore pro denominatore fractionis, quæ vicem ſubit unciæ termini ſecundi poteſtatis; ſimiliter factum ex nota prima in ſecundam ex ſerie ſuperiore ſumatur pro numeratore, factum ex prima in ſecundam ex ſerie inferiori pro denominatore fractionis, quæ unciæ termini tertii potentiæ æqualis &c. E. gr. pro potentia ſexta erit:

6. 5. 4. 3. 2. 1.

1. 2. 3. 4. 5. 6

Hinc $\frac{6}{1} = 6$ uncia termini ſecundi potentiæ ſextæ; $\frac{6.5}{1.2} = \frac{30}{2} = 15$ uncia termini tertii; $\frac{6.5.4}{1.2.3} = \frac{120}{6} = 20$ uncia termini quarti; $\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} = \frac{6.5}{1.2} = \frac{30}{2} = 15$ uncia termini quinti; $\frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5} = \frac{6}{1} = 6$ uncia termini ſexti; $\frac{6.5.}{1.2.}\frac{4.3.2.1}{3.4.5.6} = 1$ uncia termini ultimi.

Habemus adeo methodum datam radicem binomiam ad quamcunque potentiam determinatam evehendi. Quodſi vero regulam pro potentia indeterminata deſideres, non alia re opus eſt, quam ut

(b) Clavis Mathematicæ c. 12 §. 6 p. m. 38.

ut exponens dicatur m : ita habebimus

$$\begin{matrix} a^m. & a^{m-1}. & a^{m-2}. & a^{m-3}. & a^{m-4}. & a^{m-5} \\ 1. & b. & b^2. & b^3. & b^4. & b^5 \end{matrix} \text{ \&c.}$$

adeoque $a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + a^{m-3}b^3 + a^{m-4}b^4 + a^{m-5}b^5$ &c. quæ ſunt facta pro terminis potentiæ indeterminatæ in infinitum continuandæ. Similiter inveniuntur unciæ, ut ante. Cum enim exponentes ſint:

$$\frac{m}{1}.\ \frac{m-1}{2}.\ \frac{m-2}{3}.\ \frac{m-3}{4}.\ \frac{m-4}{5}.\ \frac{m-5}{6} \text{ \&c.}$$

erit $\frac{m}{1}$ uncia termini ſecundi potentiæ; $\frac{m.m-1}{1.2}$ uncia tertii; $\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}$ uncia quarti; $\frac{m.m-1}{1.2}\cdot\frac{m-2\ m-3}{3.4}$ uncia quinti; $\frac{m.m-1}{1.2}\cdot\frac{m-2.m-3.m-4}{3.4.5}$ uncia ſexti; $\frac{m.m-1}{1.2}\cdot\frac{m-2.m-3.m-4.m-5}{3.4.5.6}$ uncia ſeptimi &c.

Quare ſi has uncias in facta ipſis reſpondentia & paulo ante reperta ducas; prodibit formula binomii ad potentiam indeterminatam elevati: $a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}a^{m-3}b^3 + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}a^{m-4}b^4 + \frac{m.m-1}{1.2}\cdot\frac{m-2.m-3.m-4}{3.4.5}a^{m-5}b^5 + \frac{m.m-1}{1.2}\cdot\frac{m-2.m-3.m-4.m-5}{3.4.5.6}a^{m-6}b^6$ &c. in infinitum.

Quoniam vero $a^{m-1} = a^m : a$, $a^{m-2} = a^m : a^2$, $a^{m-3} = a^m : a^3$, $a^{m-4} = a^m : a^4$, $a^{m-5} = a^m : a^5$ &c. in infinit. (§. 48); his valoribus ſubſtitutis (§. 15 *Arithm.*), formula in ſequentem degenerat: $a^m + \frac{m.a^m b}{1\ a} + \frac{m.m-1.a^m b^2}{1.2\ a^2} + \frac{m.m-1.m-2.a^m b^3}{1.2.3\ a^3} + \frac{m.m-1.m-2.m-3.a^m b^4}{1.2.3.4\ a^4} + \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.a^m b^5}{1.2.3.4.5\ a^5} + \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.2.3.4.5.6}\frac{a^m b^6}{a^6}$ &c. in infinit.

Quodſi jam porro cum viro ſummo,

ſummo, *Iſaaco Newtono* (c) po-namus $a = P$ & $b : a = Q$ erit $a^m = P^m$, $b^2 : a^2 = Q^2$, $b^3 : a^3 = Q^3$, $b^4 : a^4 = Q^4$, $b^5 : a^5 = Q^5$ &c. conſequenter his valoribus ſubſtitutis formula: $P^m + \frac{m}{1} P^m Q + \frac{m.m-1}{1.2} P^m Q^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} P^m Q^3 + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4} P^m Q^4$ &c.

Ponatur porro $P^m = A$, erit $\frac{m}{1} P^m . Q = \frac{m}{1} AQ$ ſit $\frac{m}{1} P^m Q = B$; erit $\frac{m.m-1.}{1.2} P^m Q^2 = \frac{m-1}{2} BQ$. Sit $\frac{m-1}{2} BQ = C$, erit $\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} P^m Q^3 = \frac{m-2}{3} CQ$. Sit $\frac{m-2}{3} CQ = D$: erit $\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4} P^m Q^4 = \frac{m-3}{4} DQ$. Sit $\frac{m-3}{4} DQ = E$: erit $\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.}{1.2.3.4.5} P^m Q^5 = \frac{m-4}{5} EQ$. Sit $\frac{m-4}{5} EQ = F$: erit $\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.}{1.2.3.4.5.6}$ $P^m Q^6 = \frac{m-5}{6} FQ$ &c. in infinit.

Habetur ergo tandem $(a+b)^m = (P+PQ)^m = P^m + \frac{m}{1} AQ + \frac{m-1}{2} BQ + \frac{m-2}{3} CQ + \frac{m-3}{4} DQ + \frac{m-4}{5} EQ + \frac{m-5}{6} FQ$ &c. in infinit.

SCHOLION 1.

79. *Equidem hoc theorema nonniſi per inductionem eruimus, quæ inter demonſtrandi methodos locum minime habet; ſed cum hæc inductio fundetur in obſervatione legis conſtantis atque neceſſariæ, in inveniendo tuto adhibetur, etſi conſultum ſit, reperta alio poſtea modo demonſtrare.*

SCHOLION 2.

80. *Ut vero theorema facilius intelligatur, exemplo numerico id illuſtrare lubet. Ponamus ergo inveniri debere dignitatem quartam radicis* 18 *ſeu* 10 + 8 : *erit* $m = 4$, $P = 10$, $Q = 8 : 10 = \frac{4}{5}$, *conſequenter*

$P^m = 10^4 = 10000 = A$

$mAQ = 4.10000.\frac{4}{5} = \frac{160000}{5} = 32000 = B$

(c) in epiſtola A. 1676 ad *Leibnitium* data apud *Walliſium* Operum Vol. III. f. 622.

$\frac{m-1}{2} BQ = \frac{3}{2}.\ 32000\ \frac{4}{5} = \frac{6}{5}.\ 32000$

$= 6.\ 6400 = 38400 = C$

$\frac{m-2}{3} CQ = \frac{2}{3}.\ 38400.\ \frac{4}{5} = \frac{8}{15}.\ 38400$

$= \frac{307200}{15} = 20480 = D$

$\frac{m-3}{4} DQ = \frac{1}{4}.\ 20480.\ \frac{4}{5} = \frac{1}{5}.\ 20480$

$= \frac{20480}{5} = 4096 = E$

$\frac{m-4}{5} EQ = 0.\ 4096.\ \frac{4}{5} = 0.$

10000 = A
32000 = B
38400 = C
20480 = D
4096 = E

104976 Dignitas quarta ipſius 18.

Eadem dignitas invenitur, ſi 18 *in duas quascunque partes alias, e.gr. in* 6 & 12 *ſecetur: quo in caſu erit* P = 6 & Q = 12 : 6 = 2, *conſequenter*

$P^m = 6^4 = 1296 = A$

$mAQ = 4.\ 1296.\ 2 = 8.\ 1296 = 10368 = B$

$\frac{m-1}{2} BQ = \frac{3}{2}.\ 10368.\ 2 = 3.\ 10368 = 31104 = C$

$\frac{m-2}{3} CQ = \frac{2}{3}.\ 31104.\ 2 = \frac{4}{3}.\ 31104$

$= \frac{124416}{3} = 41472 = D$

$\frac{m-3}{4} DQ = \frac{1}{4}.\ 41472.\ 2 = \frac{2}{4}.\ 41472$

$= \frac{41472}{2} = 20736 = E$

$\frac{m-4}{5} EQ = 0.\ 20736 = 0.$

1296 = A
10368 = B
31104 = C
41472 = D
20736 = E

104976 Dignitas quarta ipſius 18.

Patet adeo ſeriem terminari, ſi m explicetur per numerum determinatum.

COROLLARIUM I.

81. Si m explicetur per numerum fractum, ſeries $P^m + \frac{m}{1} AQ + \frac{m-1}{2} BQ$ &c. exprimet radicem indeterminatam ipſius P + PQ (§.50), adeoque idem theorema extractioni radicis inſervit. E. gr. Sit ex $aa - xx$ extrahenda radix quadrata; erit $m = \frac{1}{2}$ (§. *cit.*), $P = a^2$ & $Q = -x^2 : a^2$. Unde

$P^m = a^{2:2} = a = A$

$\frac{m}{1} AQ = \frac{1}{2} a.\ -x^2 : a^2 = -\frac{x^2}{2a} = B$

$m-1$

$\frac{-1}{2}$ BQ $= (\frac{1}{2} - 1) : 2. \frac{-x^2}{2a}. -\frac{x^2}{a^2}$

$= \frac{1-2.x^4}{4.2a^3} = \frac{-x^4}{8a^3} = C.$

$\frac{-2}{3}$ CQ $= (\frac{1}{2} - 2) : 3. \frac{-x^4}{8a^3}. -\frac{x^2}{a^2}$

$= \frac{1-4.x^6}{6.8a^5} = \frac{-3x^6}{6.8a^5} = \frac{-x^6}{16a^5} = D$

$\frac{m-3}{4}$ DQ $= (\frac{1}{2} - 3) : 4. \frac{-x^6}{16a^5}. -\frac{x^2}{a^2}$

$= \frac{1-6.x^8}{8.16a^7} = \frac{-5x^8}{128a^7} = E$

$\frac{m-4}{5}$ EQ $= (\frac{1}{2} - 4) : 5. \frac{-5x^8}{128a^7}. -\frac{x^2}{a^2}$

$\frac{1-8.5x^{10}}{10.128a^9} = \frac{-7x^{10}}{256a^9}$ &c. in infin.

Eſt adeo $V(a^2 - x^2) = a \frac{-x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \frac{7x^{10}}{256a^9}$ &c. in infinit.

SCHOLION 3.

82. *Si cui moleſtus evadit fractionum calculus, is cum* Nevvtono *in formula generali ſubſtituat pro* m *exponentem fractum* n : m *formulam ſequentem obtenturus :* $(P + PQ)^{m:n} = P^{m:n} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-2n}{3n} CQ + \frac{m-3n}{4n} DQ + \frac{m-4n}{5n} EQ$ &c. *Hac vero formula ubi utetur quantitates ad potentiam evecturus, pro* n *aſſumet* 1.

SCHOLION 4.

83. *Ex numerorum determinatorum potentiis radicem extracturus adhibeat formulam* $a^m + \frac{m}{1} a^{m-1}b$ &c. *quam in dato caſu determinet numero pro* m *ſubſtituto.* E. gr. *Sit ex* 104976 *extrahenda radix quartana ; erit* m = 4 : *unde habetur* $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ *& juxta hoc theorema extractio radicis quartanæ eodem modo peragitur, quo quadratam & cubicam* (§. 248. 258 Arithm.) *inquiſivimus, ponendo nimirum* 10 *ſeu potius* 100000 = a^4 & 4976 = $4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$. *En calculi typum :*

```
 10 | 4976 (18
  1 |
 -------------
  0 | 4976
 4a³    = |4 . . .    4a³ = 4       b² = 64
 4a³b   =  3 2 . .     b  = 8       a² = 1
 6a²b²  =  3 84 . .   ---------    ----------
 4ab³   =  2 048 .    4a³b = 32    a²b² = 64
 b⁴     =    4096                          6
 ------------------                ----------
           04976     b³ = 512      6a²b² = 384
         ---------   4a = 4
             0       ----------
                     4ab³ = 2048
```

Si radix plures, quam tres notas habuerit; operatio altera repetenda, ut in extractione radicum quadratarum ac cubicarum (§. cit. Arithm.).

COROLLARIUM 2.

84. Quoniam polynomium pro binomio haberi poteſt, ſumtis pluribus partibus pro una; eadem formula polynomiis ad datam dignitatem evehendis inſervit. E. gr. Si trinomium $c+d+g$ ad dignitatem aliquam, e. gr. quartam evehendum; ponatur in formula $a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b$ &c. $c = a$ & $d+g = b$: erit $(c+d+g)^4 = c^4 + 4c^3(d+g) + 6c^2(d+g)^2 + 4c(d+g)^3 + (d+g)^4$. Nempe $a^m = c^4$, $\frac{m}{1} a^{m-1} b = 4c^3(d+g)$, $\frac{m.m-1}{1.2} a^{m-2} b^2 = 6c^2(d+g)^2$. $\frac{m}{1}.\frac{m-1.m-2}{2.3} a^{m-3} b^3 = 4c(d+g)^3$, $\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4} a^{m-4} b^4 = (d+g)^4$.

Eſt vero vi ejusdem theorematis $(d+g)^2 = d^2 + 2dg + g^2$, $(d+g)^3 = d^3 + 3d^2g + 3dg^2 + g^3$, $(d+g)^4 = d^4 + 4d^3g + 6d^2g^2 + 4dg^3 + g^4$. Ergo $(c+d+g)^4 = c^4 + 4c^3d + 4c^3g + 6c^2d^2 + 12c^2dg + 6c^2g^2 + 4cd^3 + 12cd^2g + 12cdg^2 + 4cg^3 + d^4 + 4d^3g + 6d^2g^2 + 4dg^3 + g^4$.

COROLLARIUM 3.

85. Quare ſi infinitinomium fuerit $a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + fy^5$ &c. in infinit. & in formula pro a ſubſtituatur a, pro b autem $by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + fy^5$ &c. in infinit. prodibit formula generalis pro infinitinomio ad datam potentiam evehendi aut ex eadem radicem extrahendi. Eſt enim

$b^2 = b^2y^2 + 2bcy^3 + c^2y^4 + 2bdy^4 + 2cdy^5 + d^2y^6 + 2eby^5 + 2ecy^6 + 2cdy^7 + e^2y^8 + 2bfy^6$ &c.

$b^3 = b^3y^3 + 3b^2cy^4 + 3bc^2y^5 + c^3y^6 + 3b^2dy^5 + 6bcdy^6 + 3c^2dy^7 + d^3y^9 + 3b^2ey^6$ &c. (§. 84).

$b^4 = b^4y^4\ 4b^3cy^5 + 6b^2c^2y^6$ &c.

Hos ergo valores ſi in formula $a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m.m-1}{1.2} a^{m-2} b^2 + \frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3} a^{m-3} b^3$ &c. ſubſtituas & terminos homogeneos, in quibus nempe eadem potentia ipſius y occurrit, decenter coordines; prodibit formula pro infinitinomio:

$$a^m$$
$$+\frac{m}{1} a^{m-1} by$$
$$\left.\begin{aligned} &+\frac{m.m-1}{1.2} a^{m-2} b^2 \\ &+\frac{m}{1} a^{m-1} c \end{aligned}\right\} y^2$$

$$\left.\begin{array}{l} +\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}a^{m-3}b^3 \\ +\frac{m.m-1}{1.1}a^{m-2}bc \\ +\frac{m}{1}a^{m-1}d \end{array}\right\}y^3$$

$$\left.\begin{array}{l} +\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}a^{m-4}b^4 \\ +\frac{m.m-1.m-2}{1.2.1}a^{m-3}b^2c \\ +\frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}c^2 \\ +\frac{m}{1}.\frac{m-1}{1}a^{m-2}bd \\ +\frac{m}{1}a^{m-1}e \end{array}\right\}y^4$$

$$\left.\begin{array}{l} +\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.3.4.5}a^{m-5}b^5 \\ +\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.1}a^{m-4}b^3 \\ +\frac{m.m-1.m-2}{1.2.1}a^{m-3}bc^2 \\ +\frac{m.m-1}{1.1}a^{m-2}be \\ +\frac{m}{1}a^{m-1}f \end{array}\right\}y^5$$

$$\left.\begin{array}{l} +\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.2.3.4.5.6}a^{m-6}b^6 \\ +\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.3.4.1}a^{m-5}b^4c \\ +\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.1.2}a^{m-4}b^2c^2 \\ +\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.1}a^{m-4}b^3d \\ +\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}a^{m-3}c^3 \\ +\frac{m.m-1.m-2}{1.1.1}a^{m-3}bcd \\ +\frac{m.m-1.m-2}{1.2.1}a^{m-3}b^2e \\ +\frac{m.m-2}{1.1}a^{m-2}d^2 \\ +\frac{m.m-1}{1.1}a^{m-2}ce \\ +\frac{m.m-1}{1.1}bf \\ +\frac{m}{1}a^{m-1}g \end{array}\right\}y^6$$

&c. &c. in infinit.

COROLLARIUM 4.

86. Eodem modo patet, ſi infinitinomium fuerit $ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 + fy^6$ &c. ad dignitatem m evehendum; in ſerie antecedenti tantum omnes terminos multiplicandos eſſe per y^m, ita ut unciæ retineantur eædem iidemque coëfficientes, dignitates vero ipſius y ſint $y^m + y^{m+1} + y^{m+2} + y^{m+3} + y^{m+4} + y^{m+5} + y^{m+6}$ &c.

SCHOLION 5.

87. *Conſtat adeo, idem theorema, quod pro binomio dedimus, etiam infinitinomio ad dignitatem deſideratam evehendo ſufficere. Tyrones illud ſub initium ſtudii analytici prætermittant, donec inferius in analyſi infinitorum eodem opus habuerint. Immo infinitinomium ad poteſtatem determinatam facile evehitur*

tur

tur per formulas ſpeciales ſuperius allatas. *E. gr.* *Sit* $hx + ix^2 + kx^3 + lx^4 + mx^5 + nx^6$ &c. *evehenda ad dignitatem ſecundam: cum* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, *ſi fiat* $a = hx$, $b = ix^2 + kx^3 + lx^4 + mx^5 + nx^6$ &c. *reperietur quadratum ſeriei datæ* $h^2x^2 + 2hix^3 + 2hkx^4 + 2hlx^5 + 2hmx^6 + 2hnx^7$ &c. $(ix^2 + kx^3 + lx^4 + mx^5 + nx^6$ &c.$)^2$, *hoc eſt*, $+ i^2x^4 + 2ikx^5 + 2ilx^6 + 2imx^7 + 2inx^8$ &c. $+ (kx^3 + lx^4 + mx^5 + nx^6$ &c.$)^2$, *hoc eſt*, $+ k^2x^6 + 2klx^7 + 2kmx^8 + 2knx^9 + (lx^4 + mx^5 + nx^6$ &c.$)^2$. *Quodſi ergo terminos legitime coordines, prodibit quadratum infinitinomii* $hx + ix^2 + kx^3 + lx^4 + mx^5 + nx^6$ &c. $=$

$$\begin{array}{llll} h^2x^2 + 2hix^3 & + 2hkx^4 & + 2hlx^5 & \\ & + i^2x^4 & + 2ikx^5 & \\ + 2hmx^6 & + 2hnx^7 & & \\ + 2ilx^6 & + 2imx^7 & \text{\&c. in infinit.} & \\ + k^2x^6 & + 2klx^7 & & \end{array}$$

Quæ eadem ſeries invenitur, ſi in generali (§. 86) *fiat* $m = 2$, $y = x$, $a = h$, $b = i$, $c = k$, $d = l$, $e = m$, $f = n$ &c. *Eſt enim:*

$$a^m y^m = h^2x^2$$

$$\frac{m}{1} a^{m-1} b y^{m+1} = 2hix^3$$

$$\frac{m.\, m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2 y^{m+2} = \frac{2}{2} h^0 i^2 x^4 = i^2x^4.$$

$$\frac{m}{1} a^{m-1} c y^{m+2} = 2hkx^4 \text{ \&c.}$$

SCHOLION 6.

88. *Cæterum notetur artificium, quo caſus infiniti, immo infinities infiniti, ad regulam eandem reducuntur.*

PROBLEMA 25.

89. *Determinare ſummam termini primi & ultimi in progreſſione Arithmetica.*

Sit terminus primus a, differentia terminorum ſive creſcentium, ſive decreſcentium d, erit (§. 301 *Arithm.*).

$$\begin{array}{ccccc} a, & a \mp d & a \mp 2d, & a \mp 3d, & a \mp 4d. \\ & a \mp 4d & & a \mp 2d & \\ \hline & 2a \mp 5d & = & 2a \mp 5d & = \\ & & a \mp 5d & & \\ & & a & & \\ \hline & & 2a \mp 5d & & \end{array}$$

Item;

$$\begin{array}{ccccc} a. & a \mp d. & a \mp 2d, & a \mp 3d. & a \mp 4d \\ & a \mp 3d & 2 & & a \\ \hline & 2a \mp 4d & 2a \mp 4d & & 2a \mp 4d \end{array}$$

Theorema. In progresſione arithmetica tam creſcente, quam decreſcente, ſumma termini primi & ultimi æqualis eſt ſummæ duorum quorumlibet mediorum ab extremis æquidiſtantium aut medii duplo, ſi numerus terminorum impar.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{E. gr. } 3, & 6, & 9. & 12. & 15. & 18. & 21. \\ & & & 12 & 9 & 6 & 3 \\ \hline & & & 24 & = 24 & = 24 & = 24 \end{array}$$

COROL-

COROLLARIUM 1.

90. Habetur ergo ſumma progreſſionis arithmeticæ, ſi ſumma termini primi & ultimi ducatur in dimidium terminorum numerum.

COROLLARIUM 2.

91. Quodſi adeo ſit terminus primus a, differentia d, numerus terminorum n, erit ultimus $a+(n-1)d$ (§. 301 *Arithm.*), conſequenter ſumma progreſſionis $\frac{1}{2}n(2a+(n-1)d)$ (§. 90) $= an + \frac{1}{2}(n^2-n)d$. Ex datis itaque termino primo a, differentia d & numero terminorum n invenitur ſumma progreſſionis, ſi facto ex termino primo in numerum terminorum addatur factum ex differentia eorundem in ſemidifferentiam numeri terminorum a quadrato ejuſdem. E. gr. Sit $a=3$ $n=7$, $d=3$, erit ſumma $= 21 + \frac{49-7}{2}.3 = 21 + \frac{42}{2}.3 = 21 + 21.3 = 21 + 63 = 84$.

SCHOLION.

92. *Notent tyrones regulas ex ſymbolis eruturi, ab initio gradatim eſſe progrediendum, exprimendo nempe ſigillatim quodlibet ſymbolum per rem denotatam & quamlibet operationem ſignis repræſentatam per nomina convenientia. E. gr. in* a n *eſt* a *terminus primus &* n *numerus terminorum*, ex hypoth. *Sed* a n *eſt factum ex* a *in* n (§. 7). *Ergo pro* a n *ſubſtituitur in regula factum ex termino primo in numerum terminorum. Porro* n^2 *eſt quadratum ipſius* n (§. 233 Arithm.). *Sed* n *eſt numerus terminorum ergo* n^2 *quadratum numeri terminorum. Signum* — *indicat ſubtractionem* (§. 7). *Quare* $n^2 - n$ *differentia numeri terminorum ab ejus quadrato &* $\frac{1}{2}(n^2-n)$ *ſemidifferentia iſta. Porro* d *eſt differentia terminorum* ex hypoth. *adeoque* $\frac{1}{2}(n^2-n)$ d *factum ex illa ſemidifferentia in differentiam terminorum. Denique ſignum* + *indicat facta hactenus explicata eſſe addenda. Hac quidem ſyllabizatione opus habent, qui ſine mora ſymbolicas expreſſiones quantitatum ſibi familiares reddere geſtiunt.*

DEFINITIO 4.

93. *Denominator* rationis eſt quotus ex diviſione termini majoris per minorem emergens.

COROLLARIUM 1.

94. Major ergo prodit, minore per denominatorem multiplicato (§. 196 *Arithm.*): minor vero habetur, majore per denominatorem diviſo (§. 194 *Arithm.*). Unde ſi terminus minor a, denominator m, erit major ma; ſi terminus major a, minor erit $\frac{a}{m}$. Quare $a : ma$ exprimit rationem minoris inæqualitatis; $a : \frac{a}{m}$ vero rationem majoris (§. 124 *Arithm.*). Immo quoniam $\frac{a}{m} = a.\frac{1}{m}$ (§. 40). Si m explicetur per fractionem, cujus numerator unitas, denominator idem cum denominatore rationis, $a : ma$ rationem quamcunque deſignat.

COROLLARIUM 2.

95. Quia in ratione majoris inæqualitatis antecedens major conſequente (§. 124 *Arithm.*); ejus denominator idem eſt cum exponente (§. 127 *Arithm.*).

COROLLARIUM 3.

96. In ratione minoris inæqualitatis exponens rationis $\frac{a}{ma}$ (§. 127 *Arithm. & §. 94 Analyſ.*), hoc eſt, $\frac{1}{m}$ (§. 213 *Arithm.*). Æquatur ergo fractioni, cujus numerator unitas, denominator idem cum denominatore rationis.

SCHOLION.

97. *Exponens & denominator rationis Autoribus voces ſynonymæ ſunt. Aliter vero veteres, aliter recentiores exponentem definiunt. Nos veterum definitionem retinuimus in Arithmetica* (§. 127), *tum quod naturam rationum clare explicet, tum quod ad demonſtrandum utilis. Etenim ſi rationis* 2 : 3 *exponens dicatur* $\frac{2}{3}$; *inde intelligitur, antecedentem terminum eſſe æqualem duabus tertiis conſequentis, adeoque pro menſura, qua utrumque metimur, aſſumi tertiam conſequentis partem. Hinc vero clarius cognoſcitur rationis hujus natura, quam ſi cum recentioribus nonnullis dicas, exponentem eſſe* $1\frac{1}{2}$: *quod innuit, antecedentem in conſequente contineri* $1\frac{1}{2}$. *Recentiores vero exponentem rationis eodem modo definientes, quo denominatorem definimus, ideo eundem exponentem conſtituunt rationum majoris & minoris inæqualitatis* (§. 95), *quod nomen etiam in caſu poſteriori ſuggerat* (§. 138 Arithm.) *& demonſtrationibus Analyticis commodior videatur: quem in finem nos exponentis loco nunc denominatorem aſſumimus.*

PROBLEMA 26.

98. *Determinare factum ex termino primo in ultimum progresſionis geometricæ.*

Sit terminus primus a, denominator m; erit progreſſio (§. 300 *Arithm. & §. 94 Analyſ.*).

$$a.\ ma.\ m^2a.\ m^3a.\ m^4a.\ m^5a.\ m^6a$$

$$\frac{m^5a}{m^6a^2} = \frac{m^3a}{m^6a^2} = \frac{m^2a}{m^6a^2} = \frac{a}{m^6a^2}$$

Theorema. In progresſione geometrica factum extremorum æquatur facto mediorum ab extremis æquidiſtantium, itemque medii quadrato, ſi numerus terminorum impar.

E. gr. 3. 6. 12. 24. 48. 96

$$\frac{24}{288} \cdot\ \frac{12}{288}\ \ \ \frac{6}{288}\ \ \ \frac{3}{288}$$

PROBLEMA 27.

99. *Determinare quotum ex diviſione differentiæ terminorum primi ac ultimi per denominatorem unitate mulctatum emergentem.*

Sit terminus primus a, denominator m, numerus terminorum n; erit terminus ultimus $m^{n-1}a$, differentia primi & ultimi $m^{n-1}a - a$. Hæc ſi dividatur per $m-1$, erit quotus $m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a + m^{n-5}a + m^{n-6}a + m^{n-7}a$ &c.

m^{n-1}

$$
\begin{array}{l|l}
m-1)\ m^{n-1}a-a & (m^{n-2}a+m^{n-3}a+m^{n-4}a+m^{n-5}a+m^{n-6}a+m^{n-7}a\ \&c. \\
\quad m^{n-1}a-m^{n-2}a & \\
\hline
\quad +m^{n-2}a-a & \\
\quad m^{n-2}a-m^{n-3}a & \\
\hline
\quad +m^{n-3}a-a & \\
\quad m^{n-3}a-m^{n-4}a & \\
\hline
\quad +m^{n-4}a-a & \\
\quad m^{n-4}a-m^{n-5}a & \\
\hline
\quad +m^{n-5}a-a & \\
\quad m^{n-5}a-m^{n-6}a & \\
\hline
\quad +m^{n-6}a-a & \\
\quad \&c. &
\end{array}
$$

Quodſi n determinetur, e. gr. per 7, erit $n-7=0$, conſequenter $m^{n-7}a = m^0 a = a$, adeoque diviſio terminatur. Unde patet

Theorema. Si differentia termini primi & ultimi progresſionis geometricæ dividatur per denominatorem unitate mulctatum, quotus eſt ſumma omnium terminorum excepto maximo.

COROLLARIUM 1.

100. Quodſi ergo maximus addatur; ſumma totius progreſſionis habetur.

COROLLARIUM 2.

101. Sit adeo terminus primus a, denominator m, numerus terminorum n, erit terminus ultimus ſeu maximus $m^{n-1}a$, adeoque ſumma $m^{n-1}a + (m^{n-1}a-a):(m-1) = (m^n a - m^{n-1}a + m^{n-1}a - a):(m-1)$ (§. 217 *Arithm.*): $= (m^n a - a):(m-1)$ (§. 20), conſequenter ſi eadem ſumma dicatur $ſ$, $m-1 : m^n - 1 = a : ſ$, (§. 272 *Arithm.*). Eſt adeo terminus primus (ſeu minimus) progreſſionis ad ejus ſummam ut denominator unitate mulctatus ad ejus dignitatem, cujus exponens numero terminorum æqualis, unitate itidem mulctatam. Sit e. gr. $m = 2$, $a = 1$, $n = 8$, erit ſumma $(256-1):1 = 255$.

COROLLARIUM 3.

102. Quoniam ſi terminus primus a, denominator m; terminus ultimus $m^{n-1}a$, ſumma $m^{n-1}a + (m^{n-1}a-a):(m-1)$, vel $(m^n a - a):(m-1)$, (§. 101); erit differentia inter terminum ultimum & ſummam $(m^{n-1}a-a):(m-1)$ & differentia inter primum & ſummam $\frac{m^n a - a}{m-1} - a = \frac{m^n a - a - ma + a}{m-1} = \frac{m^n a - ma}{m-1}$. Eſt ergo differentia prior ad poſteriorem ut $(m^{n-1}a-a):(m-1)$ ad $(m^n a - ma):(m-1)$, hoc eſt, ut $m^{n-1}a-a$ ad $m^n a - ma$ (§. 170 *Arithm.*), hoc eſt, ut 1 ad m (§. 172 *Arithm.*), ſeu ut unitas ad denominatorem.

COROLLARIUM 4.

103. Quare ſi differentia inter terminum primum & ſummam dividatur

per differentiam inter ſummam & terminum ultimum; quotus eſt denominator (§. 62 *Arithm.*).

PROBLEMA 28.

104. *Inveſtigare rationum ſymptomata.*

Non alia re opus eſt, quam ut termini analytice exprimantur (§. 94) & tentatis quotlibet mutationibus exploretur, utrum duarum rationum exponentes ſint æquales nec ne, (§. 139 *Arithm.*). Sint itaque duæ quantitates a & ma; erit

I.
$$\begin{array}{l} a : ma \\ c \quad\;\; c \\ \hline ac : mac = a : ma \end{array}$$

II.
$$\begin{array}{l} a : ma \\ c \quad\;\; c \\ \hline \frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = a : ma \end{array}$$

III.
$$\begin{array}{l} a : ma \\ b : mb \\ \hline a-b : ma-mb = a : ma = b : mb \end{array}$$

IV.
$$\begin{array}{l} a \quad ma \\ b \quad mb \\ \hline a+b : ma+mb = a : ma = b : mb. \end{array}$$

Sit porro

$$\begin{array}{ll} & a : ma = b : mb \\ \text{erit alternatim} & a : b = ma : mb \\ \text{inverſe} & ma : a = mb : b \\ \text{converſim} & a+ma : a = b+mb : b \\ \text{compoſite} & a+ma : ma = b+mb : mb \\ \text{Diviſim} & ma-a : a = mb-b : b \\ & ma-a : ma = mb-b : mb \end{array}$$

Item: $a^n : m^n a^n = b^n : m^n b^n$

$$\begin{array}{l} a : mac = b : mbc \\ a : ma = b : mb \\ \quad\;\; \overline{c} \qquad\quad \overline{c} \\ ac : ma = bc : mb \\ a : ma = b : mb \\ \overline{c} \qquad\quad \overline{c} \\ ac : mac = b : mb \\ a : ma = b : mb \\ \overline{c} \quad \overline{c} \\ ac : mac = bd : mbd \\ a : ma = b : mb \\ \overline{c} \quad\; \overline{c} \quad\; \overline{d} \quad\; \overline{d} \end{array}$$

Ipſæ nimirum expreſſiones, ſi quoti reducentur per regulas fractionum, rationum ſimilitudinem in omnibus loquuntur. E. gr. $ac : mac = 1 : m$ & $b : mb = 1 : m$. En utrobique exponentem eundem $1 : m$!

SCHOLION.

105. *Patet adeo, per calculum literalem facillime ſymptomata rationum vel ignorata, vel oblivioni tradita reperiri.*

PROBLEMA 29.

106. *Invenire rationem ſuperficierum atque corporum in geometria elementari explicatorum.*

Sit parallelogrammorum & triangulorum altitudo communis a, baſes ſint b & c: erunt illorum areæ ab & ac, (§. 357. 370 *Geom.*), horum

iorum $\frac{1}{2}ab$ & $\frac{1}{2}ac$ (§. 375 *Geom.*). Sunt ergo ut ab ad ac, hoc eſt, ut b ad c (§. 172 *Arithm.*).

Theorema. Parallelogramma & triangula æque alta baſium rationem habent. Eodem modo invenitur

Theorema. Parallelogramma & triangula æqualium baſium ſunt in ratione altitudinum.

Sit diameter circuli a, peripheria ma (§. 94): erit quadratum diametri a^2, area circuli $\frac{1}{4}ma^2$ (§. 406 *Geom.*). Eſt ergo illud ad hanc ut a^2 ad $\frac{1}{4}ma^2$, hoc eſt, ut a ad $\frac{1}{4}ma$ (§. 172 *Geom.*).

Theorema. Quadratum diametri eſt ad aream circuli, ut diameter ad quartam peripheriæ partem.

Sint baſes parallelogrammorum & triangulorum a & b, altitudines ma & mb (§. 94): erunt areæ ut ma^2 ad mb^2 (§. 357. 370. 375 *Geom.*), hoc eſt, ut a^2 ad b^2 (§. 104).

Theorema. Parallelogramma & triangula ſimilia ſunt ut quadrata baſium; ſeu (quia quodlibet latus pro baſi aſſumi poteſt §. 109 *Geom.*) ut quadrata laterum homologorum.

Sint baſes parallelepipedorum, priſmatum, cylindrorum, pyramidum, conorum, a & b, altitudo communis c: erunt corpora iſta ut ac ad bc (§. 475. 478. 487 *Geom.*), hoc eſt, ut a ad b (§. 104.) Eodem modo c aſſumi poteſt pro baſi communi ita ut a & b ſint altitudines.

Theorema. Parallelepipeda, priſmata, cylindri, pyramides & coni ejusdem altitudinis baſium rationem habent; eandem vero baſin habentes ſunt in ratione altitudinum.

Non abſimili modo alia hujus generis theoremata inveſtigantur.

PROBLEMA 30.

107. *Invenire, quoties quantitates quotlibet permutari queant, hoc eſt, ordo earum variari poſſit.*

Sint quantitates duæ a & b. Cum aut ſcribi poſſit ab aut ba; patet eſſe numerum variationum $2 = 2.1$. Sint tres quantitates a, b, c. Ordines earum erunt

cab
acb
abc

---

cba
bca
bac:

id quod patet, c primum cum ab, dein cum ba combinando. Unde numerus variationum $3.2.1 = 6$.

Quodſi quantitates fuerint quatuor, una quælibet quatuor modis combinari poteſt cum quolibet ordine trium: unde numerus variationum emergit $6.4 = 4.3.2.1 = 24$.

 Simi-

Similiter ſi quantitates fuerint quinque, unaquælibet juncta cum quolibet ordine quatuor quantitatum pariet variationes 5. Unde numerus omnium variationum 24. 5 = 5. 4. 3. 2. 1. Quare ſi numerus quantitatum fuerit n; erit numerus variationum $n. n$-1. n-2. n-3. n-4. n-5 &c.

Si eadem quantitas bis occurrat; reperietur variatio duorum *bb*; trium *bab, abb, bba*, quatuor *cbab, bcab, babc* &c. adeoque numerus variationum in caſu primo 1 = (2. 1) : 2. 1, in ſecundo 3 = (3. 2. 1) : 2. 1, in tertio 12 = (4. 3. 2. 1) : 2. 1. Quodſi litera quinta accedat, in quolibet ordine quantitatum quatuor pariet variationes quinque; unde numerus omnium variationum 60 = (5. 4. 3. 2. 1) : 2. 1. Hinc intelligitur, ſi numerus quantitatum ſit n; fore omnium variationum numerum (n. n-1. n-2. n-3. n-4 &c.) : 2. 1.

Si eadem quantitas ter occurrat, erit in tribus nulla variatio; in quatuor variationes ſunt *baaa, abaa, aaba, aaab*, adeoque numerus variationum 4 = (4. 3. 2. 1) : 3. 2. 1. Quinta ſi accedat, in quolibet ordine quatuor quantitatum quinque variationes pariet; unde numerus omnium variationum (5. 4. 3. 2. 1) : 3. 2. 1. Eodem modo, ſi ſexta aſſumatur, reperietur numerus variationum (6. 5. 4. 3. 2. 1) : 3. 2. 1. Unde colligitur, ſi numerus quantitatum ſit n, fore numerum omnium variationum (n. n-1. n-2. n-3. n-4. n-5 &c.) : 3. 2. 1.

Si eadem quantitas quater occurrat, erit in quatuor variatio nulla. Quodſi vero quinta accedat, variationes ſunt *baaaa, abaaa, aabaa, aaaba, aaaab*. Quare numerus variationum eſt 5 = (5. 4. 3. 2. 1) : 4. 3. 2. 1. Si ſexta aſſumatur, in quolibet ordine quantitatum quinque variationes ſex pariet, adeoque numerus variationum 30 = (6. 5. 4. 3. 2. 1) : 4. 3. 2. 1. Unde conſtat, ſi numerus quantitatum ſit n, fore numerum omnium variationum (n. n-1. n-2. n-3. n-4. n-5 &c.) : 4. 3. 2. 1.

Ex his formulis ſpecialibus colligitur generalis. Nempe ſi n denuo ſit quantitatum numerus, m numerus, qui indicat, quoties eadem quantitas occurrit: erit (n. n-1. n-2. n-3. n-4. n-5. n-6. n-7. n-8. n-9. &c.) : m-1. m-2. m-3. m-4. m-5. m-6 &c.). Nimirum ſeries continuanda, donec continua unitatis ſubtractio ex n & m relinquat 0.

Eodem modo ulterius progredi licet, tandemque reperietur, ſi numerus quantitatum fuerit n, numeri, qui indicant, quoties earum aliquæ repetuntur, ſint l, m, r &c. formula

nula univerſaliſſima (n. n-1. n-2. -3. n-4. n-5. n-6 &c.) : (l. l-1. l-2. -3. l-4 &c. m. m-1. m-2. m-3 &c. r-1. r-2. r-3. r-4. r-5 &c.). E. gr. ſit ı = 6, l = 3, r = 0; erit numenerus variationum (6. 5. 4. 3. 2. 1): . 2. 1. 3. 2. 1) = (6. 5. 4) : (3. 2) = . 5. 2 = 20.

SCHOLION 1.

108. *Ponamus menſæ aſſidere* 13 *perſoas. Quodſi quæratur, quoties loca permuare poſſint; reperietur numerus variationum* 3. 12. 11. 10. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 5,227,020, 800.

SCHOLION 2

109. *Si vox aliqua ex literis non nimis multis componatur; eadem methodo, qua n reſolutione problematis uſi ſumus, inveniri oſſunt ſine meditatione omnia anagrammata in omnibus linguis poſſibilia. E. gr. inveniri debent anagrammata vocis* amor. *Erunt variationes poſſibiles*

a	omra	oram
ma	omar	oarm
am	rmoa	oamr
oma	mroa	raom
moa	mora	arom
mao	moar	aorm
oam	rmao	aomr
aom	mrao	ramo
amo	maro	armo
roma	maor	amro
orma	raom	amor

Sunt adeo anagrammata vocis amor *in lingua latina* Roma, mora, Maro, ramo, armo.

Sectio II.

DE ALGEBRA

CAPUT I.

De ALGEBRA AD PROBLEMATA ARITHMETICA EAQUE DETERMINATA APPLICATA.

DEFINITIO 5.

110. *Algebra* eſt methodus reſolvendi problemata per æquationes.

DEFINITIO 6.

111. *Æquatio* eſt expreſſio ejusdem quantitatis per duos valores diverſos, ſed æquales, e. gr. 2. 3 = 4 + 2. *Stifelius* (c) definit eam per rationem æqualitatis inter duos terminos diverſimode denominatos.

DEFINITIO 7.

112. *Radix æquationis* eſt valor quan-

(c) in Arithmet. integra lib. 3. c. 1 p. 228. b.

quantitatis incognitæ, quæ æquationem ingreditur. E. gr. ſi fuerit $a^2 + b^2 = x^2$; radix erit $V(a^2 + b^2)$.

DEFINITIO 8.

113. Si valor ipſius x fuerit poſitivus, e. gr. $x = 3$; *radix* dicitur *vera*.

DEFINITIO 9.

114. Si valor ipſius x fuerit negativus, e. gr. $x = -5$, *radix* dicitur *falſa*.

DEFINITIO 10.

115. Si valor ipſius x fuerit *radix* quantitatis negativæ, e. gr. $V - 5$, *imaginaria* appellatur.

DEFINITIO 11.

116. *Æquatio* dicitur ſimplex, ſi quantitas incognita fuerit unius dimenſionis, e. gr. ſi $x = (a + b) : 2$.

DEFINITIO 12.

117. *Æquatio* dicitur *quadratica*, ſi quantitas incognita ad duas dimenſiones aſſurgit, ut $x^2 = a^2 + b^2$; *cubica*, ſi ad tres, ut $x^3 = a^3 - b^3$ &c.

SCHOLION.

118. *In hac ſectione tantum de æquatione ſimplici & quadratica agimus.*

PROBLEMA 32.

119. *Problema datum Algebraice reſolvere.*

RESOLUTIO.

1. Quantitates datæ a quæſitis diſtinguantur & datæ primis, quæſitæ ultimis alphabeti litteris denominentur (§. 3).
2. Quærantur tot æquationes, quot quantitates incognitæ occurrunt: quod ſi fieri nequeat, id indicio eſt, *problema* non eſſe *determinatum*, ſed unam vel plures quæſitarum pro arbitrio aſſumi poſſe. Inveniuntur autem æquationes, niſi in ipſo problemate contineantur, per theoremata de æqualitate quantitatum agentia.
3. Quoniam in æquatione quantitates incognitæ cognitis ſunt permixtæ ; reducenda eſt, ita ut ex una parte tantum compareat quantitas incognita una; ex altera vero meræ cognitæ deprehendantur. Inſtituitur autem hæc reductio, ſi quantitates ſubductæ addantur, additæ ſubtrahantur, multiplicatæ dividantur, diviſæ multiplicentur, e potentiis radices extrahantur, radices ad potentias evehantur, ut perpetua æqualitas conſervetur (§. 80. 83. 85. 86. 234 *Arithm.*).

SCHOLION.

120. *Hæc ſufficiunt pro æquationibus ſimplicibus reducendis ; ſed ad altiores aliis adhuc ſubſidiis opus eſt, quæ ſuo loco exponemus, nunc*

unc nonniſi extractionem radicis ex æquatio- quadratica addituri.

PROBLEMA 33.

121. *Ex æquatione quadratica adicem extrahere.*

RESOLUTIO.

. Si æquatio fuerit pura, ut $x^2 = ab$; evidens eſt, eſſe $x = \surd ab$.

I. Si æquatio fuerit affecta, ut $x^2 \mp ax = \mp b^2$; tum x aſſumatur pro una parte radicis, erit a quantitas cognita ſecundi termini duplum partis alterius (§. 240 *Arithm.*), adeoque $\frac{1}{2}a$ pars altera. Complebitur adeo quadratum ſi addatur $\frac{1}{4}aa$ (§. *cit.*): quo facto, radix extrahi poteſt, ut hic factum eſſe apparet:

$$x^2 . ax = . b^2$$
$$\frac{1}{4}aa \qquad \frac{1}{4}aa \text{ add.}$$
$$x^2 . ax . \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 . b^2$$
$$x . \frac{1}{2}a = \surd(\frac{1}{4}a^2 . b^2)$$
$$x = . \frac{1}{2}a . \surd(\frac{1}{4}a^2 . b^2)$$

Signorum $\mp$ & $-$ loco poſuimus punctum, ne plures caſus diſtingui neceſſum haberemus.

PROBLEMA 34.

122. *Invenire numerum, cujus pars dimidia cum tertia & quarta numerum integrum unitate ſuperat.*

Sit numerus quæſitus x, erit

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = x + 1$$

hoc eſt $(12x + 8x + 6x) : 24 = x + 1$

ſeu $\frac{26}{24}x = x + 1$

$$\text{24 mult.}$$
$$26x = 24x + 24$$
$$24x \qquad 24x \qquad \text{Subtr.}$$
$$2x = 24$$
$$\text{2 div.}$$
$$x = 12$$

Probatio. $\frac{1}{2}x \quad \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 6 + 4 + 3 = 13.$

PROBLEMA 35.

123. *Invenire numerum, cujus partes aliquotæ qualescunque & quotcunque ſimul ſumtæ ipſum ſuperant numero dato.*

Sit numerus datus f, quæſitus x, partes aliquotæ $\frac{a}{b}x$, $\frac{c}{d}x$, $\frac{e}{g}x$ &c. Erit per conditionem problematis

$$\frac{a}{b}x + \frac{c}{d}x + \frac{e}{g}x \text{ \&c.} = f + x$$

h.e. $(adg + bgc + bde)x = f + x$ (§. 217 *Arithm.*).

$$bdg$$

$$\frac{(adg + bgc + bde)\,x}{bdgx} = \frac{fbdg + bdgx}{bdgx} \qquad bdg$$

 (adg

$(adg+bgc+bde-bdg)x=fbdg$

$x=fbdg:(adg+bgc+bde-bdg)$
ſeu $adg+bgc+bde-bdg:bdg=f:x$
Æquatio ultima hanc ſuppeditat

Regulam: 1. Fractiones datæ reducantur ad eandem denominationem. 2. A ſumma numeratorum ſubtrahatur denominator communis. 3. Per reſiduum dividatur factum ex eodem denominatore in numerum datum. Quotus eſt numerus quæſitus. E. gr. Sit $a:b=\frac{1}{2}$, $c:d=\frac{1}{3}$, $e:g=\frac{1}{4}$, $f=1$: erit $x=24:(12+8+6-24)=24:2=12$

In analogia, in quam æquationem reſolvimus, continetur hoc

Theorema. Si plures fractiones ad eandem denominationem reducuntur, erit numerus integer, cujus partes ſunt fractiones iſtæ, ad harum ſupra illum exceſſum, ut communis denominator ad differentiam ejus a ſumma numeratorum.

PROBLEMA 36.

124. *Datis ſumma duarum quantitatum & earundem facto, invenire numeros.*

Sit ſumma $=a$ Semidiffer. $=x$
Fact. $=b$ erit Quant. maj. $=\frac{1}{2}a+x$
min. $=\frac{1}{2}a-x$

Ergo per conditionem probl.
$\frac{1}{4}aa-xx=b$ (§. 36).
$xx \quad xx$ add.

$\frac{1}{4}aa=b+xx$
$b \quad b$ Subtr.

$\frac{1}{4}aa-b=xx$

$V(\frac{1}{4}aa-b)=x$

Regula. 1. A quadrato ſemiſummæ duarum quantitatum ſubtrahatur factum earundem. Ex reſiduo extrahatur radix, quæ erit ſemidifferentia earundem. Sit e. gr. $a=14$, $b=48$: erit $V(\frac{1}{4}aa-b)=V(49-48)=1$. Adeoque $\frac{1}{2}a+x=7+1=8$; $\frac{1}{2}a-x=7-1=6$. Sunt adeo numeri quæſiti 8 & 6.

COROLLARIUM.

125. Quoniam $\frac{1}{2}a$ eſt dimidium totius a, x differentia partis æqualis ab inæquali, b rectangulum partium inæqualium, æquatio ſecunda hoc continet *theorema*: Si totum dividatur in duas partes æquales & in duas inæquales, quadratum partis æqualis æquale eſt rectangulo inæqualium una cum quadrato differentiæ partis æqualis ab inæquali.

SCHOLION.

126. *Patet adeo, quod ſæpius caſu in theoremata incidamus, dum problemata Algebraice reſolvimus; qualia ſubinde annotabimus. Regulas vero, quas quilibet proprio Marte ex ultima æquatione eruere valet, in poſterum prætermittemus.*

PROBLEMA 37.

127. *Data ſumma dignitatum duarum quantitatum & differentia earun*

[e]arundem invenire quantitatem [u]tramque.

Sit ſumma $= a$ Quantit. maj. $= x$
differentia $= b$ min. $= y$
erit per conditionem probl.

$$x^m + y^m = a \qquad y^m - x^m = b$$
$$x^m \quad x^m \qquad x^m \quad x^m$$
$$y^m = a - x^m \qquad y^m = b + x^m$$

Quare (§. 79. *Arithm.*)

$$a - x^m = b + x^m$$
$$x^m \quad x^m$$
$$a = b + 2x^m$$
$$b \quad b$$
$$a - b = 2x^m$$
$$(2$$
$$(a-b):2 = x^m$$
$$\sqrt[m]{(\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b)} = x$$

Sit $m = 2$, $a = 97$, $b = 65$: erit $x = \sqrt{(48\tfrac{1}{2} - 32\tfrac{1}{2})} = \sqrt{16} = 4$ & hinc $y = \sqrt{(b + x^2)} = \sqrt{(65 + 16)} = \sqrt{81} = 9$.

Æquatio antepenultima reſolvitur in hanc analogiam,

$$a - b : x^m = 2:1$$ (§. 269 *Arithm.*).

quæ ſequens ſuppeditat

Theorema. Exceſſus ſummæ duarum dignitatum ſimilium ſupra differentiam earundem eſt ad dignitatem majorem in ratione dupla.

PROBLEMA 38.

128. *Dato itinere diurno viatoris alicujus una cum itinere diurno alterius ipſum dato tempore ſequentis invenire tempus, quo illum hic aſſequetur.*

Sit iter diurnum primi $= a$
ſecundi $= b$
tempus datum $= c$
tempus quæſ. $= x$

erit iter intra tempus datum a primo confectum $= ac$, quod vero intra quæſitum emenſus eſt $= ax$: iter poſterioris intra tempus quæſitum reperietur $= bx$. Quare per conditionem problematis

$$ac + ax = bx$$
$$ax \quad ax$$ ſubtr. quia $bx > ax$
$$ac = bx - ax$$
$$b - a$$
$$ac:(b-a) = x$$

Sit $a = 6$, $b = 8$, $c = 4$: erit $x = 24 : 2 = 12$.

Æquatio penultima in hanc analogiam reſolvitur (§. 269 *Arithm.*).

$$b - a : a = c : x$$

quæ ſequens ſuppeditat

Theorema: Si quidam viator alterum inſequitur, tempore aliquo elapſo, differentia viarum, quas eodem tempore uterque emetitur, eſt ad viam primi, quem alter inſequitur, ut tempus ab itinere primi elapſum ad tempus, quo alter ipſum aſſequitur.

SCHOLION.

129. *Facile apparet, cum viatoris notio*

problematis reſolutionem non ingrediatur, problema univerſalius de mobilibus quibuscunque concipi poſſe.

PROBLEMA 39.

130. *Dato itinere diurno alicujus viatoris una cum tempore ab initio itineris elapſo, invenire iter diurnum ab alio viatore conficiendum, ut in dato tempore illum aſſequatur.*

Sit iter diurnum primi $= a$
tempus elapſum $= b$
tempus datum $= c$
iter diurnum alterius $= x$

Erit per conditionem problematis ut in probl. præced.

$$ab + ac = cx \quad | \; c$$

$$(ab + ac) : c = x$$

Sit e. gr. $a = 6$, $b = 4$, $c = 12$: erit $x = (24 + 72) : 12 = 96 : 12 = 8$.

Æquatio penultima in hanc reſolvitur analogiam (§. 269 *Arithm.*)

$$c : b + c = a : x$$

quæ ſequens ſuppeditat

Theorema. Si quidam viator alterum inſequitur tempore aliquo elapſo, erit tempus, intra quod ipſum aſſequitur, ad tempus ab initio itineris ejus elapſum, ut iter diurnum primi ad iter diurnum ſecundi.

PROBLEMA 40.

131. *Dato intervallo locorum, ex quibus eodem tempore duo viatores egrediuntur, una cum itinere diurno uniuscujuslibet, invenire tempus, quo ſibi mutuo occurrent.*

Sit intervallum locorum $= a$
iter diurnum primi $= b$
ſecundi $= c$
tempus occurſus $= x$

erit via a primo intra tempus x confecta $= bx$, via, quam alter eodem tempore emetitur, cx. Quare cum ambo junctim emenſi ſint totum intervallum locorum, unde egrediebantur; habebimus

$$bx + cx = a \quad | \; b + c$$

$$x = a : (b + c)$$

Sit $a = 120$, $b = 6$, $c = 4$: erit $x = 120 : (6 + 4) = 120 : 10 = 12$. Duodecimo igitur die ſibi mutuo occurrent.

SCHOLION.

132. *Problemata iſtiusmodi ſpecialia ſub initium difficiliora ſunt ſolutu, quam abſtracta, quoniam in his æquatio plerumque continetur, aut ex theorematibus Arithmeticis facile eruitur, in illis autem ex circumſtantiis problematis elicienda. Quodſi enim plures circumſtantiæ occurrunt; tyrones non ſtatim eas pervident, quæ æquationem ſuppeditant. Diſcant igitur, conſultius eſſe, ut problematis abſtractis ſolvendis primas ſtudii Algebraici partes conſecrent: inſuperque notent velim, facilius problemata ſpecialia ad abſtracta ſeu generalia, quam vice verſa abſtracta ad ſpecialia revocari, quia iſta conditiones generales, unde ſolutio pendet, actu continent, in his vero circumſtantiæ ſpeciales, quæ ad ſolutionem nil conferunt, minime compparent. E. gr.*

pre-

problema præſens in abſtracto iſtiusmodi eſt. Invenire numerum, qui in ſummam duorum datorum ductus producit numerum datum. *Similiter problema* (§. 128) *in abſtracto tale eſt :* Datis tribus quantitatibus invenire quartam, ita ut factum ex quarta in ſecundam æquale ſit facto ex prima in aggregatum ex tertia & quarta. *Hinc apparet ratio, cur theorematum uſus non ſtatim in oculos occurrat. Nocent igitur qui inveniri ac addiſci prohibent ea ; quorum uſus nondum conſtat.*

PROBLEMA 41.

133. *Data ſumma duarum quantitatum & differentia quadratorum, invenire quantitates.*

Sit ſumma $= a$
differentia Quadr. $= b$
Semidiff. Quant. $= y$
erit Quant. maj. $= \frac{1}{2}a + y$.
minor $= \frac{1}{2}a - y$ (§. 5).

Quare

Quadratum maj. $\frac{1}{4}a^2 + ay + y^2$
min. $\frac{1}{4}a^2 - ay + y^2$

Differ. (§. 29) $2ay = b$ per con-
$2a$ ——— dit: probl.

$y = b : 2a$

Sit $b = 40$, $a = 10$; erit $y = 40 : 20 = 2$. Hinc $\frac{1}{2}a + y = 5 + 2 = 7$ & $\frac{1}{2}a - y = 5 - 2 = 3$.

PROBLEMA 42.

134 *Data ſumma duarum quantitatum una cum ſumma quadratorum, invenire quantitatem utramque.*

Sit ſumma $= a$
Summa Quadr. $= b$
Semidiff. Quant. $= y$
erit major $= \frac{1}{2}a + y$ } (§. 5).
minor $= \frac{1}{2}a - y$ }

Quare

Quadrat. maj. $\frac{1}{4}a^2 + ay + y^2$
minoris $\frac{1}{4}a^2 - ay + y^2$

Summa $\frac{1}{2}a^2 + 2y^2 = b$
$\frac{1}{2}a^2$ $\frac{1}{2}a^2$ Subtr.

$2y^2 = b - \frac{1}{2}a^2$
——— 2 div.

$y^2 = \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a^2$

$y = V(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a^2)$

Sit $a = 10$, $b = 58$: erit $y = V(29 - 25) = V4 = 2$. Hinc $\frac{1}{2}a + y = 5 + 2 = 7$ & $\frac{1}{2}a - y = 5 - 2 = 3$.

PROBLEMA 43.

135. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut factum ex unaquaque in radicem quadratam alterius ſit æquale numero dato.*

Sit factum unum $= a$
alterum $= b$
numerus unus $= x$
alter $= y$

erit per conditionem problematis

$xVy = a$ $yVx = b$

$x^2y = a^2$ $y^2x = b^2$
——— y ——— y^2

 $x^2 =$

$x^2 = a^2 : y \quad x = b^2 : y^2$

$x^2 = b^4 : y^4$

$a^2 : y = b^4 : y^4$ — y^4 mult.

$a^2 y^3 = b^4$ — a^2

$y^3 = b^4 : a^2$

$y = \sqrt[3]{(b^4 : a^2)}$

Sit $a = 18, b = 12$: erit $y = \sqrt[3]{(20736 : 324)} = \sqrt[3]{64} = 4$. Ergo $x = b^2 : y^2 = 144 : 16 = 9$.

PROBLEMA 44.

136. *Invenire duos numeros, quorum factum æquale eſt numero dato, quadratum vero ſummæ ad quadratum differentiæ habet rationem datam.*

Sit factum $= a$ Summa $= 2x$
ratio $= b : c$ different. $= 2y$
erit per conditiones problematis

$xx - yy = a \quad b : c = 4x^2 : 4y^2$

$y^2 \quad y^2 \qquad 4cx^2 = 4by^2$ (§. 267 *Arithm.*).

$x^2 = a + y^2 \qquad 4c$

$x^2 = by^2 : c$

Quare (§. 79 *Arithm.*)

$a + y^2 = by^2 : c$ — c mult.

$ac + cy^2 = by^2$ — cy^2 ſubtr.

$ac = by^2 - cy^2$ — $b - c$

$ac : (b - c) = y^2$

$\sqrt{ac} : \sqrt{(b - c)} = y$

Sit $a = 96$, $b : c = 25 : 1$. Erit $y = \sqrt{96} : \sqrt{(25 - 1)} = \sqrt{4} = 2$ & $x = \sqrt{(a + y^2)} = \sqrt{(96 + 4)} = \sqrt{100} = 10$, conſequenter numerus major $x + y$ (§. 5) $= 10 + 2 = 12$ & minor $x - y = 10 - 2 = 8$.

PROBLEMA 45.

137. *Dato pretio unius menſuræ vini, invenire quantitatem aquæ commiſcendæ, ut una menſura dato alio pretio minore vendi queat.*

Sit pretium majus $= a$
minus $= b$
quantitas aquæ $= x$

Cum aquæ pretium nullum ſit; erit $1 + x = a$, adeoque

$1 + x : 1 = a : b$ conſequenter

$b + bx = a$ (§. 267 *Arithm.*).

$bx = a - b$ — b

$x = (a - b) : b = a : b - 1$

Sit $a = 16$, $b = 10$; erit $x = 1\frac{6}{10} - 1 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Theorema. Si vino pretioſiori aqua commiſcenda, ut viliori pretio conſtet; quan-

quantitas aquæ commiſcendæ eſt ad quantitatem vini, ut differentia pretiorum ad pretium minus.

Nempe vi æquationis penultimæ $x:1 = a-b:b$.

PROBLEMA 46.

138. *Dato pretio vini generoſi & pretio vilioris, determinare quantitatem vini vilioris generoſo commiſcendi, ut dato aliquo pretio medio venire queat.*

Sit pretium generoſi $= a$
vilioris $= b$
medium $= c$
quantitas generoſi $= d$
quantitas vilioris commiſcendi $= x$
erit pretium ejus $= bx$
quantitas generoſi commiſcendi $= d-x$
ejus pretium $= ad - ax$

Quare per conditionem problematis

$$ad-ax+bx=c$$
ax ax add. ob $ax > bx$

$$ad+bx=c+ax$$
bx bx

$$ad=c+ax-bx$$
c c

$$ad-c=ax-bx$$
$a-b$

$$(ad-c):(a-b)=x$$

Sit $a=16$, $b=10$, $c=12$, $d=1$; erit $x=(16-12):(16-10)=4:6=\frac{2}{3}$.

PROBLEMA 47.

139. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut factum, ſumma & differentia quadratorum ſint inter ſe æqualia.*

Sit numerus major $=x$, minor $=y$: erit per conditionem problematis

$$x^2-y^2=xy \qquad x+y=xy$$
y y

$$x=xy-y$$
$x-1$

$$x:(x-1)=y$$

Quodſi valor ipſius y jam inventus in æquatione dexteriore ſubſtituatur, habebimus

$$x^2-\frac{x^2}{x^2-2x+1}=\frac{x^2}{x-1}$$
x^2-2x+1

$$x^4-2x^3+x^2-x^2=x^3-x^2$$

$$x^4-2x^3=x^3-x^2$$
x^3 x^3 ſubtr.

$$x^4-3x^3=-x^2$$
x^2 div.

$$x^2-3x=-1$$
$\frac{9}{4}$ $\frac{9}{4}$ (§. 121)

$$x^2-3x+\frac{9}{4}=\frac{9}{4}-1=\frac{5}{4}$$

$$x - \tfrac{1}{2} = V\tfrac{5}{4}$$
$$\tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{2}$$

$$x = \tfrac{1}{2} + V\tfrac{5}{4} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}V5$$

Ergo $y = (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}V5) : (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}V5 - 1)$ per ſuperiora $= (3 + V5) : (1 + V5) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}V5$.

Invenitur etiam citra moleſtias calculi ſurdorum y, valore ipſius x per æquationem $xy - x = y$ reperto in æquatione $x^2 - y^2 = xy$ ſubſtituto & reductione legitime inſtituta.

SCHOLION.

140. *Ne diviſio* $3 + V5$ *per* $1 + V5$ *negotium faceſſat tyronibus, eam hic integram apponere libet.*

$$\begin{array}{r|l} & 3 + V5 \quad (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}V5 \\ (1 + V5) & \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}V5 \\ \hline & \tfrac{5}{2} + \tfrac{1}{2}V5 \\ & \tfrac{1}{2}V5 + \tfrac{5}{2} \\ \hline & 0 \end{array}$$

PROBLEMA 48.

141. *Datis in progreſſione Arithmetica termino primo & ultimo atque differentia terminorum, invenire numerum terminorum & ſummam progreſſionis.*

Sit terminus primus $= a$
ultimus $= b$
differentia $= d$
numerus terminorum $= x$
ſumma $= y$

erit (§. 301 *Arithm.* & §. 90 *Analyſ.*)

$$b = a + dx - d \qquad y = \tfrac{1}{2}(b + a)x$$
$$d \qquad\quad d$$

$$b + d = a + dx$$
$$a \qquad a$$

$$b + d - a = dx$$

$$(b + d - a) : d = x$$

Quodſi hic valor in æquatione dextra ſubſtituatur, habebimus

$y = \tfrac{1}{2}(b + a)(b + d - a) : d = (b^2 + bd - ab + ab + ad - a^2) : 2d = (b^2 + bd + ad - a^2) : 2d = \tfrac{1}{2}(b + a) + (b^2 - a^2) : 2d$.

Sit $a = 2$, $b = 17$, $d = 3$: erit $x = (17 + 3 - 2) : 3 = 18 : 3 = 6$ & $y = \tfrac{1}{2}(17 + 2) + (289 - 4) : 6 = \tfrac{19}{2} + \tfrac{285}{6} = 9\tfrac{1}{2} + 47\tfrac{1}{2} = 57$.

PROBLEMA 49.

142. *Datis termino primo, differentia terminorum & ſumma progreſſionis arithmeticæ, invenire numerum terminorum & terminum ultimum.*

Sit terminus primus $= a$
differentia $= d$
Summa $= c$
ultimus $= y$
terminorum numerus $= x$

erit (§. 301 *Arithm.* & §. 90 *Analyſ.*)

$\tfrac{1}{2}x$

$$\tfrac{1}{2}x(a+y)=c \qquad a+dx-d=y$$
$$\cdot 2$$
$$ax+xy=2c$$
$$ax \qquad ax$$
$$xy=2c-ax$$
$$y=(2c-ax):x$$

Ergo (§. 79 *Arithm.*)

$$(2c-ax):x=a+dx-d$$
$$\cdot x$$
$$2c-ax=ax+dx^2-dx$$
$$ax \qquad ax$$
$$2c=dx^2+2ax-dx$$
$$: d$$
$$\frac{2c}{d}=x^2+\frac{2a-d}{d}x$$

[H]oc eſt, ſi fiat $(2a-d):d=m$

$$2c:d=x^2+mx$$
$$\tfrac{1}{4}m^2 \qquad \tfrac{1}{4}m^2 \qquad (\S.\ 121).$$
$$\tfrac{1}{4}m^2+2c:d=x^2+mx+\tfrac{1}{4}m^2$$
$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2+2c:d)}=x+\tfrac{1}{2}m$$
$$\tfrac{1}{2}m \qquad \tfrac{1}{2}m$$
$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2+2c:d)}-\tfrac{1}{2}m=x$$

Sit $a=2$, $d=3$, $c=57$: erit $m=(4-3):3=\frac{1}{3}$, conſequenter $x=\sqrt{(\frac{1}{36}+\frac{114}{3})}-\frac{1}{6}=\sqrt{\frac{1369}{36}}-\frac{1}{6}=\frac{37}{6}-\frac{1}{6}=\frac{36}{6}=6$ & $y=2+18-3=2+15=17$.

PROBLEMA 50.

143. *Datis termino primo & ultimo una cum ſumma progreſſionis arithmeticæ invenire numerum & differentiam terminorum.*

Sit terminus primus $=a$
ultimus $=b$
Summa $=c$
differentia $=y$
numerus terminorum $=x$

erit (§. 301 *Arithm.* & §. 90 *Analyſ.*)

$$\tfrac{1}{2}x(a+b)=c \qquad a+xy-y=b$$
$$\cdot 2 \qquad\qquad -a$$
$$x(a+b)=2c \qquad xy-y=b-a$$
$$:(a+b) \qquad +y$$
$$x=2c:(a+b) \qquad xy=b-a+y$$
$$x=(b-a+y):y$$

Quare (§. 79 *Arithm.*)

$$2c:(a+b)=(b-a+y):y$$
$$\cdot y$$
$$2cy:(a+b)=b-a+y$$
$$\cdot (a+b)$$
$$2cy=ab-a^2+ay+b^2-ab+by$$
$$2cy-ay-by=b^2-a^2$$
$$:(2c-a-b)$$
$$y=(b^2-a^2):(2c-a-b)$$

Sit $a=2$, $b=17$, $c=57$: erit $x=114:19=6$ & $y=(17^2-2^2):(114-2-17)=(289-4):(114-19)=285:95=3$.

Theorema. In progreſſione Arithmetica eſt, ut differentia ſummæ ex termino primo & ultimo a duplo ſummæ progreſſionis ad differentiam termini primi ab ultimo, ita ſumma termini pri-

mi & ultimi ad differentiam progreſſionalem.

PROBLEMA 51.

144. *Datis differentia & numero terminorum una cum ſumma progreſſionis arithmeticæ, invenire terminum primum & ultimum.*

Sit numerus terminorum $= n$
differentia $= d$
Summa $= c$
term. I $= x$
ultimus $= y$

erit (§. 301 *Arithm.* & §. 90 *Analyſ.*)

$$\tfrac{1}{2}n(x+y) = c \qquad x+nd-d = y$$
$$n(x+y) = 2c$$
$$x+y = 2c:n$$
$$y = 2c:n-x$$

Quare (§. 79 *Arithm.*).

$$2c:n-x = x+nd-d$$
$$2c:n = 2x+nd-d$$
$$2c:n+d-nd = 2x$$
$$c:n+\tfrac{1}{2}d-\tfrac{1}{2}nd = x$$

Sit $n=6$, $d=3$, $c=57$: erit $x = \frac{57}{6} + \frac{3-18}{2} = \frac{57}{6} - \frac{15}{2} = \frac{19-15}{2} = \frac{4}{2} = 2$ & $y = 2+18-3 = 17$.

PROBLEMA 52.

145. *Datis differentia terminorum, termino ultimo & ſumma progreſſionis arithmeticæ, invenire terminum primum & numerum terminorum.*

Sit terminus ultimus $= b$
terminorum differ. $= d$
Summa $= c$
primus $= x$
numerus $= y$

erit (§. 301 *Arithm.* & §. 90 *Analyſ*)

$$\tfrac{1}{2}y(x+b) = c \qquad b = x+dy-d$$
$$y(b+x) = 2c \qquad b+d-x = dy$$
$$y = 2c:(b+x) \qquad (b+d-x):d = y$$

Quamobrem (§. 79 *Arithm.*)

$$2c:(b+x) = (b+d-x):d$$
$$2cd:(b+x) = b+d-x$$
$$2cd = b^2+bd-bx+bx+dx-x^2$$
$$x^2-dx = b^2+bd-2cd$$
$$\tfrac{1}{4}d^2 \qquad \tfrac{1}{4}d^2 \quad (\S.\,121).$$
$$x^2-dx+\tfrac{1}{4}d^2 = \tfrac{1}{4}d^2+b^2+bd-2cd$$
$$x-\tfrac{1}{2}d = V(\tfrac{1}{4}d^2+b^2+bd-2cd)$$
$$x = \tfrac{1}{2}d+V(\tfrac{1}{4}d^2+b^2+bd-2cd)$$

Quodſi $\frac{1}{2}d > x$, ob $\frac{1}{2}d-x$ erit $x = \frac{1}{2}d-V(\frac{1}{4}d^2+b^2+bd-2cd)$.

Sit $b=17$, $d=3$, $c=57$: erit $x = \frac{3}{2}+V(\frac{9}{4}+289+51-342) = \frac{3}{2}+$
$V(\frac{9}{4}-2$

$\sqrt{(\frac{9}{4}-2)} = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2,$
& $y = (17+3-2):3 = \frac{18}{3} = 6.$

PROBLEMA 53.

146. *Datis ſumma progreſſionis arithmeticæ, numero terminorum & facto ex primo in ultimum, invenire terminos ſingulos.*

Sit factum $= a$
numerus terminorum $= n$
Summa $= c$
terminus I $= x$
ultimus $= y$

erit (§. 90 *& per condit. probl.*)

$\frac{1}{2}n(x+y) = c \qquad xy = a$

(divisor $\frac{1}{2}n$; divisor x)

$x+y = 2c:n \qquad y = a:x$

$y = 2c:n - x$ Ergo (§. 79 *Arithm.*)

$$a:x = 2c:n - x$$
(multiplicator n)
$$na:x = 2c - nx$$
(multiplicator x)
$$na = 2cx - nx^2$$
$$nx^2 - 2cx = -na$$
(divisor n)
$$x^2 - 2cx:n = -a$$
(addendum utrinque $c^2:n^2$)
$$x^2 - 2cx:n + c^2:n^2 = c^2:n^2 - a$$
$$c:n - x = \sqrt{(c^2:n^2 - a)}$$
$$c:n = x + \sqrt{(c^2:n^2 - a)}$$
$$c:n - \sqrt{(c^2:n^2 - a)} = x$$

Sit $c = 57$, $n = 6$, $a = 34$: erit $x = \frac{57}{6} - \sqrt{(\frac{3249}{36} - 34)} = \frac{57}{6} - \sqrt{\frac{(3249-1224)}{36}} = \frac{57}{6} - \sqrt{\frac{2025}{36}} = \frac{57-45}{6} = 12:6 = 2.$ Ergo $y = \frac{34}{2} = 17.$

PROBLEMA 54.

147. *Invenire tres numeros continue proportionales, dato facto ex quadrato tertii in primum una cum denominatore rationis.*

Sit factum $= a$
denominator $= m$
terminus primus $= x$
erit ſecundus $= mx$, tertius $= mx^2$ (§. 94).

Quare per conditionem problematis

$$a = m^4 x^3$$
$$a:m^4 = x^3$$
$$\sqrt[3]{a:m^4} = x$$

Sit e. gr. $a = 648$, $m = 3$: erit $x = \sqrt[3]{(648:81)} = \sqrt[3]{8} = 2.$

Æquatio prima in hanc reſolvitur analogiam: $1 : m^4 = x^3 : a$

(§. 269 *Arithm.*). Quare cum $1 : m^4$ ſit ratio quadruplicata $1 : m$ (§. 148 *Arithm.*); ſequens enaſcitur

Theorema: Cubus termini primi in proportione Geometrica continua eſt ad factum ex quadrato tertii in primum in ratione quadruplicata primi ad ſecundum.

PROBLEMA 55.

148. *Numerum datum in tres partes continue proportionales dividere, dato denominatore rationis.*

Sit numerus datus $= a$
denominator $= b$
pars prima $= x$
erit ſecunda $= bx$
tertia $= b^2x$

& per conditionem problematis.

$$b^2x + bx + x = a$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; b^2 + b + 1$$
$$x = a : (b^2 + b + 1)$$

Sit $b = 4$, $a = 42$: erit $x = 42$
$(16 + 4 + 1) = 42 : 21 = 2$

PROBLEMA 56.

149. *Numerum datum in terminos quotcunque proportionales reſolvere, dato denominatore rationis.*

Sit numerus datus $= a$
denominator m
terminus I $= x$
erit ſecundus $= mx$
tertius $= m^2x$
quartus $= m^3x$ &c.

Ergo per conditionem problematis.

$$x + mx + m^2x + m^3x + m^4x \&c = a$$
$$x = a : (1 + m + m^2 + m^3 + m^4 \&c.)$$

Sit $a = 364$, $m = 3$: erit $x = 364 : (1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243) = 364 : 364 = 1$. Ergo 1. 3. 9. 27. 81. 243 eſt ſeries proportionalium quæſita.

PROBLEMA 57.

150. *Data ſumma termini primi & ultimi, itemque ſumma ſecundi & tertii in proportione ſive continua ſive diſcreta, una cum denominatore rationis, invenire terminos ſingulos.*

Sit ſumma I $= a$
II $= b$
denominator $= m$
terminus primus $= x$
erit quartus $= a - x$
ſecundus $= mx$
tertius $= b - mx$

Quare per conditionem problematis.

$$x : mx = b - mx : a - x$$

Hinc $ax - x^2 = mbx - m^2x^2$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; x$$
$$a - x = mb - m^2x$$
$$m^2x - x = mb - a$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; m^2 - 1$$

$x =$

$$x = \frac{mb - a}{m^2 - 1}$$

Sit $a = 13$, $b = 11$, $m = 2$: erit $x = (22 - 13) : (4 - 1) = 9 : 3 = 3$.

Analogia, in quam æquatio penultima reſolvitur, $m - 1 : m^2 - 1 = x : b - a$, hoc ſuppeditat

Theorema: Denominator rationis unitate minutus eſt ad quadratum ſuum unitate pariter mulctatum, ut terminus primus proportionis ad differentiam ſummæ ſecundi & tertii a ſumma primi & ultimi.

PROBLEMA 58.

151. *Invenire tres numeros continue proportionales ejus conditionis, ut differentia primi & ſecundi æquetur numero dato & differentia ſecundi atque tertii æqualis ſit itidem numero dato.*

Sit differ. I $= a$
differ. II $= b$
terminus I $= x$
erit II $= x + a$
III $= x + a + b$

Per conditionem problematis:

$$x : x + a = x + a : x + a + b$$

$$x^2 + ax + bx = x^2 + 2ax + a^2$$
$$x^2 + ax \qquad x^2 + ax$$

$$bx = ax + a_2$$

$$bx - ax = a^2$$

$$\overline{\qquad\qquad} \; b - a$$

$$x = a^2 : (b - a)$$

Sit $a = 8$, $b = 24$: erit $x = 64 : (24 - 8) = 64 : 16 = 4$.

Analogia, in quam reſolvitur æquatio antepenultima, $b - a : a = a : x$, ſequens continet

Theorema: Si fuerint tres numeri continue proportionales, erit differentia primi & ſecundi numerus medius proportionalis inter differentiam differentiæ termini primi & ſecundi a differentia ſecundi ac tertii & terminum primum.

PROBLEMA 59.

152. *Datis in progreſſione geometrica termino primo & ultimo atque terminorum numero, invenire denominatorem rationis.*

Sit terminus primus $= a$
ultimus $= b$
numerus terminorum $= n$
denominator $= x$

Erit (§. 101)

$$b = x^{n-1} a$$

$$\overline{\qquad\qquad} \; a$$

$$b : a = x^{n-1}$$

$$b^{1:(n-1)} : a^{1:(n-1)} = x$$

Sit $a = 2$, $b = 486$, $n = 6$: erit

$$x = \sqrt[5]{486} : \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{243} = 3.$$

 PRO-

PROBLEMA 60.

153. *Datis denominatore rationis, terminorum numero & ſumma progreſſionis geometricæ, invenire terminum primum.*

Sit denominator $= m$
numerus terminorum $= n$
ſumma progreſſ. $= c$
terminus I $= x$
erit ultimus $= m^{n-1} x$
conſequenter (§. 101).

$$c = (m^n x - x) : (m-1)$$
$$\overline{}\; m-1$$
$$mc - c = m^n x - x$$
$$\overline{}\; m^n - 1$$
$$(mc - c) : (m^n - 1) = x$$

Sit $m = 3$, $n = 6$, $c = 728$; erit $x = 2.\ 728 : 728 = 2$

Analogia, in quam æquatio penultima reſolvitur, $c : x = m^n - 1 : m - 1$, ſuppeditat hoc

Theorema: Summa progreſſionis geometricæ eſt ad terminum primum ut dignitas denominatoris rationis, cujus exponens numero terminorum æqualis eſt, unitate mulctata ad denominatorem ipſum unitate imminutum.

PROBLEMA 61.

154. *Datis in progreſſione geometrica termino primo & ultimo una cum denominatore rationis, invenire numerum terminorum.*

Sit terminus primus $= a$
ultimus $= b$
denominator rationis $= m$
numerus terminorum $= x$
erit (§. 101)

$m^{x-1} a = b$, hoc eſt, ſi logarithmus ipſius a ponatur $= la$ & logarithmus ipſius $m = lm$.

$$xlm - lm + la = lb \quad (\text{§. 307 Arithm.})$$
$$xlm = lb - la + lm$$
$$\overline{}\; lm$$
$$x = (lb - la) : lm + 1$$

Sit $a = 2$, $b = 486$, $m = 3$, erit

$$lb = 2,6866363$$
$$la = 0,3010300$$
$$\overline{}$$
$$lb - la = 2,3856063$$

$$\begin{array}{ll} & 3\ 7\ 1 \\ lb - la = & 23856063 \\ lm = & 4771213 \end{array} \left(\begin{array}{l} 5 \\ 1 \end{array}\right.$$
$$\overline{}$$
$$6 = x$$

PROBLEMA 62.

155. *Datis ſumma progreſſionis geometricæ, termino primo atque ultimo, invenire numerum terminorum ac denominatorem rationis.*

Sit ſumma $= c$
terminus primus $= a$
ultimus $= b$
denominator rationis $= y$
numerus terminorum $= x$

eri

erit (§. 101)

$c=(by-a):(y-1) \qquad b=y^{x-1}a$

$cy-c=by-a$

$cy-by=c-a$

$y=(c-a):(c-b)$

Æquatio altera adhibitis logarithmis in ſequentem degenerat (§. 307 *Arithm.*).

$lb=xly-ly+la$

$lb+ly-la=xly$

$(lb-la):ly+1=x$

Quodſi ſubſtituatur valor ipſius ly paulo ante inventus, qui eſt, $l(c-a)-l(c-b)$; habebimus.

$$\frac{lb-la}{l(c-a)-l(c-b)}+1=x$$

Sit $c=728$, $a=2$, $b=486$: erit

$lb=2.6866363 \qquad c=728$

$la=0.3010300 \qquad b=486$

$lb-la=2.3856063 \qquad c-b=242$

$l(c-a)=2.8609366 \qquad c=728$

$l(c-b)=2.3838154 \qquad a=2$

Differ. $=0.4771212 \qquad c-a=726$

$2385 6063 \,/\, 477 1212 \; (5$
$\qquad (1$

$6=x$

PROBLEMA 63.

156. *Datis in progreſſione geometrica facto ex primo in ultimum, numero terminorum & denominatore rationis, invenire terminum primum & ultimum.*

Sit factum $=f$
numer. termin. $=n$
denominator $=m$
terminus primus $=x$
ultimus $=y$
erit per conditiones problematis:

$xy=f \qquad m^{n-1}x=y$

$y=f:x$

Quare (§. 79 *Arithm.*)

$f:x=m^{n-1}x$

$f=m^{n-1}x^2$

$f:m^{n-1}=x^2$

$f^{1:2}:m^{(n-1):2}=x$

Sit $m=3$, $n=6$, $f=972$: erit $\sqrt{972}:\sqrt{243}=\sqrt{4}=2$.

DEFINITIO 13.

157. Tres vel quatuor *quantitates* dicuntur *harmonice proportionales*, ſi in priore caſu differentia primi & ſecundi fuerit ad differentiam ſecundi atque tertii, ut primus ad tertium; in caſu poſteriore differentia primi & ſecundi ad differentiam tertii & quarti ut pri-

primus ad quartum: E. gr. 2, 3 & 6 ſunt in proportione harmonica, eſt enim 1 : 3 = 2 : 6. Si termini proportionales in caſu priore continuentur; oritur *Progreſſio harmonica.*

PROBLEMA 64.

158. *Datis duabus quantitatibus, invenire tertiam harmonice proportionalem.*

Sit prima $= a$
ſecunda $= b$
tertia $= x$
erit (§. 157)

$$b - a : x - b = a : x$$

$$ax - ab = bx - ax \quad (\S.\ 267\ \textit{Arithm.})$$

$$2ax = ab + bx$$

$$2ax - bx = ab$$

$$x = ab : (2a - b)$$

E. gr. Sit $a = 10$, $b = 16$: erit $x = 160 : (20 - 16) = 160 : 4 = 40$.

Æquatio penultima in hanc reſolvitur analogiam $2a - b : a = b : x$, unde ſequens enaſcitur

Theorema. Si fuerint tres numeri harmonice proportionales, erit differentia ſecundi a duplo primi ad primum, ut ſecundus ad tertium.

COROLLARIUM 1.

159. Si $2a = b$; erit $x = ab : 0$, conſequenter $1 ; 0 = x : ab$ (§. 165). Quare cum non ſit $1 = 0$, nec erit $x = ab$, adeoque in hoc caſu nullus numerus harmonice proportionalis ipſis a & b inveniri poteſt. E. gr. ſi $a = 12$, $b = 24$: juxta regulam $x = 12 . 24 : (24 - 24) = 12 . 24 : 0$. Sed non licet 12. 24 ſeu 288 pro termino tertio aſſumere: alias enim foret 12 : 264 = 12 : 288 (§. 157): Quod abſurdum. Multo minus inveniri poterit, ſi $b > 2a$.

COROLLARIUM 2.

160. Quodſi ex tribus proportionalibus 6. 8. 12 terminus ſecundus ſumatur pro a, tertius pro b, invenietur quartus continue proportionalis $= 8 . 12 : (16 - 12) = 8 . 12 : 4 = 8 . 3 = 24$.

COROLLARIUM 3.

161. Cum eodem modo, ſi tertius pro a, quartus pro b ſumatur, quintus inveniri queat & ita porro in infinitum; datis duobus terminis progreſſio, ſi poſſibile (§. 159), continuatur per regulam inventam. E. gr. ſi $a = 10$, $12 = b$, erit tertius $12 . 10 : (20 - 12) = 15$. Inde quartus $12 . 15 : (24 - 15) = 20$, quintus $15 . 20 : (30 - 20) = 30$; Sextus $20 . 30 : (40 - 30) = 60$. Sed ulterius continuari nequit ob $60 = 2 . 30$ (§. 159).

PROBLEMA 65.

162. *Datis duabus quantitatibus, invenire mediam harmonice proportionalem.*

Sit

Sit prima $= a$
ſecunda $= x$
tertia $= b$

$x - a : b - x = a : b$

$bx - ab = ab - ax$ (§. 267. *Arithm.*)

$bx = 2ab - ax$

$ax + bx = 2ab$

$x = 2ab : (a + b)$

E. gr. Sit $a = 10$, $b = 40$: erit $x = 800 : 50 = 16$.

Æquatio penultima in hanc reſolvitur analogiam, $a + b : 2a = b : x$, unde

Theorema: Si fuerint tres numeri harmonice proportionales, erit ſumma primi & ultimi ad primi duplum ut ultimus ad medium.

PROBLEMA 66.

163. *Datis tribus quantitatibus, invenire quartam qarmonice proportionalem.*

Sit prima $= a$
ſecunda $= b$
tertia $= c$
quarta $= x$
erit (§. 157).

$b - a : x - c = a : x$

$bx - ax = ax - ac$ (§. 267. *Arithm.*)

$ac + bx = 2ax$

$ac = 2ax - bx$

$ac : (2a - b) = x$

Sit e. gr. $a = 6$, $b = 8$, $c = 12$: erit $72 : (12 - 8) = 72 : 4 = 18$.

Theorema. Si fuerint quatuor quantitates harmonice proportionales, erit ut differentia ſecundæ a duplo primæ ad primam, ita tertia ad quartam.

DEFINITIO 14.

164. *Proportio contraharmonica* eſt ea terminorum trium relatio, in qua differentia primi & ſecundi eſt ad differentiam ſecundi & tertii ut tertius ad primum. E. gr. 3. 5. & 6. ſunt numeri contraharmonice proportionales: eſt enim $2 : 1 = 6 : 3$.

PROBLEMA 67.

165. *Datis duabus quantitatibus, invenire tertiam contraharmonice proportionalem.*

Sit prima $= a$
ſecunda $= b$
tertia $= x$
erit (§. 164)

$b - a : x - b = x : a$

$ab - aa = x^2 - bx$ (§. 267. *Arithm.*)
$\frac{1}{4}b^2$ $\quad \frac{1}{4}b^2$ (§. 121)

$\frac{1}{4}b^2$

$\frac{1}{4}b^2 + ab - a^2 = x^2 - bx + \frac{1}{4}b^2$

$V(\frac{1}{4}b^2 + ab - a^2) = x - \frac{1}{2}b$

$\frac{1}{2}b + V(\frac{1}{4}b^2 + ab - a^2) = x$

E. gr. ſit $a = 3$, $b = 5$: erit $x = \frac{5}{2} + V(\frac{25}{4} + 15 - 9) = \frac{5}{2} + V\frac{49}{4} = \frac{5}{2} + \frac{7}{2} = \frac{12}{2} = 6$.

PROBLEMA 68.

166. *Datis duabus quantitatibus invenire mediam contraharmonice proportionalem.*

Sit prima $= a$ media $= x$
tertia $= b$
erit (§. 164)

$x - a : b - x = b : a$

$ax - a^2 = b^2 - bx$

$ax + bx = a^2 + b^2$

$a + b$

$x = (a^2 + b^2) : (a + b)$

E. gr. ſit $a = 3$, $b = 6$: erit $x = (9 + 36) : (3 + 6) = 45 : 9 = 5$.

Theorema. Si ſumma 2 quadratorum dividitur per ſummam radicum, quotus eſt inter radices medius contraharmonice proportionalis.

PROBLEMA 69.

167. *Invenire ſummam quadratorum & cuborum, quorum radices in ſerie numerorum naturali progrediuntur.*

Sit $0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ &c. $=$ ſn^0

$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ &c. $=$ ſn

$0 + 1 + 4 + 9 + 16 + 25$ &c. $=$ ſn^2

$0 + 1 + 8 + 27 + 64 + 125$ &c. $=$ ſn

&c. &c.

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ &c. $=$ ſ$(n+1)$

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ &c. $=$ ſ$(n+1)$

$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36$ &c. $=$ ſ$(n+1)$

$1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216$ &c. $=$ ſ$(n+1)^3$ &c. &c

Nimirum ſn^0 denotat ſumman quotlibet unitatum ſeriei a cyphr incipientis; ſ$(n+1)^0$ ſumman quotlibet unitatum ſeriei ab uni tate incipientis. Sed n repræſen tat unamquamque unitatem in ſe rie prima; $n+1$ in altera. Ergo ſ numerus terminorum in utraque ſerie idem; erit ſ$(n+1)^0$ - ſn^0 = $(n+1)^0 = 1$. Similiter ſn^1 denota ſummam ſeriei numerorum natu ralium a cyphra incipientis & quemlibet ejus terminum; ſ$(n+1)$ ſummam ſeriei eorundem nume rorum ab unitate incipientium & $n+1$ quemlibet ejus terminum 1, 2, 3 &c. quare ſi in utraque ſeri fuerit idem terminorum numerus erit ſ$(n+1)^1$ - ſn^1 $= (n+1)^1$, ubi $+ 1$ terminum ultimum ſeriei a unitate incipientis denotat, qu ſcilicet ea differt a ſerie, quæ a cy phra inchoatur. Eodem modo pa tet, eſſe ſ$(n+1)^2$ - ſn^2 $= (n+1)^2$ ſ$(n+1)^3$ - ſn^3 $= (n+1)^3$, ſ$(n+1)^4$ ſn^4 $= (n+1)^4$ &c. & in gener ſ$(n+1)^m$

$\int(n+1)^{m+1} - \int n^{m+1} = (n+1)^{m+1}$.

Jam $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ (§. 78.)

$$\int(n+1)^2 = \int n^2 + 2\int n^1 + \int n^0 + 1$$

$$\int(n+1)^2 - \int n^2 - \int n^0 - 1 = 2\int n^1$$

hoc eſt, ob $\int(n+1)^2 - \int n^2 = (n+1)^2$ per $(n+1)^2 - \int n^0 - 1 = 2\int n^1$ dem.

$$\tfrac{1}{2}(n+1)^2 - \tfrac{1}{2}\int n^0 - \tfrac{1}{2} = \int n^1$$

E. gr. $n = 5$, erit $\int n^1$ ſumma omnium radicum ab o usque ad $5 = (36-5-1):2 = 30:2 = 15$.

Sit porro

$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$ (§. 78)

$$\int(n+1)^3 = \int n^3 + 3\int n^2 + 3\int n^1 + \int n^0 + 1$$

$$\int(n+1)^3 - \int n^3 - 3\int n^1 - \int n^0 - 1 = 3\int n^2$$

i. e. ob $\int(n+1)^3 - \int n^3 = (n+1)^3$ per de- $(n+1)^3 - 3\int n^1 - \int n^0 - 1 = 3\int n^2$ monſtr.

$$\tfrac{1}{3}(n+1)^3 - \int n^1 - \tfrac{1}{3}\int n^0 - \tfrac{1}{3} = \int n^2$$

E. gr. ſit $n = 5$; erit $\int n^2 = 64:3 - 5 - 4:3 = \frac{64-49}{3} = 15$.

SCHOLION 1.

168. *Quod in ſummationibus, quibus in reſolutione problematis uſi ſumus, ſemper addenda ſit unitas, exempla ſingularia palam loquuntur. Si enim in æquatione* $\int(n+1)^2 = \int n^2 + 2\int n + \int n^0 + 1$ *fuerit* $n = 4$, *erit*:

$\int n^0 = 0 + 1 + 1 + 1 + 1$

$\int n = 0 + 1 + 2 + 3 + 4$

$\int n^2 = 0 + 1 + 4 + 9 + 16$

$\int(n+1)^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25$

Unde cum differentia inter $\int(n+1)^2$ *&* $\int n^2$ *ſit* 25, *&* $\int n^1 + \int n^0$ *tantum* 24; *patet, ad conſervandam æqualitatem addendam eſſe unitatem.*

SCHOLION 2.

169. *Eadem methodo, qua numerorum naturalium quadrata & cubos ſummare docuimus, altiores quoque dignitates ſummantur. Sed cum potentiæ in infinitum aſſurgant, ideo problema generale pro caſibus infinitis inveniendum.*

PROBLEMA 70.

170. *Summare potentias quascunque numerorum naturalium.*

Quoniam $(n+1)^{m+1} = n^{m+1} + \frac{m+1}{1}n^m + \frac{m+1 \cdot m}{1 \cdot 2}n^{m-1} + \frac{m+1 \cdot m \cdot m-1}{1 \cdot 2 \cdot 3}n^{m-2} + \frac{m+1 \cdot m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}n^{m-3}$ &c. in infinit. (§. 78.)

Ideo $\int(n+1)^{m+1} = \int n^{m+1} + \frac{m+1}{1}\int n^m + \frac{m+1 \cdot m}{1 \cdot 2}\int n^{m-1} + \frac{m+1 \cdot m \cdot m-1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\int n^{m-2} + \frac{m+1 \cdot m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\int n^{m-3}$ &c. $+ 1$.

Hinc $\int(n+1)^{m+1} - \int n^{m+1} - \frac{m+1 \cdot m}{1 \cdot 2}\int n^{m-1} - \frac{m+1 \cdot m \cdot m-1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\int n^{m-2} - \frac{m+1 \cdot m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\int n^{m+3}$ &c. $- 1 = \frac{m+1}{1}\int n^m$,

Sed $\int(n+1)^{m+1} - \int n^{m+1} = (n+1)^{m+1}$ (§. 167). Ergo $(n+1)^{m+1} - \frac{m+1 \cdot m}{1 \cdot 2}\int n^{m+1}$ &c. $- 1 = m+1\int n^m$,

 con-

conſequenter $\frac{1}{m+1}(n+1)^{m+1} \frac{-m}{1.2} \int n^{m-1} \frac{-m.m-1}{1.2.3.} \int n^{m-2} \frac{-m.m-1.m-2}{1.2.3.4.} \int n^{m-3}$ &c. $\frac{1}{m+1} = \int n^m$.

E. gr. ſit $m=3$, erit $\frac{1}{4}(n+1)^4 - \frac{3}{2}\int n^2 - \int n^1 - \frac{1}{4}\int n^0 - \frac{1}{4} = \int n^3$.

SCHOLION.

171. *Theorema generale terminis quidem conſtat infinitis; in caſibus tamen ſpecialibus idem finitus evadit, quia reliqui evaneſcunt, quando numerus ab* m *ſubtrahendus fit ipſi* m *æqualis: ſemper tamen utendum eſt termino ultimo* $\frac{1}{m+1}$

COROLLARIUM.

172. Cum ſummatio potentiarum ſuperiorum a ſummatione omnium inferiorum pendeat; ſi in formulis altioribus pro $\int n^{m-1}$, $\int n^{m-2}$, $\int n^{m-3}$ &c. valores ex inferioribus ſubſtituantur, prodibunt formulæ per ſolum n ſummas potentiarum determinantes, non præſuppoſitis ſummationibus anterioribus: E. gr.

$\int n^0 = n$

$2\int n^1 = (n+)^2 - \int n^0 - 1 = n^2 + 2n + 1 - n - 1$ (§. 78) $= n^2 + n$.

$3\int n^2 = (n+1)^3 - 3\int n^1 - \int n^0 - 1 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - \frac{3n^2 - 3n}{2} - n - 1 = (\frac{2n^3 + 6n}{2} + 2 - 3n^2 - 3n - 2n^2) : 2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2}$.

$4\int n^3 = (n+1)^4 - 6\int n^2 - 4\int n^1 - \int n^0 - 1 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - 2n^3 - 3n^2 - n - 2n^2 - 2n - n - 1 = n^4 + 2n^3 + n^2$.

$5\int n^4 = (n+1)^5 - 10\int n^3 - 10\int n^2 - 5\int n^1 - \int n^0 - 1 = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 \frac{-10n^4 - 20n^3 - 10n^2}{4} - \frac{10n^3 - 15n^2 - 5n}{3} \frac{-5n^2 - 5n}{2} - n - 1 =$ (§. 217. 213. *Arithm.*) $(6n^5 + 30n^4 + 60n^3 + 60n^2 - 30n + 6 - 15n^4 - 50n^3 - 60n^2 - 31n - 6) : 6 = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{6}$.

Hinc $\int n^0 = n$

$\int n^1 = (n^2 + n) : 2$

$\int n^2 = (2n^3 + 3n^2 + n) : 6$

$\int n^3 = (n^4 + 2n^3 + n^2) : 4$

$\int n^4 = (6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n) : 30$

&c. &c.

DEFINITIO 15.

173. *Numeri Polygoni* ſunt Summæ progreſſionum Arithmeticarum ab unitate incipientium. Dicuntur in ſpecie *Triangulares*, ſi differentia terminorum fuerit 1; *quadrati*, ſi 2; *Pentagoni*, ſi 3; *Hexagoni*, ſi 4; *Heptagoni*, ſi 5; *Octogoni*, ſi 6 &c.

Progr. Arithm.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8
Num. Triang.	1.	3.	6.	10.	15.	21.	28.	36
Prog. Arithm.	1.	3.	5.	7.	9.	11.	13.	15
Num. Quadr.	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64
Progr. Arithm.	1.	4.	7.	10.	13.	16.	19.	22
Num. Pentag.	1.	5.	12.	22.	35.	51.	70.	92
Progr. Arithm.	1.	5.	9.	13.	17.	21.	25.	29
Num. Hexag.	1.	6.	15.	28.	45.	66.	91.	120

SCHO-

SCHOLION.

174. *Numeri polygoni nomina ſortiuntur a figuris Geometricis, in quas puncta unitatibus reſpondentia diſponi poſſunt.* E. gr. *Tria puncta numeri triangularis 3 unitatibus reſpondentia diſponuntur in triangulum: & idem tenendum eſt de reliquis numeris triangularibus.*

DEFINITIO 16.

175. *Latus numeri polygoni* eſt numerus terminorum progreſſionis arithmeticæ, qui ſummantur. *Numerus* vero *angulorum* eſt, qui indicat, quot angulos figura habet, unde numerus polygonus nomen ſuum ſortitur.

COROLLARIUM.

176. Numerus adeo angulorum in triangularibus 3; in tetragonis 4; in pentagonis 5 &c. conſequenter differentiam terminorum, qui ſummantur, excedit duabus unitatibus (§. 173).

PROBLEMA 71.

177. *Dato latere numeri polygoni & numero angulorum; invenire numerum polygonum.*

Sit latus $= n$
numerus angulorum $= a$
terminus primus progreſſionis $= 1$ (§. 173).
differentia terminorum $= n-2$ (§. 176).
terminus ultimus $1 + (a-2)(n-1)$ (§. 91.)
primus 1

summa primi & ult. $2 + (a-2)(n-1)$
hoc eſt $4 + na - 2n - a$
dimid. term. num. $\frac{1}{2}n$

Numer. polyg. $2n + \frac{1}{2}n^2 a - n^2 - \frac{1}{2}an$ (§. 173).

Theorema. Numerus polygonus eſt ſemidifferentia factorum ex quadrato lateris in numerum angulorum duabus unitatibus mulctatum & ex ipſo latere in numerum angulorum quaternario mulctatum.

COROLLARIUM 1.

178. Sit $a = 3$, erit triangularis, $= \frac{1n^2 + 1n}{2}$

Sit $a = 4$, erit quadratus $= \frac{2n^2 - 0n}{2} = n^2$

Sit $a = 5$, erit pentagonus $= \frac{3n^2 - 1n}{2}$

Sit $a = 6$, erit hexagonus $= \frac{4n^2 - 2n}{2} = n^2 - n$

Sit $a = 7$, erit heptagonus $= \frac{5n^2 - 3n}{2}$

Sit $a = 8$, erit octogon. $= \frac{6n^2 - 4n}{2} = 3n^2 - 2n$
&c. &c.

COROLLARIUM 2.

179. Quoniam numerus polygonus $\frac{n^2(a-2) - n(a-4)}{2}$ (§. 177); erit ſumma ſeriei cujuscunque numerorum polygonorum $\frac{(a-2)\int n^2 - (a-4)\int n^1}{2}$. Nempe quia $a-2$ & $a-4$ ſunt numeri conſtantes, non ſummantur. Sed $\int n^2 =$

 $2n^3$

$\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$ & $\int n^1 = \frac{n^2+n}{2} = \frac{3n^2+3n}{6}$ (§. 172). Ergo ſumma polygonorum $(a-2)\frac{(2n^3+3n^2+n)}{12} - (a-4)\frac{(3n^2+3n)}{12} = (2an^3 + 3an^2 + an - 4n^3 - 6n^2 - 2n^2 - 3an^2 - 3an + 12n^2 - 12n) : 12 = (an^3 - an - 2n^3 + 3n^2 + 5n) : 6 = \frac{(a-2)n^3 + 3n^2 + (a-5)n}{6}$: unde porro theoremata ſpecialia eliciuntur, determinato numero angulorum a. Nempe ſumma

- triangularium $(n^3+3n^2+2n):6$
- pentagonorum $(n^3+n^2):2$
- hexagonorum $(4n^3+3n^2-n):6$
- heptagonorum $(5n^3+3n^2-2n):6$
- octogonorum $(2n^3+n^2-n):2$

&c. &c.

PROBLEMA 72.

180. *Dato numero polygono & numero angulorum, invenire latus.*

Sit numerus polygonus $= p$ latus $= x$

numerus angulorum $= a$

erit differentia terminorum $= a-2$ (§. 176).

terminus primus $= 1$ (173)

adeoque ultimus $= 1 + (x-1)(a-2)$ hoc eſt. $3 + ax - 2x - a$ (§. 91).

terminus primus 1

ſumma pr. & ult. $4 + ax - 2x - a$

dimid. num. term. $\frac{1}{2}x$

numerus polygonus $2x + \frac{1}{2}ax^2 - x^2 - \frac{1}{2}ax$

Quare $\frac{1}{2}ax^2 - x^2 + 2x - \frac{1}{2}ax = p$

$$ax^2 - 2x^2 + 4x - ax = 2p$$

$$x^2 + \frac{4-a}{a-2}x = \frac{2p}{a-2}$$

hoc eſt, ſi fiat $(a-4):(a-2) = m$

$$x^2 - mx = 2p:(a-2)$$

$$\frac{1}{4}m^2 \qquad \frac{1}{4}m^2$$

$$x^2 - mx + \frac{1}{4}m^2 = \frac{1}{4}m^2 + 2p:(a-2)$$

$$x - \frac{1}{2}m = \sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2 + 2p:(a-2)\right)}$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2 + 2p:(a-2)\right)} + \frac{1}{2}m$$

hoc eſt, ſubſtituto valore ipſius m,

$$x = \frac{a-4}{2a-4} + \sqrt{\left(\frac{a^2-8a+16}{4a^2-16a+16} + \frac{4p}{2a-4}\right)}$$

$$= \frac{a-4+\sqrt{(8ap-16p+a^2-8a+16)}}{2a-4}$$

$$\frac{a-4+\sqrt{(8(a-2)p+(a-4)^2)}}{2a-4}$$

Sit e. gr. $a = 3$, erit latus numeri triangularis $\frac{-1+\sqrt{(8p+1)}}{2}$

Sit $a = 5$, erit latus pentagoni $\frac{1+\sqrt{(24p+1)}}{6}$

Sit $a = 6$, erit latus hexagoni $\frac{2+\sqrt{(32p+4)}}{8}$

Sit $a = 7$, erit latus heptagoni $\frac{3+\sqrt{(40p+9)}}{10}$

&c. &c.

DEFINITIO 17.

180. Summæ numerorum polygonorum eodem modo collectæ, quo ex progreſſionibus arithmeticis ipſi polygoni eliciuntur, dicuntur *Pyramidales primi*: Summæ pyramidalium primorum *Pyramidales ſecundi*: ſummæ pyramidalium ſecundorum *Pyramidales tertii* &c. in infinitum. Speciatim *Pyramidales triangulares primi* vocantur, ſi ex triangularibus ortum ducant; *Pyramidales pentagoni primi*, ſi ex pentagonis oriuntur &c.

COROLLARIUM.

181. Cum igitur ſummare docuerimus numeros polygonos (§. 179); evidens jam eſt, quomodo numeri pyramidales primi inveniantur. Nempe $\frac{(a-2)n^3+3n^2-(a-5)n}{6}$ exprimit omnes numeros pyramidales primos *vi* §. *cit.*

PROBLEMA 73.

182. *Invenire ſummam numerorum pyramidalium ſuperioris ordinis cujuscunque, ſeu dato quolibet inferiore proxime ſuperiorem.* Non alia re opus eſt, quam ut juxta methodum ſuperius traditam (§. 167) numeri pyramidales proxime inferioris ordinis ſummentur, ita enim habentur eorum ſummæ. Quare cum numerus pyramidalis primi ordinis ſit $\frac{(a-2)n^3+n^2-(a-5)n}{6}$ (§. 181.), erit ſumma pyramidalium primi ordinis $\frac{(a-2)\int n^3+3\int n^2-(a-5)\int n}{6}$.

Sed $\int n^3=(n^4+2n^3+n^2):4$, $\int n^2=(2n^3+3n^2+n):6$, $\int n^1=(n^2+n):2$, (§. 172). Ergo ſumma pyramidalium primi ordinis $\frac{(a-2)(n^4+2n^3+n^2)+2(2n^3+3n^2+n)-(a-5)(2n^2+2n)}{24}=(an^4+2an^3-an^2-2an-2n^4+14n^2+12n):24=\frac{(a-2)n^4+2an^3-(a+14)n^2-(2a+12)n}{24}$.

Sit e. gr. $a=3$, hoc eſt, quæratur ſumma pyramidalium triangularium primi ordinis; erit ea $\frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{24}$. Quoniam vero ſumma inventa generalis exprimit numerum quemcunque pyramidalem ſecundi ordinis (§. 180), ſi ea porro eundem in modum ſummetur, prodibit ſumma pyramidalium ſecundi ordinis ſeu numerus pyramidalis ordinis tertii (§. 180). Et ita progredi licet, quousque libet.

COROLLARIUM I.

183. Cum ſumma unitatum ſit n, ſumma laterum $\frac{n^2+n}{2}=\frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{2}$ (§. 172),

171.), ſumma triangularium $\frac{n^3+3n^2+2n}{6} = \frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+2}{3}$ (§. 172.), ſumma pyramidalium primi ordinis $\frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{24} = \frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+2}{3}\cdot\frac{n+3}{4}$ (§. 182.) &c. evidens eſt lex, qua numeri pyramidales ex triangularibus orti in infinitum ſummentur. Nimirum numerus fractionum in ſe invicem ducendarum excedit numerum ordinis tribus unitatibus, fractionum earundem numeratores progrediuntur in ſerie naturali numerorum, ſed terminus primus progreſſionis eſt latus numeri figurati, denominatores ſunt numerorum naturalium progreſſio ab unitate incipiens. Nempe dato latere n, erit numerus pyramidalis triangularis indeterminatus $\frac{n+0}{1}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+2}{3}\cdot\frac{n+3}{4}\cdot\frac{n+4}{5}\cdot\frac{n+5}{6}$ &c. in infinit.

COROLLARIUM 2.

184. Hinc apparet, quales numeri ſint unciæ potentiarum (§. 78).

PROBLEMA 74.

185. *Dato numero quantitatum, una cum numero indicante, quot earum invicem combinari debeant, invenire numerum combinationum.*

Quantitas una nullam; duæ *a* & *b* nonniſi unam combinationem *ab* admittunt. Trium combinationes ſunt tres, nempe *ab*, *ac*, *bc* quatuor vero ſex *ab*, *ac*, *bc*. *ad*, *bd* *cd*; quinque decem *ab*, *ac*, *bc*, *ad* *bd*, *cd*, *ae*, *be*, *ce*, *de*, & ita porro. Unde apparet, numeros combinationum progredi ut: 1. 3. 6. 10 &c. ho eſt, eſſe numeros triangulares (§ 173.), quorum latus differt unitate a numero quantitatum datarum. Si nempe hic fuerit q, eri latus numeri combinationum q- adeoque numerus combinatio num $\frac{q-1}{1}\cdot\frac{q+0}{2}$ (§. 183).

Si quantitates tres invicem com binandæ & numero itidem tr fuerint, erit combinatio tantu unica *abc*. Si quarta accedat, con binationes reperies quatuor *ab* *abd*, *bcd*, *acd*; ſi quinta, dece *abc*, *abd*, *bcd*, *acd*, *abe*, *bde*, *bce*, *ac* *ade*; ſi ſexta, viginti & ita porr Numeri ergo combinationu progrediuntur, ut 1. 4. 10. 20 & hoc eſt, ſunt numeri pyramidal triangulares primi (§. 180), qu rum latus a numero quantitatu datarum differt duabus unitatibu ſeu exponente unitate mulcta Hinc ſi numerus quantitatum da rum fuerit q, erit latus ($q-2$), ad que numerus combinationu q

$\frac{q-2}{1}\cdot\frac{q-1}{2}\cdot\frac{q+0}{3}$ (§. 183).

Si quantitates quatuor invicem combinandæ, numeros combinationum progredi deprehendimus ut numeros pyramidales triangulares ſecundi ordinis 1, 5, 15, 35 &c. quorum latus a numero quantitatum differt tribus quantitatibus ſeu exponente unitate mulctato. Quare ſi numerus quantitatum fuerit q, erit latus $q-3$, adeoque numerus combinationum $\frac{q-3}{1}\cdot\frac{q-2}{2}\cdot\frac{q-1}{3}\cdot\frac{q+0}{4}$ (§. 183).

Hinc facile abſtrahitur regula generalis determinandi numerum combinationum in caſu quocunque. Sit nempe numerus quantitatum combinandarum q, exponens combinationis n, erit numerus combinationum $\frac{q-n+1}{1}\cdot\frac{q-n+2}{2}\cdot\frac{q-n+3}{3}\cdot\frac{q-n+4}{4}\cdot\frac{q-n+5}{5}$ &c. donec numerus addendus fit ipſi n æqualis.

E. gr. Sit numerus quantitatum combinandarum $=6$, exponens combinationis 4; erit numerus combinationum $\frac{6-4+1}{1}\cdot\frac{6-4+2}{2}\cdot\frac{6-4+3}{3}\cdot\frac{6-4+4}{4} = \frac{6-3}{1}\cdot\frac{6-2}{2}\cdot\frac{6-1}{3}\cdot\frac{6+0}{4} = \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{4} = 15$.

COROLLARIUM.

186. Quodſi quantitatum datarum omnes combinationes poſſibiles ſcire deſideres, incipiendo nempe a combinationibus ſingularum binarum; addi oportet $\frac{q-1}{1}\cdot\frac{q+0}{2}$. $\frac{q-2}{1}\cdot\frac{q-1}{2}\cdot\frac{q+0}{3}$, $\frac{q-3}{1}\cdot\frac{q-2}{2}\cdot\frac{q-1}{3}\cdot\frac{q+0}{4}$ &c. Unde numerus omnium combinationum poſſibilium erit $\frac{q\cdot\overline{q-1}}{1\cdot 2} + \frac{q\cdot\overline{q-1}\cdot\overline{q-2}}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{q\cdot\overline{q-1}\cdot\overline{q-2}\cdot\overline{q-3}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{q\cdot\overline{q-1}\cdot\overline{q-2}\cdot\overline{q-3}\cdot\overline{q-4}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$ &c. Quæ eſt ſumma unciarum binomii ad dignitatem q evecti mulctata exponente dignitatis unitate aucto $q+1$ (§. 78). Quare cum hæ unciæ prodeant $1+1$ ad dignitatem q evehendo *per probl. 24.* (§. *cit.*), Sit vero $1+1=2$; erit 2^q-q-1 numerus omnium combinationum poſſibilium. E. gr. Si numerus quantitatum 5, erit numerus combinationum poſſibilium $2^5-6=32-6=26$.

PROBLEMA 75.

187. *Dato numero quantitatum, invenire numerum omnium variationum, quas quantitates omnibus modis poſſibilibus combinatæ ac permutatæ ſubire poſſunt.*

Sint quantitates duæ *a* & *b*, erunt variationes permutationum 2 (§. 107), conſequenter cum earum quælibet etiam cum ſeipſa combinari poſſit, iſtis addendæ adhuc ſunt variationes 2. Ergo numerus omnium eſt, $2 + 2 = 4$. Quod ſi tres fuerint & exponens variationis 2, combinationes erunt 3, & permutationes 9, (§. 107), quibus ſi addas combinationes tres uniuscujusque quantitatis cum ſeipſa *aa, bb, cc*; habebis numerum variationum $3 + 3 + 3 = 9$.

Eodem modo patet, ſi quantitates fuerint quatuor & exponens 2, numerum variationum fore 16; ſi quinque, 25 &c. & in genere ſi n, n^2.

Sint quantitates tres & exponens variationis 3; reperitur numerus variationum $27 = 3^3$, nempe *aaa, aab, aba, baa, abb, aac, aca, caa, abc, bac, bca, acb, cab, cba, acc, cac, cca, bba, bab, bbb, bbc, cbb, bcb, bcc, cbc, ccb, ccc.*

Nec abſimili modo conſtabit, ſi quantitates fuerint quatuor & exponens 3, fore numerum variationum $64 = 4^3$; & in genere, ſi fuerit qnantitatum numerus $= n$, exponens 3, fore numerum varia
tionum n^3.

Quodſi ita progredi libuerit, r
perietur tandem, ſi quantitatu
numerus fuerit n, & exponens
fore numerum variationum n^n.

Quare ſi antecedentes omne
addas, ubi exponens minor; r
perietur numerus omnium vari
tionum poſſibilium $n^n + n^{n-1} + n^{n}$
$+ n^{n-3} + n^{n-4} + n^{n-5} + n^{n-6}$ &c. d
nec numerus ex n ſubtractus r
linquat 1, quia initium fit a quan
titatibus ſingulis ſemel poſitis.

Cum adeo numerus omnium v
riationum poſſibilium ſit progre
ſio geometrica, cujus terminus p
mus ſeu minimus n^1, maximus n
denominator n (§. 300. *Arithm.*
94. *Analyſ.*); erit is $= (n^{n+1} - n$
$(n-1)$; *vi* §. 101.

Sit e. gr. $n = 4$, erit numerus vari
tionum poſſibilium $(4^5 - 4) : (4 - 1)$
$1020 : 3 = 340$, Sit $n = 24$, erit n
merus omnium variationum poſſib
lium $(24^{25} - 24) : (24 - 1) = 32009$
586444068189867779
$48272600 : 23 = 1391724$
$8888725299942512849 34$
2200. Tot ergo modis 24 literæ i
ter ſe componi poſſunt.

C

CAP. II.

DE ALGEBRA AD PROBLEMATA ARITHMETICA INDETERMINATA APPLICATA.

PROBLEMA 76.

188. *Invenire duos numeros, quorum ſumma una cum facto eorundem æquatur numero dato.*

Sit numerus datus $= a$, quæſitorum unus $= x$, alter $= y$: erit per conditionem problematis

$$xy + x + y = a$$

$$xy + x = a - y$$

$$x = (a-y):(y+1)$$

Sit $a = 30$, $y = 2$: erit $x = (30-2):(2+1) = 28:3 = 9\frac{1}{3}$. Sit $a = 20$, $y = 2$: erit $x = (20-2):(2+1) = 18:3 = 6$. Sit $a = 19$, $y = 4$: erit $x = (19-4):(4+1) = 15:5 = 3$.

Aliter.

Sit numerus datus $= a$ quæſitorum unus $= x + y$ alter $= x - y$ (§.), erit per conditionem problematis

$$x^2 - y^2 + 2x = a$$

$$x^2 + 2x = y^2 + a$$

$$1 \quad 1 \quad (\text{§. } 121.)$$

$$x^2 + 2x + 1 = y^2 + a + 1$$

$$x + 1 = \sqrt{(y^2 + a + 1)}$$

$$x = \sqrt{(y^2 + a + 1)} - 1$$

Unde apparet, ut ex $y^2 + a + 1$ radix extrahi poſſit, $a + 1$ eſſe debere differentiam duorum quadratorum.

E. gr. Sit $a = 19$, $y = \frac{1}{2}$; erit $x = \sqrt{(\frac{1}{4} + 19 + 1)} - 1 = \sqrt{\frac{81}{4}} - 1 = \frac{9}{2} - 1 = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$. Ergo $x + y = 3\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4$ & $x - y = 3\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 3$. Sit $a = 20$, $y = 2$; erit $x = \sqrt{(4 + 20 + 1)} - 1 = \sqrt{25} - 1 = 5 - 1 = 4$. Ergo $x + y = 4 + 2 = 6$ & $x - y = 4 - 2 = 2$.

PROBLEMA 77.

189. *Invenire quatuor numeros ejus conditionis, ut ſumma primi & ſecundi æquetur tertio, differentia vero primi & ſecundi quarto.*

Sit munerus primus $= x$, ſecundus $= y$; tertius $= z$, quartus $= t$, erit per conditiones problematis

$$y + x = z \qquad x - y = t$$

$$x = z - y \qquad x = t + y$$

Quare (§. 79. *Arithm.*)

$$t + y = z - y$$

$$t + 2y = z$$

 $2y =$

$$2y = z - t$$

$$y = (z - t) : 2$$

Ergo $x = (z - t) : 2 + t = (z + t) : 2$.

Unde apparet, ſi numeri integri deſiderentur, pro z & t aſſumi debere vel numeros pares vel impares: nequaquam alterum parem, alterum imparem (§. 63. 65.).

Sit $z = 8$, $t = 2$: erit $y = (8-2) : 2 = 6 : 2 = 3$ & $x = (8+2) : 2 = 4 + 1 = 5$. Similiter ſit $z = 5$, $t = 1$: erit $x = (5+1) : 2 = 3$ & $y = (5-1) : 2 = 2$.

PROBLEMA 78.

190. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut unusquisque cum partibus ſuis aliquotis efficiat unam ſummam.*

Sit unus $= mx$, alter $= ny$; erit per conditionem problematis

$$1 + m + mx + x = 1 + n + ny + y$$

$$mx + x = 1 + n + (n+1)\,y - (1+m)$$

$$m = (1 + n + (n+1)y - 1 - m) : (m+1)$$

Apparet ergo, $1 + n$ denotare ſummam partium aliquotarum denominatoris multipli ipſius y, & $1 + m$ ſummam partium aliquotarum denominatoris multipli ipſius x: poſſe autem non modo y, ſed & utrumque denominatorem pro arbitrio aſſumi ſed ut y ſit numerus impar.

Sit e. gr. $m = 1$, $n = 2$, $y = 3$. Erunt partes aliquotæ ipſius $1\,n$ & 2, ipſius m antum 1: conſequenter $x = 2 + 1 + (2+1)y - 1 = 2 + 3y = 2 + 9 = 11$. Sit $m = 4$, $n = 8$, $y = 13$: erit $1 + n = 1 + 2 + 4 + 8$ & $1 + m = 1 + 2 + 4$, conſequenter $x = (1 + 2 + 4 + 8 + (1 + 2 + 4 + 8)y - 1 - 2 - 4) = (1 + 2 + 4) = (8 + 15y) : 7 = (8 + 195) : 7 = 203 : 7 = 29$.

PROBLEMA 79.

191. *Invenire duos numeros, quorum ſumma æquatur quadrato minoris.*

Sit numerus major $= x$, minor $= y$: erit per conditionem problematis.

$$x + y = y^2$$

$$x = y^2 - y = (y-1)y$$

Unde apparet, numerum majorem eſſe factum ex minore in eundem minorem unitate mulctatum.

Sit $y = 3$; erit $x = 2 . 3 = 6$. Sit $y = 5$; erit $x = 4 . 5 = 20$. Sit $y = 9$; erit $x = 8 . 9 = 72$.

PROBLEMA 80.

192. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut ſumma quadratorum æquetur cubo minoris.*

Sit numerus major $= x$, minor $= y$: erit per conditionem problematis

$$x^2 + y^2 = y^3$$

$$x^2 = y^3 - y^2 = y^2 (y-1)$$

$$x = y\,V(y-1)$$

Appa-

Apparet adeo, pro y aſſumendum eſſe numerum, qui unitate quadratum excedit, hoc eſt, quadratum quodlibet unitate auctum.

E gr. Sit $y = 5$, erit $x = 5\sqrt{(5-1)} = 5\sqrt{4} = 5 \cdot 2 = 10$. Sit $y = 17$, erit $x = 17\sqrt{(17-1)} = 17\sqrt{16} = 17 \cdot 4 = 68$.

PROBLEMA 81.

193 *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut factum æquale ſit cubo, cujus radix facto ex numero primo in quadratum ſecundi æquatur.*

Sit numerus primus $= x$, ſecundus $= y$, radix cubica $= v$, erit per conditiones problematis

$$v = xy^2 \qquad xy = v^3$$
$$v : y^2 = x \qquad x = v^3 : y$$
$$v : y^2 = v^3 : y$$
$$\overline{\qquad\qquad} \; y^2$$
$$v = yv^3$$
$$\overline{\qquad\qquad} \; : v$$
$$1 = yv^2$$
$$1 : v^2 = y$$

Ergo $x = v^3 : \frac{1}{v^2} = v^5$

Sit $v = 2$, erit $x = 32$, $y = \frac{1}{4}$. Sit $v = 3$, erit $x = 243$, $y = \frac{1}{9}$.

PROBLEMA 82.

194. *Invenire duos numeros, quorum quadrata differunt quadrato.*

Sit numerus unus $= x + y$, alter $= x - y$: erit per conditionem problematis,

$$x^2 + 2xy + y^2$$
$$x^2 - 2xy + y^2 \quad \text{ſubt.}$$
$$4xy = v^2$$
$$\overline{\qquad\qquad} \; : 4y$$
$$x = v^2 : 4y$$

Patet adeo, pro y aſſumendum eſſe numerum, per cujus quadruplum dividi poteſt quadratum aliquod.

Sit e. gr. $v^2 = 16$, $y = 1$: erit $x = 16 : 4 = 4$. Ergo $x + y = 4 + 1 = 5$ & $x - y = 4 - 1 = 3$. Sit $v^2 = 36$, $y = 3$: erit $x = 36 : 12 = 3$. Ergo $x + y = 6$ & $x - y = 0$. Sit $v^2 = 36$, $y = 9$: erit $x = 36 : 36 = 1$. Ergo $x + y = 10$ & $x - y = 8$.

PROBLEMA 83.

195. *Summam duorum quadratorum in duo alia quadrata dividere.*

Sit latus quadrati majoris $= a$, minoris $= b$. Sit porro latus quadrati unius ex quæſitis minus quam a, adeoque $a - z$; erit quadrati alterius latus majus quam b. Poterat itaque dici $y - b$. Enimvero ut in calculo irrationalitas evitetur, rectius id nuncupatur $yz - b$. Quare per conditionem problematis

$$a^2 - 2az + z^2 + y^2z^2 - 2byz + b^2 = a^2 + b^2$$
$$z^2 + y^2z^2 - 2az - 2byz = 0$$
$$z + y^2z - 2a - 2by = 0$$

$$y^2z+z=2a+2by \quad | \; y^2+1$$

$$z=(2a+2by):(y^2+1).$$

Sit e. gr. $a=3$, $b=2$, $y=2$: erit $z=(6+8):(4+1)=14:5=2\frac{4}{5}$. Ergo $a-z=3-2\frac{4}{5}=\frac{15}{5}-\frac{14}{5}=\frac{1}{5}$ & $yz-b=\frac{28}{5}-2=\frac{28}{5}-\frac{10}{5}=\frac{18}{5}=3\frac{3}{5}$.

PROBLEMA 84.

196. *Invenire duos quadratos numeros, qui differunt numero dato.*

Sit latus quadrati minoris $=x$, majoris $=y+x$, differentia quadratorum $=d$: erit quadratum majus $=x^2+2xy+y^2$, minus $=x^2$ conſequenter per conditionem problematis

$$2xy+y^2=d$$

$$2xy=d-y^2 \quad | \; 2y$$

$$x=(d-y^2):2y$$

Unde apparet, pro y aſſumi debere numerum, qui ſit minor quam $\sqrt{d}$.

Sit e. gr. $d=10$, $y=3$: erit $x=(10-9):6=\frac{1}{6}$ & $x+y=3+\frac{1}{6}=\frac{19}{6}$. Sit $d=11$, $y=1$: erit $x=(11-1):2=10:2=5$ & $x+y=5+1=6$. Sit $d=48$, $y=4$: erit $x=(48-16):8=6-2=4$ & $x+y=4+4=8$.

PROBLEMA 85.

197. *Numerum datum dividere in duos alios, quorum factum eſt numerus quadratus.*

Sit numerus datus $=2a$, differentia $=2y$: erit major $a+y$, minor $a-y$ (§. 5.), factum $=aa-yy$. Ut calculus ab irrationalitate liberetur, pro latere quadrati aſſumendus eſt valor, quem ingreditur y & qui diverſis gaudet ſignis. Sit ergo $=xy-a$: erit per conditionem problematis

$$aa-y^2=a^2-2axy+x^2y^2$$

$$-y^2=-2axy+x^2y^2 \quad | \; y$$

$$-y=2ax+x^2y$$

$$2ax=x^2y+y \quad | \; x^2+1$$

$$2ax:(x^2+1)=y$$

Sit e. gr. $2a=10$, $x=2$: erit $y=20:(4+1)$ $20:5=4$. Ergo $a+y==5+4=9$; $a-y=5-4=1$. Sit $2a=10$, $x=3$: erit $y=30:(9+1)=30:10=3$.

PROBLEMA 86.

198. *Datum numerum dividere in duos numeros, quorum differentia eſt numerus quadratus,*

Sit numerus datus $=a$, quæſitorum major $=x$, minor $=y$: erit per conditiones problematis.

$$x+y=a \qquad x-y=v^2$$

$$x=a-y \qquad x=v^2+y$$

$$a-y=v^2+y$$

$$a=v^2+2y$$

$a-v^2$

$$x - v^2 = 2y$$

$$(a - v^2) : 2 = y$$

Pro v^2 itaque aſſumendus eſt numerus quadratus, qui ex numero dato a ſubductus parem relinquit.

Sit e. gr. $a = 40$, $v^2 = 16$; erit $y = (40-16) : 2 = 24 : 2 = 12$. Ergo $x = 40-12 = 28$. Sit $a = 40$, $v^2 = 4$; erit $y = (40-4) : 2 = 36 : 2 = 18$. Ergo $x = 40-18 = 22$. Sit $a = 35$, $v^2 = 9$; erit $y = (35-9) : 2 = 26 : 2 = 13$ & $x = 35 - 13 = 22$.

PROBLEMA 87.

199. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut unus additus quadrato alterius efficiat numerum quadratum, cujus radix æquatur ſummæ numerorum.*

Sit numerus unus $= x$, alter $= y$: erit per conditionem problematis

$$x^2 + y = x^2 + 2xy + y^2$$

$$y = 2xy + y^2 \qquad y$$

$$1 = 2x + y$$

$$1 - y = 2x$$

$$(1-y) : 2 = x$$

Numeri adeo quæſiti unitate minores, conſequenter fracti eſſe debent.

Sit $y = \frac{1}{2}$; erit $x = (1-\frac{1}{2}) : 2 = \frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$. Sit $y = \frac{1}{3}$; erit $x = (1-\frac{1}{3}) : 2 = \frac{2}{3} : 2 = \frac{1}{3}$. Sit $y = \frac{1}{4}$; erit $x = (1-\frac{1}{4}) : 2 = \frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{8}$.

PROBLEMA 88.

200. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut differentia ipſorum habeat ad differentiam quadratorum rationem datam.*

Sit numerus major $= x$, minor $= y$, ratio data $= a : b$; erit per conditionem problematis

$$x - y : x^2 - y^2 = a : b$$

$$ax^2 - by^2 = bx - by \qquad x-y$$

$$ax + ay = b \qquad a$$

$$x + y = b : a$$

$$x = b : a - y$$

Sit $b : a = 9$, $y = 4$; erit $x = 5$. Vel ſit $y = 3$; erit $x = 6$.

PROBLEMA 89.

201. *Invenire numerum, qui ſi multiplicetur per duos numeros datos, quadrata duo producat.*

Sit numerus datus unus $= a$, alter $= b$, quæſitus $= x$, erit per conditiones problematis.

$$ax = y^2 \qquad a \qquad\qquad bx = v^2 \qquad b$$

$$x = y^2 : a \qquad\qquad x = v^2 : b$$

$$y^2 : a = v^2 : b \qquad a$$

$y^2 =$

$$y^2 = av^2 : b$$

$$y = vV(a:b)$$

Quodſi ergo numerus rationalis deſideretur, $a:b$ quadratum eſſe debet.

Sit $a=32$, $b=8$; erit $V(a:b)=2$. Sit porro $v=5$, erit $y=10$, conſequenter $x=\frac{25}{8}$.

PROBLEMA 90.

202. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut, ſi unus quadrato alterius addatur, ſumma ſit latus quadrati aggregato numerorum æquale.*

Sit numerus unus x, alter $=y$; erit

$$x^2+y=V(x+y)$$

$$x^4+2yx^2+y^2=x+y.$$

$$x^4+2x^2y-y+yy=x$$

$$yy+(2x^2-1)y=x-x^4$$

$$x^4-x^2+\tfrac{1}{4} \qquad x^4-x^2+\tfrac{1}{4}$$

$$yy+(2x^2-1)y+(x^2-\tfrac{1}{2})^2=x-x^2+\tfrac{1}{4}$$

$$y+x^2-\tfrac{1}{2}=V(x+\tfrac{1}{4}-x^2)$$

$$y=V(x+\tfrac{1}{4}-x^2)+\tfrac{1}{2}-x^2$$

Quodſi numerus rationalis deſideratur; $\frac{1}{4}+x-x^2$ numerus quadratus eſſe debet. Sit itaque hujus latus ob rationes in probl. 83. (§. 195) allatas $=zx-\frac{1}{2}$; erit

$$z^2x^2-zx+\tfrac{1}{4}=\tfrac{1}{4}+x-x^2$$

$$z^2x^2-zx=x-x^2$$

$$z^2x-z=1-x$$

$$z^2x+x=1+z$$

$$x=(1+z):(z^2+1)$$

Sit $z=2$, erit $x=(1+2):(4+1)=\frac{3}{5}$, conſequenter $y=\frac{1}{2}-\frac{9}{25}+V(\frac{3}{5}+\frac{1}{4}-\frac{9}{25})=\frac{25-18}{50}+V\frac{(60+25-36)}{100}=\frac{7}{50}+V(49:100)=\frac{7}{50}+\frac{7}{10}=\frac{7+35}{50}=\frac{42}{50}=\frac{21}{25}$.

PROBLEMA 91.

203. *Invenire duos numeros quadratos ejus conditionis, ut, ſi unus addatur facto eorundem, aggregatum utrumque ſit numerus quadratus.*

Sit numerus quadratus unus $=x^2$, alter $=x^2y^2$. Quare $x^2y^2+x^2$ & $x^2y^2+y^2$ ſunt numeri quadrati; conſequenter & y^2+1 & x^2+1 ſunt numeri quatrati; numerus enim quadratus efficit quadratum, ſi in quadratum ducitur. Sit latus quadrati primi $z-y$; ſecundi $t-x$: erit

$$y^2+1=z^2-2zy+y^2 \qquad x^2+1=t^2-2tx+x^2$$

$$1=z^2-2zy \qquad 1=t^2-2tx$$

2zy

$2zy = z^2 - 1$ $\quad 2tx = t^2 - 1$

$y = (z^2-1) : 2z \quad x = (t^2-1) : 2t$

Sit $z = 2, t = 3$; erit $y = (4-1) : 4 = \frac{3}{4}$ & $x = (9-1) : 6 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$. Sit $z = 3, t = 4$; erit $y = (9-1) : 6 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ & $x = (16-1) : 8 = \frac{15}{8}$.

PROBLEMA 92.

204. *Invenire duos numeros quadratos ejus conditionis, ut ſumma addita facto efficiat quadratum.*

Sit quadratus numerus unus $= x^2$, alter $= y^2$: erit $x^2y^2 + x^2 + y^2$ numerus quadratus. Quoniam vero $x^2 y^2 + x^2 = x^2(y^2+1)$; fiat primum $y^2 + 1$ æquale quadrato, cujus latus $t-y$, nempe

$$t^2 - 2ty + y^2 = y^2 + 1$$

$$t^2 - 2ty = 1$$

$$t^2 - 1 = 2ty$$

$$(t^2-1) : 2t = y$$

Ponatur porro $V(y^2+1) = t-y = t - (t^2+1) : 2t = (t^2+1) : 2t = v$; erit $x^2 y^2 + x^2 + y^2 = v^2x^2 + y^2$. Atque adeo problema præſens reductum eſt ad caſum ſimilem præcedentis. Sit ergo quadrati, cui $v^2x^2 + y^2$ æquale eſſe debet, latus $= z - vx$, erit

$$v^2x^2 + y^2 = z^2 - 2zvx + v^2x^2$$

$$y^2 = z^2 - 2zvx$$

$$2zvx = z^2 - y^2$$

$$x = (z^2 - y^2) : 2zv$$

Hic valores z & t pro lubitu determinari poſſunt.

Sit e. gr. $z = 2, t = 3$; erit $y = (9-1) : 6 = 8 : 6 = \frac{4}{3}$ & hinc $v = t - y = 3 - \frac{4}{3} = \frac{9-4}{3} = \frac{5}{3}$, conſequenter $x = (4 - \frac{16}{9}) : \frac{4 \cdot 5}{3} = \frac{(36-16)}{9} : \frac{20}{3} = \frac{20}{9} : \frac{20}{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

PROBLEMA 93.

205. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut, ſi factum addatur aggregato quadratorum, numerus quadratus prodeat.*

Sit ſumma numerorum quæſitorum $= 2x$, differentia $= 2y$, erit major $x+y$, minor $x-y$ (§. 5.). Sit latus quadrati $t+y$; erit per conditionem problematis,

$$x^2 + 2xy + y^2$$
$$x^2 - 2xy + y^2$$
$$x^2 \quad - y^2$$

$$3x^2 + y^2 = t^2 + 2ty + y^2$$

$$3x^2 = t^2 + 2ty$$

$$3x^2 - t^2 = 2ty$$

$$(3x^2 - t^2) : 2t = y$$

Sit $x = 4, t = 6$, erit $y = (48-36)$:

$12 = 12 : 12 = 1$, conſequenter $x + y = 4 + 1 = 5$, $x - y = 4 - 1 = 3$.

PROBLEMA 94.

206. *Invenire duos numeros quadratos, quorum ſumma eſt numerus quadratus.*

Sint numeri quadrati quæſiti x^2 & y^2; latus quadrati, cui iſti junctim ſumti æquantur $vx - y$: erit

$$x^2 + y^2 = v^2 x^2 - 2vxy + y^2$$

$$x^2 = v^2 x^2 - 2vxy$$

$$x = v^2 x - 2vy$$

$$2vy = v^2 x - x$$

$$2vy : (v^2 - 1) = x$$

Sit $v = 2, y = 3$; erit $x = 12 : (4 - 1) = 12 : 3 = 4$.

PROBLEMA 95.

207. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut, ſi unus ducatur in cubum alterius, productum ſit numerus quadratus.*

Sint duo numeri x & y: erit per conditionem problematis $x y^3$, conſequenter etiam xy numerus quadratus. Habemus ergo

$$xy = z^2$$

$$x = z^2 : y$$

Pro z itaque aſſumendum eſt quadratum per y diviſibile, ſi numeri integri deſiderentur.

Sit e. gr. $z = 6, y = 3$; erit $x = 36 : 3 = 12$.

PROBLEMA 96.

208. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut, ſi factum quadratorum addatur facto ex cubo unius in alterum, ſumma ſit numerus quadratus.*

Sit numerus unus $= x$, alter $= y$ erit $xy^3 + x^2 y^2$, conſequenter & $xy + x^2$ numerus quadratus. Ponatur latus hujus quadrati $= yv - x$: erit

$$xy + x^2 = y^2 v^2 - 2xyv + x^2$$

$$xy = y^2 v^2 - 2xyv \qquad y$$

$$x = yv^2 - 2xv$$

$$2xv + x = yv^2$$

$$x = yv^2 : (2v + 1)$$

Sit e. gr. $y = 6, v = 1$: erit $x = 6 : 3 = 2$. Sit $y = 15$, $v = 2$: erit $x = 15 . 4 : (4 + 1) = 15 . 4 : 5 = 3 . 4 = 12$.

PROBLEMA 97.

209. *Invenire duos numeros, quorum unus ſubductus ex facto eorundem relinquat cubum.*

Sit numerus unus x, alter y: erit per conditionem problematis

$$xy - y = v^3$$

$$y = v^3 : (x - 1)$$

Aſſumendus ergo eſt cubus, qui ſit per x-1 diviſibilis.

E. gr.

E. gr. Sit $x = 6$, $v = 10$; erit $y = 1000 : 5 = 200$. Sit $x = 3$, $v = 6$; erit $y = 216 : 2 = 108$.

PROBLEMA 98.

210. *Invenire duos numeros, quorum unus in quadratum alterius ductus cubum efficit.*

Sit numerus unus y, alter x; erit per conditionem problematis

$$yx^2 = z^3x^3 : v^3$$
$$\overline{}\, x^2$$
$$y = z^3x : v^3$$
$$yv^3 = z^3x$$
$$\overline{}\, z^3$$
$$yv^3 : z^3 = x$$

Si adeo numeri integri deſiderantur, aſſumendus eſt valor ipſius y per cubum aliquem z^3 diviſibilis, ſeu cubi multiplus.

Sit e. gr. $y = 16$, $v = 3$, $z = 2$; erit $x = 16.\ 27 : 8 = 2.\ 27 = 54$.

PROBLEMA 99.

211. *Numerum datum in duas partes dividere, ita ut earundem factum æquale ſit cubo radice ſua multato.*

Sit numerus datus $= a$, pars una $= x$; erit altera $= a - x$. Sit latus cubi, cui factum partium $ax - x^2$ æquatur, $yx - 1$: erit cubus $= y^3x^3 - 3y^2x^2 + 3yx - 1$, unde ſi ſubtrahatur $yx - 1$, relinquitur

$$y^3x^3 - 3y^2x^2 + 2yx = ax - x^2$$
$$\overline{}\, x$$
$$y^3x^2 - 3y^2x + 2y = a - x$$
$$y^3x^2 - 3y^2x + x = a - 2y$$

Facile jam apparet, ſi valor ipſius x rationalis deſideretur, fieri debere $2y = a$: quo facto erit

$$\frac{a^3x^2}{8} - \frac{3a^2x}{4} + x = 0$$
$$\overline{}\, 8$$
$$a^3x^2 - 6a^2x + 8x = 0$$
$$\overline{}\, x$$
$$a^3x - 6a^2 + 8 = 0$$
$$a^3x = 6a^2 - 8$$
$$\overline{}\, a^3$$
$$x = (6a^2 - 8) : a^3$$

Apparet adeo, ſi numeri rationales deſiderentur, problema ex indeterminato fieri determinatum.

Sit $a = 6$, erit $x = (216 - 8) : 216 = 208 : 216 = 1\frac{26}{27}$ & $a - x = 6 - \frac{26}{27} = \frac{162 - 26}{27} = \frac{136}{27}$.

PROBLEMA 100.

212. *Invenire numerum perfectum, hoc eſt, omnibus ſuis partibus aliquotis æqualem.*

Sit numerus quæſitus $y^n x$, ut nempe in partes aliquotas ſeu factores reſolvi poſſit: erunt partes ejus aliquotæ $1 + y + y^2 + y^3$ &c. donec exponens evadat $= n$, & x

 $+ yx$

$+yx+y^2x+y^3x$ &c. donec itidem exponens fiat $=n$. Quamobrem ex natura numeri perfecti

$$1+y+y^2+y^3 \text{ \&c. } +x+yx +y^2x+y^3x \text{ \&c. } = y^n x$$

$$1+y+y^2+y^3 \text{ \&c. } = y^n x - x - yx - y^2x - y^3x \text{ \&c.}$$

$$\frac{1+y+y^2+y^3 \text{ \&c.}}{y^n - 1 - y - y^2 - y^3 \text{ \&c.}} = x$$

Jam ut x ſit numerus integer, nec in caſu ſpeciali, ſi y per numerum explicetur, numerus partium aliquotarum diverſus ſit a numero earundem in formula generali; neceſſe eſt ut $y^n - 1 - y - y^2 - y^3$ &c. $= 1$: quod cum non alio in caſu contingat, niſi cum $y=2$ (§. 102), erit $x = 1+2+2^2$ & 2^3 &c. $= 1+2+4+8$ &c. & numerus perfectus $2^n x$. Quare problema, quod ſpeciem indeterminati mentiebatur, determinatum eſt.

Si $n=1$, erit $x=1+2=3$, conſequenter numerus perfectus $2^n x = 6$. Si $n=2$, erit $x=1+2+4=7$, conſequenter $2^n x = 28$. Si $n=3$, erit $x=1+2+4+8=15$, conſequenter $2^n x = 120$.

SCHOLION.

213. *Problemata indeterminata, qualia plurima ſolvit* Diophantus, *difficiliora ſunt determinatis, niſi ſimplicia fuerint. Unde tyrones ſub initium ea prætermittere poſſunt, quæ difficultatem creant, ad ſubſequentia pedem promoventes. Non tamen prorſus negligenda ſunt, cum maximus eorum ſæpe ſit uſus in problematibus Geometriæ ſublimioris ſolvendis. Cæterum ars reſolvendi problemata indeterminata numerica* Analyſis Diophantea *appellari ſolet.*

CAP. III.

DE ALGEBRA AD GEOMETRIAM ELEMENTAREM APPLICATA.

PROBLEMA 101.

214. *Problema Geometricum Algebraice reſolvere.*

RESOLUTIO.

1. Obſerventur ea omnia, quæ in probl. 32. (§. 119) fieri præcepimus.

2. Cum vero rariſſime ad æquationem eodem modo in problematis geometricis perveniatur, quo in numericis uſi ſumus; hic ulterius quædam peculiaria notanda ſunt. Nempe

a) Concipiatur jam factum, quod ad faciendum proponitur.

b) O-

β) Omnium linearum in ſchemate depictarum relationes, nullo habito diſcrimine inter cognitas & incognitas, excutiantur, ut appareat, quomodo aliæ ab aliis dependeant, ſeu quibus datis, aliæ una dentur, ſive per triangula ſimilia (§. 166. *Geom.*), ſive per rectangula (§. 394. *Geom.*), ſive per alia (quod tamen raro fieri ſolet) theoremata.

γ) Ut igitur triangula ſimilia & rectangula obtineas, ſæpius producendæ ſunt lineæ, donec vel directe, vel indirecte datis fiant æquales, vel alias ſecent, ſæpius lineæ parallelæ atque perpendiculares ducendæ, ſæpius puncta quædam connectenda, ſæpius anguli datis æquales conſtruendi: quæ fieri poſſe, ex Geometria elementari manifeſtum eſt. Eum in finem probe tenenda ſunt theoremata de æqualitate angulorum & ſimilitudine triangulorum (§. 150. 173. 190. 196. 222. 252. 253. 254. 314. *Geom.*).

δ) Quodſi in æquationem non ſatis concinnam incideris: alio adhuc modo excutiendæ ſunt linearum relationes, ac interdum ſufficit, non directe quærere eam, quæ quæritur, ſed aliam, qua data ipſa quoque innoteſcit.

3. Reductione æquationis facta, ex ultima, quæ prodit, elicienda eſt conſtructio Geometrica variis quidem modis pro diverſitate æquationum.

SCHOLION.

215. *Quoniam nunc tantum ſimpliciſſimos regulæ Algebræ caſus exemplis geometricis illuſtramus; ſuffecerit nobis oſtendiſſe, quomodo æquationes ſimplices & quadraticæ conſtruantur.*

PROBLEMA 102.

216. *Æquationem ſimplicem conſtruere.*

RESOLUTIO.

Omne artificium in eo conſiſtit, ut fractiones, quibus quantitas incognita æqualis, in terminos proportionales reſolvantur: id quod exemplis rectius oſtenditur, quam multis regulis docetur.

1. Sit nempe $x = \frac{ab}{c}$; erit $c : a = b : x$ (§. 372. *Arithm.*). Reperietur adeo x (§. 256. *Geom.*)

2. Sit $x = \frac{abc}{dc}$, fiat $d : a = b : \frac{ab}{d}$. Hæc quarta proportionalis inventa (§. 256. *Geom.*) dicatur g; erit $x = \frac{gc}{e}$: quæ adeo ut in caſu primo invenitur.

3. Sit $x = \frac{aa-bb}{e}$. Quoniam $aa-bb$

$= (a+b)(a-b)$, (§. 73); erit $c : a+b = a-b : x$ (§. 272. *Arithm.*).

4. Sit $x = \frac{a^2b - bcc}{ad}$. Invenitur *per caſum* 1. $g = \frac{ab}{d} = \frac{a^2b}{ad}$ & $h = \frac{bc}{d}$, ut ſit $\frac{bcc}{ad} = \frac{hc}{d}$; denique *per caſum* 1. $i = \frac{hc}{d}$: erit $x = g - i$, differentia nempe linearum g & i.

5. Sit $x = \frac{ab}{c} + \frac{adc}{be}$. Inveniatur ut in caſu præcedente $g = \frac{ab}{c}$ & $f = \frac{adc}{be}$: erit $x = g + f$, ſumma linearum g & f.

6. Sit $x = \frac{a^2b + bcd}{af + cg}$. Quæratur $\frac{cg}{a}$ & fiat $f + \frac{cg}{a} = b$; erit $af + cg = ab$, conſequenter $x = \frac{a^2b + bcd}{ab}$. Reductus adeo eſt caſus præſens ad quintum.

7. Sit $x = \frac{a^2b - bad}{af + bc}$. Quæratur $\frac{af}{b}$ & fiat $\frac{af}{b} + c = h$, erit $af + bc = bh$. Hinc $x = \frac{a^2b + bad}{bh} = \frac{a^2 - ad}{h}$, conſequenter $h : a = a - d : x$.

8. Sit $x = (a^2 + b^2) : c$ Conſtruatur triangulum ABC, cujus crus $AB = a$, $BC = b$, (§. 170. *Geom.*); erit $AC = \sqrt{(a^2 + b^2)}$, (§. 394. *Geom.*). Dicatur $AC = m$, erit $a^2 + b^2 = m^2$, adeoque $x = \frac{m^2}{c}$, conſequenter $c : m = m : x$. Tab. I. Fig. 3.

9. Sit $x = \frac{a^2 - b^2}{c}$. Super $AB = a$ deſcribatur ſemicirculus & in eo applicetur $AC = b$. Cum triangulum ACB ſit rectangulum (§. 302. *Geom.*); erit $CB = \sqrt{(a^2 - b^2)}$, (§. 394. *Geom.*). Dicatur $CB = m$: erit $x = \frac{m^2}{c}$, conſequenter $c : m = m : x$. Tab. I. Fig. 4.

10. Sit $x = \frac{a^2b + bcd}{af + bc}$. Inferatur $b : a = f : \frac{fa}{b}$ & fiat $\frac{fa}{b} + c = h$: erit $bc + af = bh$. Hinc $x = \frac{a^2b + bcd}{bh} = (a^2 + cd) : h$. Quæratur inter $AC = c$ & $CB = d$ media proportionalis $CD = \sqrt{cd}$, (§. 312. *Geom.*). Fiat $CE = a$; erit $DE = \sqrt{(a^2 - cd)}$. Dicatur hæc m; erit $x = \frac{m^2}{h}$, conſequenter $h : m = m : x$. Tab. I. Fig. 5.

PROBLEMA 103.

217. *Æquationem quadraticam geometrice conſtruere.*

RE-

RESOLUTIO.

Cum æquationes quadraticæ ad ſimplices reduci poſſint (§.121.); ipſas quoque *per probl.* præced. (§. 216.) conſtruere licet.

Tab. I. Fig. 5. Si enim æquatio pura $x^2 = ab$; erit $a : x = x : b$, (§. 269. *Arithm.*). Invenitur adeo $x = V\,ab$, ſi inter AC $= a$ & BC $= b$ quæratur media proportionalis DC (§. 312. *Geom.*) Si æquatio affecta $x^2 \,.\, ax = .\, b^2$; erit $x = \frac{1}{2}a \,.\, V(\frac{1}{4}a^2 \,.\, b^2)$, hoc eſt, vel $x = \frac{1}{2}a + V(\frac{1}{4}a^2 + b^2)$, vel $x = V(\frac{1}{4}a^2 + b^2) - \frac{1}{2}a$, vel $x = \frac{1}{2}a + V(\frac{1}{4}a^2 - b^2)$, vel $x = \frac{1}{2}a - V(\frac{1}{4}a^2 - b^2)$ Omne igitur artificium conſtruendi has æquationes huc redit, ut inveniatur valor ipſius $V(\frac{1}{4}a^2 + b^2)$, itemque ipſius $V(\frac{1}{4}a^2 - b^2)$. Utrumq; vero jam docuimus in problemate præcedente. Tab. I. Fig. 3. Nimirum ſi in triangulo rectangulo fiat AB $= \frac{1}{2}a$ & BC $= b$; erit AC $= V(\frac{1}{4}a^2 + b^2)$ (§. 394. *Geom.*). Fig. 4. Sed ſi ſuper AB $= \frac{1}{2}a$, deſcribatur ſemicirculus & in eo applicetur AC $= b$; erit CB $= V(\frac{1}{4}a^2 - b^2)$ ut in problemate præcedente demonſtratum.

SCHOLION.

218. *Quamvis omnes æquationes ſimplices & quadraticæ eum in modum conſtrui poſſint, quo eas conſtruere docuimus: minime tamen conſultum eſt, ut iis ſtricte inhæreamus. Hac enim ratione in conſtructiones parum commodas ſæpe incideremus, cum ſingulares problematis ſpecialis circumſtantiæ multo concinniorem meditanti inſinuent. Immo in genere notandum eſt; ex calculo analytico difficillime erui conſtructiones concinnas, cum tamen in iis unice ingenium ſpectetur, ſolutione arithmetica ad praxin ſufficiente. Ratio hæc eſt, quod in algebraica ſolutione problema tanquam unicum in rerum poſſibilium regione conſideretur, independens ab omnibus reliquis, cum tamen ex veterum methodo appareat & ipſa ratio ſuadeat, ſolutionem unius a ſolutione alterius pendere.*

PROBLEMA 104.

219. *Data perimetro* AB + BC + CA *& area trianguli rectanguli, invenire hypothenuſam.* Tab. I. Fig. 3.

Sit AB + BC + CA $= a$ AC $= x$
area $= b^2$ erit BC + BA $= a - x$

Jam cum ſit AC^2 = AB^2 + BC^2 (§. 394. *Geom.*) & AB^2 + BC^2 = (AB + BC)^2 - 2AB. BC (§. 240. *Arithm.*): erit AC^2 = (AB + BC)^2 - 2AB. BC (§. 79. *Arithm.*). Eſt vero AC^2 = x^2 & (AB + BC)$^2 = a^2 - 2ax + x^2$, 2AB. BC $= 4b^2$ (§. 375. *Geom.*). Quare

$$x^2 = a^2 - 2ax + x^2 - 4b^2$$

$$2ax = a^2 - 4b^2$$

$$x = \tfrac{1}{2}a - 2b^2 : a$$

Quamvis valor ipſius x *per probl.* 102. (§. 216) facile inveniatur; conſultius tamen eſt, ut ex æquatione ſecunda eruatur, quæ in hanc reſolvitur analogiam:

$$2a : a + 2b = a - 2b : x$$

ſeu $a : \frac{1}{2}a + b = a - 2b : x$ (§. 172. *Arithm.*). Habetur adeo x *per probl.* 21. *Geom.* (§. 256) & una

Theo-

Theorema. In omni triangulo rectangulo eſt, ut perimeter dupla ad aggregatum ex perimetro & duplo quadrati latere, quod triangulo æquale, ita differentia hujus lateris dupli a perimetro ad hypothenuſam.

SCHOLION.

220. *Cum areas figurarum in Geometria metiamur inveſtigando earum rationem ad quadratum aliquod datum* (§. 114. Geom.); *ideo quoque tum in Geometria, tum in Algebra dantur per latus quadrati ipſis æquale.*

PROBLEMA 105.

Tab. I. Fig. 3. 221. *Data area trianguli rectanguli, cujus latera* AC, AB *&* BC *in proportione continua; invenire latera.*

Sit area $=a^2$ BC $=x$, AB $=xy$, erit AC $=xy^2$

Ergo

(§. 375. *Geom.*)

$$x^2y^4=x^2y^2+x^2$$
$$y^4=y^2+1$$
$$y^4-y^2=1$$
$$\tfrac{1}{4}\quad\tfrac{1}{4}$$
$$y^4-y^2+\tfrac{1}{4}=\tfrac{5}{4}$$
$$y^2-\tfrac{1}{2}=\sqrt{\tfrac{5}{4}}$$
$$y^2=\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{5}{4}}$$
$$y=\sqrt{(\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{5}{4}})}$$

(§. 394. *Geom.*)

$$2a^2=xy$$
$$2a^2=x^2\sqrt{(\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{5}{4}})}$$
$$2a^2:\sqrt{(\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{5}{4}})}=x^2$$
$$\sqrt{(2a^2:\sqrt{(\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{5}{4}})})}=x$$

Patet adeo rationem laterum eſſe conſtantem.

PROBLEMA 106.

222. *Datam rectam* AB *media & extrema ratione ſecare in C, hoc eſt, ut ſit* AB : AC = AC : CB. Tab. I. Fig. 6.

Sit AB $=a$, AC $=x$; erit CB $=a-x$, conſequenter per conditionem problematis

$$a:x=x:a-x$$
$$x^2=a^2-ax$$
$$x^2+ax=a^2$$
$$x^2+ax+\tfrac{1}{4}a^2=\tfrac{5}{4}a^2$$
$$x+\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$$
$$x=\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}-\tfrac{1}{2}a$$

Conſtructio. 1. Jungantur AB $=a$ & BD $=\frac{1}{2}a$ ad angulos rectos; erit AD $=\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$. 2. Fiat DF $=\frac{1}{2}a$ & AF $=$ AC; erit AC $=x$.

Alia ex æquatione tertia elicitur conſtructio. Nimirum radio AC $=$ Tab. I. Fig. 7.
$\frac{1}{2}a$ deſcribatur circulus & in A erigatur perpendicularis $=a$. Si enim porro ducatur BD per centrum C; erit ED $=a$ & BE $=x$. Quare ſi fiat BF $=$ BE: recta AB erit in F media & extrema ratione ſecta. Et enim BD $=a+x$, adeoque BE . BD $=ax+x^2$, conſequenter $ax+x^2=a^2$ (§. 361. *Geom.*).

PROBLEMA 107.

223. *Rectam datam* AC *utcunque divi-*

diviſam in B *iterum ſecare in* D, *ita ut ſit* AD : DC = DC:BD.

Sit AB $= a$ BD $= x$
BC $= b$ erit DC $= b - x$
AD $= a + x$

Quare per conditionem problematis

$$a + x : b - x = b - x : x$$

$$ax + x^2 = b^2 - 2bx + x^2$$

$$ax + 2bx = b^2$$

$$x = b^2 : (a + 2b)$$

Invenitur adeo x ob analogiam

$$a + 2b : b = b : x$$

per probl. 21. *Geom.* (§. 256).

Aliter.

Analogia prima, ex qua æquatio elicitur, etiam per leges rationum ad eam reduci poteſt, a qua conſtructio pendet. Quoniam enim

$$a + x : b - x = b - x : x$$

erit $a + b : b - x = b : x$ (§. 181 *Arithm.*)

$a + b : b = b - x : x$ (§. 164. *Arithm.*)

$a + 2b : b = b : x$ (§. 181. *Arithm.*

PROBLEMA 108.

Tab. I. Fig. 8. 224. *Datam rectam* AC *diviſam in* B *denuo ſecare in* D, *ita ut ſit* CB : DB = DA : AB.

Sit CB $= a$ DB $= x$
BA $= b$ erit DA $= b + x$

Quare per conditionem problematis

$$a : x = b + x : b$$

$$ab = bx + x^2$$

$$\tfrac{1}{4}b^2 \quad \tfrac{1}{4}b^2 \quad (§. 121).$$

$$\tfrac{1}{4}b^2 + ab = \tfrac{1}{4}b^2 + bx + x^2$$

$$V(\tfrac{1}{4}b^2 + ab) = \tfrac{1}{2}b + x$$

$$V(\tfrac{1}{4}b^2 + ab) - \tfrac{1}{2}b = x$$

Conſtructio Inter EG $= b$ & GF $= a$ quæratur media proportionalis HG, quæ erit $= Vab$. Fiat GI $= \tfrac{1}{2}b$ & ducatur HI: erit HI $= V(\tfrac{1}{4}b^2 + ab)$. Fiat denique KI = GI; erit KH $= V(\tfrac{1}{4}b^2 + ab) - \tfrac{1}{2}b$. Invenitur etiam $V(\tfrac{1}{4}bb + ab)$, ſi inter $\tfrac{1}{4}b + a$ & b quæratur media proportionalis (§. 312. *Geom.*). Tab. I. Fig. 9

Item quia $\tfrac{1}{4}bb + ab$ eſt differentia quadratorum $\tfrac{1}{4}bb + ab + a^2$ & a^2, ſuper AB $= \tfrac{1}{2}b + a$ deſcribatur ſemicirculus & in eo applicetur AC $= a$; erit CB $= V(\tfrac{1}{4}bb + ab)$, (§. 394. *Geom.*). Tab. I. Fig. 4.

DEFINITIO 18.

225. Si quatuor fuerint *lineæ* proportionales, extremæ mediis, mediæ extremis *reciprocæ* dicuntur.

PROBLEMA 109.

226. *Datam rectam* AB *ita ſecare in*

Tab. I. Fig. 10. *re in C, ut partes* AC *&* CB *ſint duabus datis* DE *&* FG *reciprocæ.*

Sit AB $= a$ AC $= x$
DE $= b$ CB $= a - x$
FG $= c$

Ergo (§. 225).

$$x : b = c : a - x$$

$$ax - x^2 = cb$$

$$-cb = x^2 - ax$$

$$\tfrac{1}{4}aa \qquad \tfrac{1}{4}aa \quad (\text{§. } 121).$$

$$\tfrac{1}{4}aa - cb = \tfrac{1}{4}a^2 - ax + x^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}a - cb)} = \tfrac{1}{2}a - x$$

$$x = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - cb)}$$

Conſtructio. Quæratur inter HI $= b$ & IK $= c$ media proportionalis MI $= \sqrt{cb}$ (§. 312. *Geom.*) Radio IL $= \frac{1}{2}a$ deſcribatur arcus & ducatur PM ipſi IK parallela (§. 243. *Geom.*), erit NM $= x$ & MP $= a - x$. Nam demiſſo ex centro L perpendiculo LO, erit NO $=$ OP (§. 276. *Geom.*) & OL $=$ MI $= \sqrt{cb}$ (§. 215. *Geom.*). Sed NL $=$ LI (§. 38. *Geom.*) $= \frac{1}{2}a$. Ergo NO $= \sqrt{(\frac{1}{4}aa - cb)}$ (§. 394. *Geom.*), conſequenter ob MO $=$ IL (§. 223. *Geom.*) $= \frac{1}{2}a$; MN $= \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}aa - cb)} = x$ & PM $= \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa - ab)} = a - x$. (Tab. I. Fig. 10.)

COROLLARIUM.

Tab. I. Fig. 11. 227. Conſtruere ergo æquationem quadraticam affectam $ax - x^2 = cb$ idem eſt, ac datis duabus rectis c & b, vel, ſi $c = b$, eidem rectæ b reciprocas x & $a - x$ invenire.

PROBLEMA 110.

228. *Datis duabus rectis* DE *&* FG *reciprocas invenire, quarum differentia ſit datæ rectæ* AC *æqualis.* Tab. I. Fig. 10.

Sit DE $= a$ Reciproca minor $= x$
FG $= b$ erit major $= c + x$
AC $= c$

Ergo (§. 225.)

$$x : a = b : c + x$$

$$ab = cx + x^2$$

$$\tfrac{1}{4}cc \qquad \tfrac{1}{4}cc$$

$$\tfrac{1}{4}cc + ab = \tfrac{1}{4}cc + cx + x^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + ab)} = \tfrac{1}{4}c + x$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + ab)} - \tfrac{1}{2}c = x$$

Conſtructio. Quæratur inter AC $= b$ & CB $= a$ media proportionalis DC. Fiat CE $= \frac{1}{2}c$: erit DE $= \sqrt{(\frac{1}{4}cc + ab)}$. Unde ſi ſubtrahitur $\frac{1}{2}c =$ EF, relinquitur DF $= x$. Tab. I. Fig. 5.

Alia magis ingenioſa ex æquatione $ab = cx + x^2$ eruitur. Deſcribatur nimirum ex centro C radio arbitrario, majori tamen quam c & $a - b$, circulus. In eo applicentur chordæ IQ $= c$ & IP $= a - b$. Prolongetur PI in O donec PO $= b$. Tandem radio CO deſcribatur circulus priori concentricus: erit

HI $=$

$HI = x$. Demiſſa enim ex centro C perpendiculari CL; erit $LI = LQ$ & $LH = LM$ (§. 276. *Geom.*), adeoque $QM = IH$ (§. 83. *Arithm.*). Eodem modo oſtenditur, eſſe $NI = PO = b$. Ergo $NI.IO = ab$, conſequenter $ab = QM.QH = HI.(c + HI)$, (§. 363. *Geom.*). Eſt vero etiam $ab = x\,(c + x)$. Ergo $HI = x$.

Tab. I. Fig. II.

Sint omnia ut ante, & pars major $= x$, erit minor $x - c$, conſequenter (§. 225.)

$$x : a = b : x - c$$

$$x^2 - cx = ab.$$

Conſtructio. Eadem eſt, quæ præcedens. Sed hic $QH = x$, ita enim $HI = QM = x - c$, conſequenter $NI.NO = ab$ & $QH.QM = x^2 - cx$.

COROLLARIUM.

229. Conſtruere ergo æquationes quadraticas $x^2 + cx = ab$ & $x^2 - cx = ab$ idem eſt ac datis duabus rectis a & b, vel, ſi $a = b$, eidem rectæ b reciprocas ibi x & $x + c$, hic x & $x - c$ reperire.

PROBLEMA III.

Tab. I. Fig. 10.

230. *Datam rectam* AB *ita ſecare in* C *ut rectangulum ſub tota* AB *& ſegmento minore* AC *æquale ſit rectangulo ſub majore* CB *& differentia utriusque* CB-AC.

Sit $AB = a$ $AC = x$

erit $CB = a - x$

$CB - AC = a - 2x$

Quare per conditionem problematis

$$ax = a^2 - 3ax + 2x^2$$

$$-a^2 = -4ax + 2x^2 \quad 2$$

$$-\tfrac{1}{2}a^2 = x^2 - 2ax$$

$$a^2 \qquad a^2$$

$$\tfrac{1}{2}a^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}a^2} = a - x$$

$$x + \sqrt{\tfrac{1}{2}a^2} = a$$

$$x = a - \sqrt{\tfrac{1}{2}a^2}$$

Conſtructio. Quæratur inter $\tfrac{1}{2}a$ & a media proportionalis, quæ erit pars major $a - x$, adeoque ſubducta ex a relinquit minorem x.

Aliter.

Quoniam per conditionem problematis.

$$ax = (a - x)(a - 2x)$$

erit (§. 104). $a : a - 2x = a - x : x$

$$2a - 2x : a = a : a - x$$

$$2$$

$$a - x : \tfrac{1}{2}a = a : a - x$$

$$\tfrac{1}{2}a : a - x = a - x : a$$

SCHOLION.

231. *His reſolutionibus per analogias & reductionibus æquationum quadraticarum ad lineas reciprocas opus eſt, ſi geometricas more veterum mediteris demonſtrationes.*

 Con-

PROBLEMA 112.

232. *Dato radio circuli* ED, *invenire latus trigoni regularis ipſi inſcribendi* AB.

Tab. I. Fig. 13. n. 1. Ducatur latus hexagoni EB, & ſit BD = EB (§. 338. *Geom.*) = a, AB = x; erit BF = $\frac{1}{2}x$ (§. 276. *Geom.*) Et quoniam anguli ad F recti (*per* §. *cit.*) BE = BD, *per demonſtr.* BF = BF (§. 73. *Arithm.*); erit EF = FD (§. 394. *Geom.*) = $\frac{1}{2}a$. Quare (*per* §. *cit.*) $BD^2 - BF^2 = FB^2$, hoc eſt,

$$\frac{3}{4}aa = \frac{1}{4}x^2$$

4

$$3aa = x^2$$

$$\sqrt{3aa} = x$$

Eſt ergo x media proportionalis inter $3a$ & a. Et ſi fiat $a = 1$, erit $= x$ $\sqrt{3}$.

Tab. I. Fig. 13. n. 2. *Conſtructio* concinnior hæc eſt: ſuper diametro AB conſtruatur triangulum æquilaterum AFB & centrum C cum puncto F connectatur recta CF; erit CF latus trigoni. Cum enim FCB ſit triangulum rectangulum (§. 175. *Geom.*) & FB = $2a$, CB = a; erit FC = $\sqrt{3aa}$ (§. 394. *Geom.*) = x.

Theorema. Quadratum lateris trigoni eſt ad quadratum radii ut 3 ad 1.

Aliter

$$\frac{3}{4}aa = \frac{1}{4}x^2$$

$$\frac{3}{4}a : \frac{1}{4}x = x : a$$

$$3a : x = x : a$$

COROLLARIUM 1.

233. Si dato latere trigoni regularis b inveniri debet radius circuli circumſcribendi y; erit $3y^2 = b^2$, conſequenter $y = \sqrt{\frac{1}{3}b^2}$ quæ eſt media proportionalis inter $\frac{1}{3}b$ & b.

COROLLARIUM 2.

234. Quoniam dimidium latus trigoni regularis eſt ſinus 60° (§. 2. *Trigon.*); per problema præſens invenitur ſinus 60°.

SCHOLION.

235. *Hujus problematis ſolutio uſum potius reſpicit arithmeticum, quam geometricum. Geometrica enim conſtructio ex Elementis facilior & elegantior deducitur.*

PROBLEMA 113.

236. *Dato radio circuli* AE *invenire latus octogoni regularis circulo inſcribendi.* Tab. I. Fig. 17.

Sit AE = r, AF = y; erit latus quadrati AB = $\sqrt{2r^2}$ (§. 21. *Trig.*) & AG = $\sqrt{\frac{1}{2}r^2}$. Porro cum AEF = 45° (§. 336. *Geom.*), erit quoque EAG = 45° (§. 226. *Geom.*), conſequenter EG = AG (§. 238. *Geom.*) = $\sqrt{\frac{1}{2}r^2}$. Hinc FG = $r - \sqrt{\frac{1}{2}r^2}$. Quare (§. 394. *Geom.*)

$$yy = \tfrac{1}{2}r^2 + 1\tfrac{1}{2}r^2 - r\sqrt{2r^2}$$

hoc eſt $yy = 2r^2 - r\sqrt{2r^2}$

$$y = \sqrt{(2r^2 - r\sqrt{2r^2})}$$

Quod ſi fiat $r = 1$; erit $y = \sqrt{(2 - \sqrt{2})}$.

PRO-

PROBLEMA 114.

Tab. I. Fig. 14. 237. *Dato radio circuli AC, invenire latus decagoni regularis inſcribendi AB.*

Quoniam AB eſt $\frac{1}{10}$ totius peripheriæ, angulus ACB = 36° (§. 39. 57. *Geom.*); conſequenter ob AC = BC (§. 38. *Geom.*), ABC = CAB = 72° (§. 233. *Geom.*), adeoque DAC = 108. (§. 142. *Geom.*). Fiat AD = AC, erit ADC = ACD = 36° (§. 233. *Geom.*), conſequenter DCB = 72°. Sunt ergo triangula ABC & BDC æquiangula & hinc BD : BC = BC : AB (§. 252. *Geom.*).

Sit jam AC = BC = a, AB = x; erit BD = $a + x$, conſequenter *per demonſtrata*

$$a + x : a = a : x$$

$$ax + x^2 = a^2$$

Eſt ergo a media & extrema ratione ſecanda, cujus pars major x (§. 222.). Vel radio a quærendæ ſunt reciprocæ $a + x$ & x (§. 229.).

Theorema. Latus decagoni regularis circulo inſcripti eſt pars major radii media & extrema ratione ſecti. Tab. I.

Fig. 15. *Conſtructio.* Quoniam $x = V\frac{5}{4}a^2 - \frac{1}{2}a$ (§. 222); radio a deſcribatur circulus & in centro E erigatur perpendicularis IE = a. Fiat EF = $\frac{1}{2}a$: erit FI = $V\frac{5}{4}a^2$. Quare ſi ex F radio IF deſcribatur arcus KI; erit KE = $V\frac{5}{4}a^2 - \frac{1}{2}a$.

SCHOLION.

238. *Hanc ipſam conſtructionem tradit* Ptolemæus *in ſuo Almageſto.*

COROLLARIUM.

239. Invenitur ergo per problema præſens ſinus 18° (§. 2. *Trigon.*).

PROBLEMA 115.

240. *Dato latere decagoni regularis circulo inſcribendi AB, invenire radium AC.* Tab. I. Fig. 14.

Sit AB = a, AC = x; erit BD = $a + x$ & *per demonſtrata in probl. præc.*

$$a + x : x = x : a$$

$$ax + a^2 = x^2$$

$$a^2 = x^2 - ax$$

$$\frac{5}{4}a^2 = x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2$$

$$V\frac{5}{4}a^2 = x - \frac{1}{2}a, \text{ ob } x > \frac{1}{2}a \text{ (§. 237).}$$

$$\frac{1}{2}a + V\frac{5}{4}a^2 = x.$$

Conſtructio. Conſtruatur triangulum rectangulum MLN, in quo ML = a & MN = $\frac{1}{2}a$: erit LN = $V\frac{5}{4}a^2$. (§. 394. *Geom.*). Producatur MN in O, donec NO = LN: erit MO = x. Ex centro itaque O per M circulus deſcribi poteſt. Tab. I. Fig. 16.

Aliter.

$$a + x : x = x : a$$

$$a : x = x - a : a.$$

Quærendæ adeo ſunt ipſi a reciprocæ x & $x - a$.

PROBLEMA 116.

Tab. I. Fig. 17. 241. *Dato radio circuli* AE *& latere decagoni* AF *invenire latus pentagoni* AB.

Sit AE $= a$ AB $= x$
AF $= b$ AG $= \frac{1}{2}x$ (§. 276. *Geom.*)
GE $= V(a^2 - \frac{1}{4}x^2)$
FG $= a - V(a^2 - \frac{1}{4}x^2)$

Quare (§. 394. *Geom.*)

$$b^2 = \tfrac{1}{4}x^2 + a^2 - 2a\,V(a^2 - \tfrac{1}{4}x^2) + a^2 - \tfrac{1}{4}x^2$$

$$b^2 = 2a^2 - 2a\,V(a^2 - \tfrac{1}{4}x^2)$$

$$2a\,V(a^2 - \tfrac{1}{4}x^2) = 4a^2 - b^2$$

$$4a^2(a^2 - \tfrac{1}{4}x^2) = 4a^4 - 4a^2b^2 + b^4$$

$$4a^4 - a^2x^2 = 4a^4 - 4a^2b^2 + b^4$$

$$-a^2x^2 = -4a^2b^2 + b^4$$

$$4a^2b^2 - b^4 = a^2x^2$$

$$4b^2 - b^4 : a^2 = x^2$$

Eſt vero $b = V\frac{5}{4}a^2 - \frac{1}{2}a$ (§ 222)
$b^2 = \frac{5}{4}a^2 - a\,V\frac{5}{4}a^2$
$b^4 = \frac{14}{4}a^4 - 3a^3\,V\frac{5}{4}a^2$

Ergo $x^2 = \frac{24}{4}a^2 - 4a\,V\frac{5}{4}a^2 - (\frac{14}{4}a^4 + 3a^3\,V\frac{5}{4}a^2) : a^2 = \frac{24}{4}a^2 - 4a\,V\frac{5}{4}a^2 - \frac{14}{4}a^2 + 3a\,V\frac{5}{4}a^2 = \frac{10}{4}a^2 - a\,V\frac{5}{4}a^2 = a^2 + \frac{6}{4}a^2 - a\,V\frac{5}{4}a^2 = a^2 + b^2$.

Tab. I. Fig. 15. *Conſtructio*: Quæratur latus decagoni EK (§. 222.), erit KI latus pentagoni.

Theorema. Latus pentagoni regularis poteſt latera hexagoni & decagoni eidem circulo inſcriptorum.

SCHOLION.

242. *Eandem prorſus conſtructionem dedit* Ptolemæus.

COROLLARIUM.

243. Per præſens adeo problema inveniri poteſt ſinus 36° (§. 2. *Trigon.*)

PROBLEMA 117.

244. *Datis ſumma crurum trianguli rectanguli* AB + BC *una cum perpendiculo* BD *ex angulo recto* B *in hypothenuſam* AC *demiſſo, invenire latera.* Tab. I. Fig. 3.

Sit AB + BC $= a$, BD $= b$, AB − BC $= y$, AC $= x$, erit AB $= \frac{1}{2}(a + y)$, BC $= \frac{1}{2}(a - y)$ conſequenter

(§. 394. *Geom.*)

$$x^2 = \tfrac{1}{2}(aa + yy)$$

$$2x^2 = aa + yy$$

$$2x^2 - a^2 = y^2$$

(§. 314. *Geom.*)

BA : BD = AC : BC

$$\tfrac{1}{2}(a + y) : b = x : \tfrac{1}{2}(a - y)$$

$$\tfrac{1}{4}(a^2 - y^2) = bx$$

$$a^2 - y^2 = 4bx$$

$$a^2 - 4bx = y^2$$

Quare (§. 79. *Arithm.*)

$$2x^2 - a^2 = a^2 - 4bx$$

$$2x^2 + 4bx = 2a^2$$

$$x^2 + 2bx = a^2$$

$x^2 +$

$$x^2 + 2bx + b^2 = a^2 + b^2$$

$$x = V(a^2 + b^2) - b$$

Conſtructio nihil difficultatis habet.

PROBLEMA 118.

Tab. I. Fig. 18. 245. *Datis pro triangulo rectangulo* BAC *hypothenuſa* BC *&* *differentia crurum* DC, *invenire crura.*

Sit BC $= c$, DC $= f$, $\frac{1}{2}$ (AB + AC) $= x$; erit AC $= x + \frac{1}{2}f$, AB $= x - \frac{1}{2}f$ (§. 5), conſequenter (§. 394. *Geom.*).

$$2x^2 + \tfrac{1}{2}f^2 = c^2$$

$$2x^2 = c^2 - \tfrac{1}{2}f^2$$

$$x^2 = \tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}f^2$$

$$x = V(\tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}f^2)$$

Conſtructio. Conſtruatur rectangulum triangulum AFE, in quo AF $=$ FE $= \frac{1}{2}c$; erit AE $= V\frac{1}{2}cc$. Super AE deſcribatur ſemicirculus ob AF $=$ FE tranſiturus per F & in eo applicetur EG $= \frac{1}{2}b$; erit AG $= x$, conſequenter ſi fiat DG $=$ GC $=$ GE, crus majus AC, minus AB $=$ AD.

PROBLEMA 119.

Tab. I. Fig. 19. 246. *In dato circulo aptare rectam datam* KL, *quæ producta tranſeat per datum punctum* H *tangentis* HI.

Sit LK $= m$, HI $= n$, LH $= y$; erit (§. 361. *Geom.*).

$$y^2 + my = n^2$$
$$\tfrac{1}{4}m^2 \quad \tfrac{1}{4}m^2$$

$$y^2 + my + \tfrac{1}{4}m^2 = \tfrac{1}{4}m^2 + n^2$$

$$y + \tfrac{1}{2}m = V(\tfrac{1}{4}m^2 + n^2)$$

$$y = V(\tfrac{1}{4}m^2 + n^2) - \tfrac{1}{2}m$$

Conſtructio. In puncto tangentis I erigatur perpendicularis MI $= \frac{1}{2}m$; erit HM $= V(\frac{1}{4}m^2 + n^2)$. Fiat NM $=$ MI $= \frac{1}{2}m$; erit HN $= x$. Quare ſi ex centro H radio HN deſcribatur arcus LN; erit L punctum, per quod recta HK ducenda, ut LK ſit chorda in circulo aptanda.

PROBLEMA 120.

247. *Datis duobus quadratis invenire duo alia reciproca, quorum ſumma æquatur quadrato dato.*

Sint quadrata data bb, cc, dd, quæſita yy & $dd-yy$. Erit per conditionem problematis

$$yy : bb = cc : dd-yy$$

$$ddy^2 - y^4 = bbcc$$

$$y^4 - ddy^2 + \tfrac{1}{4}d^4 = \tfrac{1}{4}d^4 - bbcc$$

$$\tfrac{1}{2}dd - y^2 = V(\tfrac{1}{4}d^4 - bbcc)$$

$$y^2 = \tfrac{1}{2}dd - V(\tfrac{1}{4}d^4 - bbcc)$$

$$y = V[\tfrac{1}{2}dd - V(\tfrac{1}{4}d^4 - bbcc)]$$

Conſtructio. Quæratur ad AB $= d$, AC $= b$

Tab. I. Fig. 20. AC $= b$ & BD $= c$ quarta proportionalis CE $= bc : d$. Deſcribatur ſemicirculus ſuper CF $= \frac{1}{2} d$ & in eo applicetur CG $=$ CE; erit FG $= \sqrt{(\frac{1}{4} d^4 - bbcc)} : d$. Fiat HC $= d$ & CI $\frac{1}{2} d - \sqrt{(\frac{1}{4} d^4 - bbcc)} : d$; erit media proportionalis CK $= y$. Denique ſuper CH $= d$ deſcribatur ſemicirculus & in eo applicetur CL $=$ CK, erit LH $= \sqrt{(d^2 - y^2)}$ latus alterius quadrati quæſiti.

PROBLEMA 121.

248. *Datis duobus quadratis invenire duo alia reciproca, quorum differentia æquatur quadrato dato.*

Sint quadrata data ff, gg, hh, quæſita yy & $hh + yy$. Erit per conditionem problematis

$$yy : ff = gg : hh + yy$$

$$y^4 + hhyy = ffgg$$
$$\tfrac{1}{4}h^4 \qquad \tfrac{1}{4}h^4$$

$$y^4 + hhyy + \tfrac{1}{4}h^4 = ffgg + \tfrac{1}{4}h^4$$

$$y^2 + \tfrac{1}{2}hh = \sqrt{(ffgg + \tfrac{1}{4}h^4)}$$

$$y^2 = -\tfrac{1}{2}hh + \sqrt{(ffgg + \tfrac{1}{4}h^4)}$$

$$y = \sqrt{(-\tfrac{1}{2}hh + \sqrt{(ffgg + \tfrac{1}{4}h^4)})}.$$

Conſtructio eadem fere, quæ problematis præcedentis.

PROBLEMA 122.

Tab. II. Fig. 21. n. I. 249. *Datis tribus lateribus trianguli cujuscunque* HL, LI *&* IH, *invenire altitudinem* ML.

Sit HL $= c$, LI $= d$, HI $= g$, HM $= z$, erit MI $= g - z$. Quare (§. 394. *Geom.*) bis invento valore ipſius ML^2

$$cc - zz = dd - gg + 2gz - zz$$

$$cc = dd - gg + 2gz$$

$$cc - dd = 2gz - gg$$

$$cc + gg - dd = 2gz$$

$$\frac{cc + gg - dd}{2g} = z$$

Geometrica conſtructio non deſideratur, utpote ex elementis manifeſta; ſed tantum regula arithmetica.

COROLLARIUM.

250. Vi æquationis tertiæ $dd - cc = gg - 2gz$. Sed $gg - 2zg$ eſt diffentia inter zz & $gg - 2zg + zz$. Ergo in omni triangulo differerentia quadratorum crurum HL & LI æquatur differentiæ quadratorum ſegmentorum baſis HM & MI.

PROBLEMA 123.

Ta[b.] I[I.] Fi[g.] 2[2.] 251. *Triangulo dato* HLI *æquale & alteri dato* NOP *ſimile conſtruere.*

Sit HI $= f$, LM $= e$, NP $= m$, QO $= n$, baſis trianguli quæſiti $= y$, altitudo $= z$: erit

(§.

(§. 378. *Geom.*) (§. 375. *Geom.*)

$$m : n = y : z \qquad fe = zy$$

$$mz = ny \qquad fe : y = z$$

$$mfe : y = mz$$

$$ny = mfe : y$$

$$ny^2 = mfe$$

$$y^2 = mfe : n$$

$$y = V(mfe : n)$$

Conſtructio. Producatur altitudo OQ trianguli NOP in M, donec altitudini alterius LM æqualis fiat. Producantur itidem crura trianguli in R & S, & per M agatur ipſi NP parallela: erit RS $= me : n$. Quæratur inter RS & SI $= f$ media proportionalis TS $= V(mfe : n)$ ſuper qua ob angulos N & P datos triangulum TSV conſtrui poteſt. (§. 249. *Geom.*).

Aliter.

$n : m = z : y \qquad f : z = y : e$

Fiat $n : m = e : r$

erit $z : y = e : r$ (§. 156. *Arithm.*)

Ergo $f : y = y : r$ (§. 184. *Arithm.*)

Eſt ergo y media proportionalis inter f & r, ſeu inter f & $em : n$, ut ante.

PROBLEMA 124.

Tab. II. Fig. 2. 252. *Ex angulo* C *rhombi dati* ABCD *ducere rectam* CG *lateri* AB *continuato occurrentem in* G, *ita ut* EG *ſit æqualis lineæ datæ.*

Sit AB $= b$, CB $= c$, EG $= d$, BG $= z$, CF $= y$: erit BF $= y - c$. BG : GE = AB : EC (§. 253. *Geom.*) unde reperitur EC $= bd : z$. Fiat angulus CEF = CBG, erit ob angulum communem C (§. 252. *Geom.*) CB : BG = CE : EF. Unde reperitur EF $= zbd : cz = bd : c$. Porro $o = x$ (§. 150. *Geom.*) & $x = u$ (§. 174. 320. *Geom.*). Ergo $o = u$ (§. 79. *Arithm.*), conſequenter CBG = EBF (§. 80. *Arithm.*) = CEF (§. 79. *Arithm.*). Ergo ob angulum communem F (§. 252. *Geom.*).

$$CF : FE = FE : BF$$

$$y : \frac{bd}{c} = \frac{bd}{c} : y - c$$

$$cy : bd = bd : cy - cc$$

$$ccy^2 - c^3y = bbdd$$

$$y^2 - cy = bbdd : cc$$

$$y^2 - cy + \tfrac{1}{4}cc = \tfrac{1}{4}cc + bbdd : cc$$

$$y - \tfrac{1}{2}c = V(\tfrac{1}{4}cc + bbdd : cc)$$

$$y = \tfrac{1}{2}c + V(\tfrac{1}{4}cc + bbdd : cc)$$

Ex æquatione prima ſtatim liquet, inveniendas eſſe ipſi $bd : c$ reciprocas y & $y - c$. Ex ultima autem hæc elicitur

Conſtructio: Fiat BM = EG $= d$ & ducatur LM ipſi AC parallela; erit LM $= bd : c$ (§. 253. *Geom.*) Dividatur BG bifariam in N & in C erigatur perpendicu-

 dicu-

dicularis CO = LM; erit ON = $\sqrt{(\frac{1}{4}cc + bbdd : cc)}$ (§. 394. *Geom.*). Tranſlata ergo ON ex N in F; erit CF = y. Denique cum EF = $bd : c$ = LM; ex puncto F intervallo EF determinetur punctum E.

PROBLEMA 125.

Tab. I. Fig. 23. 253. *A dato puncto* E *ducere rectam, quæ circulum datum tangat.*

Quia punctum E poſitione, circulus GDFG & poſitione & magnitudine datur; dantur etiam EG & GC. Sit itaque EG = a, GC = b, ED = x; erit EF = $a + 2b$ & (§. 361. *Geom.*)

$$aa + 2ab = x^2$$

$$\sqrt{(aa + 2ab)} = x$$

Conſtructio. Connectantur centrum circuli C & punctum datum E recta EC. Super ea deſcribatur ſemicirculus CDE ducanturque chordæ CD & DE; erit D rectus (§. 302. *Geom.*). Eſt vero CE² = $aa + 2ab + bb$, CD² = bb: ergo DE = $\sqrt{(2ab + aa)} = x$ (§. 394. *Geom.*).

PROBLEMA 126.

254. *Examinare regulam* Renaldinianam, *polygonum regulare quodcunque circulo inſcribendi.*

Regula *Caroli Renaldini* (e) hæc eſt. Dividatur diameter AB in tot partes æquales, in quot peripheria dividi debet. Super AB conſtruatur triangulum æquilaterum AFB. Ex F per ſecundum diviſionis punctum D ducatur recta FG. Erit ex ipſius mente BG latus polygoni. Tab. II. Fig. 24.

Falſitatem regulæ una inſtantia oſtendiſſe ſufficit.

Sit BG latus octogoni & fiat BH = BG; erit HG latus quadrati. Sit porro CB = 1, EG = x; erit CD = $\frac{1}{2}$, *per regulam* Renaldini, FC = $\sqrt{3}$ (§. 232). Quoniam angulus ad C rectus (§. 175. *Geom.*) & is ad E itidem rectus (§. 276. *Geom.*), præterea verticales ad D æquales (§. 150. *Geom.*); erit (§. 252. *Geom.*) FC : CD = EG : DE, hoc eſt, $\sqrt{3} : \frac{1}{2} = x : \frac{\frac{1}{2}x}{\sqrt{3}}$

Hinc CE = $\frac{\sqrt{3} + x}{2\sqrt{3}}$. Unde tandem ob CE² + EG² = CG² (§. 294. *Geom.*) reperitur

$$\frac{3 + 2x\sqrt{3} + x^2}{12} + x^2 = 1,$$

$$3 + 2x\sqrt{3} + 13x^2 = 12$$

$$2x\sqrt{3} + 13x^2 = 9$$

$\frac{2}{13}x$

(e) de Reſolutione & Compoſitione Mathematica lib. 2. f. 367.

$$\frac{2}{13} x\sqrt{3} + x^2 = \frac{9}{13}$$

$$\frac{3}{13.13} \qquad\qquad \frac{3}{13.13}$$

$$\frac{3}{13.13} + \frac{2}{13} x\sqrt{3} + x^2 = \frac{9}{13} + \frac{3}{13.13} = \frac{120}{13.13}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{13} + x = \frac{\sqrt{120}}{13} = \frac{2\sqrt{30}}{13}$$

$$x = \frac{2\sqrt{30} - \sqrt{3}}{13}$$

Foret adeo ſemilatus quadrati, ſi vera eſſet regula *Renaldini*, $(2\sqrt{30} - \sqrt{3}) : 13$. Sed idem ex veris principiis elicitur $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (§. 21. *Trigon.*) $= \sqrt{\frac{1}{2}}$: quod diverſum a *Renaldiniano* eſſe extractio radicis probat. Fallit ergo regula *Renaldini* in octogono, adeoque non univerſalis.

SCHOLION.

255. *Eodem prorſus modo oſtenditur, quod etiam fallat in aliis polygonis.*

PROBLEMA 127.

256. *Data diagonali pentagoni regularis* AD *invenire latus pentagoni* AE.

Sit AE $= x$, AD $= a$. Quoniam anguli AEC menſura eſt arcus AB (§. 299. *Geom.*) & ipſius EFA arcus AE (§. 301. *Geom.*), eſt vero AB $=$ AE (§. 315. *Geom.*); erit AEF $=$ AFE (§. 135. *Geom.*), conſequenter AF $=$ AE (§. 238. *Geom.*) $= x$, adeoque FD $=$
Tab. II. Fig. 25.

$a - x$. Porro anguli AED menſura eſt AB $+ \frac{1}{2}$BC & ipſius F menſura itidem AB $+ \frac{1}{2}$BC (§. 299. 301. *Geom.*) & angulus D utrique triangulo AED & EFD communis. Quare (§. 252. *Geom.*).

AD : ED $=$ ED : FD

$$a : x = x : a - x$$

$$a^2 - ax = x^2$$

$$a^2 = x^2 + ax$$

Eſt adeo x pars major ipſius a media & extrema ratione ſectæ (§. 222.).

COROLLARIUM.

257. Erit ergo ſubſtitutis a pro x d x pro $a = \frac{1}{2} x + \sqrt{\frac{5}{4} x^2}$. Unde patet, quomodo ex dato latere diagonalis inveniatur.

PROBLEMA 128.

258. *Invenire circulum ſuperficiei cylindri æqualem.*

Sit ratio radii ad peripheriam $r : p$; peripheria cylindri $= p$, altitudo a; erit ſuperficies $= ap$ (§. 480. *Geom.*). Sit radius circuli $= x$; erit $r : p = x : \frac{px}{r}$, quæ eſt ejusdem peripheria. Unde habemus (§. 406. *Geom.*).

$$px^2 : 2r = ap$$

$$\qquad\qquad 2r$$

$$px^2 = 2arp$$

$$\qquad\qquad p$$

$$x^2 = 2ar$$

$$x = \sqrt{2ar}$$

Theorema. Superficies cylindri æquatur circulo, cujus radius eſt medius proportionalis inter diametrum & altitudinem cylindri.

PROBLEMA 129.

259. *Invenire cylindrum, cujus ſuperficies ſit circulo dato æqualis.*

Sit circuli radius $= r$, peripheria $= p$, altitudo cylindri $= x$, radius baſis $= y$; erit peripheria ejus $py : r$ (§. 406. *Geom.*), conſequenter (§. 480. *Geom.*).

$$pyx : r = \tfrac{1}{4} pr \qquad r$$

$$pyx = \tfrac{1}{4} pr^2 \qquad p$$

$$yx = \tfrac{1}{4} r^2 \qquad y$$

$$x = r : 4y$$

Eſt adeo problema indeterminatum, ita ut radius pro arbitrio aſſumi poſſit vel, quod perinde eſt, altitudo.

PROBLEMA 130.

260. *Data diametro ſphæræ & altitudine cylindri ipſi æqualis, invenire diametrum cylindri.*

Sit diameter ſphæræ $= d$, altitudo cylindri $= a$, diameter ejus $= x$, erit ſoliditas illius $157d^3 : 300$ (§. 495. *Geom.*), hujus $314ax^2 : 400$ (§. 480. *Geom.*). Quare per conditionem problematis:

$$157d^3 : 300 = 314ax^2 : 400$$

$$4 \cdot 157d^3 : 3 = 314\, ax^2 \qquad 314a$$

$$628d^3 : 942a = 2d^3 : 3a = x^2$$

$$\sqrt{(2d^3 : 3a)} = x$$

Æquatio penultima in hanc analogiam

$$3a : 2d = d^2 : x^2$$

reſoluta ſequens ſuppeditat

Theorema: Quadratum diametri ſphæræ eſt ad quadratum diametri cylindri ipſi æqualis fere ut tripla cylindri altitudo ad diametrum ſphæræ duplam.

PROBLEMA 131.

261. *Data diametro ſphæræ* AB, *inuenire latus tetraëdri ipſi inſcribendi* AD. *Tab. II. Fig. 26.*

Sit diameter ſphæræ AB $= a$, latus tetraëdri AD $= x$, erit radius circuli, cui unum e triangulis tetraëdri inſcribi poteſt, $= \sqrt{\tfrac{1}{3} x^2}$ (§. 233). Sit AC $= y$, erit CB $= a-y$, conſequenter

(§. 312. *Geom.*)	(§. 394. *Geom.*)
AC:CD = CD:CB	$AD^2 = AC^2 + CD^2$
$y : \sqrt{\tfrac{1}{3} x^2} = \sqrt{\tfrac{1}{3} x^2} : a-y$	$x^2 = y^2 + \tfrac{1}{3} x^2$
$ay - y^2 = \tfrac{1}{3} x^2$	$\tfrac{2}{3} x^2 = y^2$
$ay - \tfrac{2}{3} x^2 = \tfrac{1}{3} x^2$	$\sqrt{\tfrac{2}{3} x^2} = y$
$ay = x^2$	

$a\sqrt{\tfrac{2}{3}}$

$aV \frac{2}{3} x^2 = x^2$

$\frac{2}{3} a^2 x^2 = x^4$

$\frac{2}{3} a^2 = x^2$

$V \frac{2}{3} a^2 = x$

Eſt ergo $x^2 : a^2 = 2 : 3$.

Theorema. Quadratum lateris tetraëdri eſt ad quadratum diametri ſphæræ, cui inſcribi poteſt, in ratione ſubſesqui altera.

COROLLARIUM 1.

262. Eſt ergo latus tedraëdri ad diametrum ſphæræ, cui inſcribitur, ut $V2$ ad $V3$, conſequenter huic incommenſurabile.

COROLLARIUM 2.

Tab. I. Fig. 27. 263. Porro quoniam $y^2 = \frac{2}{3} x^2 = \frac{2}{3} ay$, erit $y = \frac{2}{3} a$ patet tetraëdrum ſphæræ inſcribi, ſi diameter AB in tres partes æquales dividatur, fiatque AC $= \frac{2}{3}$AB.

PROBLEMA 132.

264. *Data diametro ſphæræ, invenire latus cubi ſeu hexaëdri ipſi inſcribendi* FG.

Tab. II. Fig. 28. Sit diameter ſphæræ, quæ diagonali cubi FH æquatur, $= a$, latus cubi $= x$; erit (§. 394. *Geom.*) $FI^2 = 2x^2$ & $FH^2 = 3x^2$, conſequenter

$3x^2 = a^2$

$x^2 = \frac{1}{3} a^2$

$x = V \frac{1}{3} a^2$

Theorema. Quadratum lateris hexaëdri eſt ad quadratum diametri ſphæræ circumſcriptæ in ratione ſubtripla.

COROLLARIUM 1.

265. Eſt ergo latus hexaëdri ad diametrum ſphæræ, cui inſcribitur, ut 1 ad $V3$ conſequenter huic incommenſurabile.

COROLLARIUM 2.

266. Sit in diametro ſphæræ AC $= \frac{2}{3} a$ & CB $= \frac{1}{3} a$; erit AD $= V \frac{2}{9} a^2$, conſequenter DB $= V \frac{1}{3} a^2$ ſeu latus hexaëdri. Tab. II. Fig. 27.

PROBLEMA 133.

267. *Data diametro ſphæræ, invenire latus octaëdri inſcripti* ML. Tab. II. Fig. 29.

Sit LM $= y$, diameter ſphæræ circumſcriptæ HL $= b$. Quoniam ML quadrantem ſubtendit; erit (§. 394. *Geom.*).

$\frac{2}{4} bb$ ſeu $\frac{1}{2} bb = x^2$

$V \frac{1}{2} b^2 = x$

Theorema. Quadratum lateris octaëdri eſt ad quadratum diametri ſphæræ circumſcriptæ in ratione ſubdupla.

COROLLARIUM. 1.

268. Eſt ergo latus tetraëdri ML ad diametrum ſphæræ circumſcriptæ ut 1 ad 2, adeoque huic incommenſurabile.

COROLLARIUM 3.

269. Si ex centro ſphæræ E erigatur perpendicularis EF, erit FA $V \frac{1}{2} b^2$ adeoque latus tetraëdri inſcribendi.

PROBLEMA 134.

Tab. II. Fig. 30. 270. *Data diametro ſphæræ, invenire latus dodecaëdri* AB.

Quoniam puncta A, C, F, H ſunt in ſphæra; planum per ea tranſiens eſt circulus, ut inferius in ſphæricis demonſtrabitur. Eſt vero AC $=$ CF $=$ HF $=$ HA (§. 169. *Geom.*) adeoque AHFC quadratum (§. 302 & 94. *Geom.*). Jam cum pentagona 12 in 36 triangula reſolvantur per lineas diagonales, quadratum vero AHFC nonniſi 6 ſubtendat; omnia iſta triangula a ſex quadratis ſubtendantur neceſſe eſt, conſequenter diagonalis AC eſt lateri hexaëdri eidem ſphæræ inſcripti æqualis.

Sit latus dodecaëdri AB $= x$, diameter ſphæræ $= d$, erit AC $= V\frac{1}{3}d^2$, (§. 264) conſequenter

$$V\tfrac{1}{3}d^2 : x = x : V\tfrac{1}{3}d^2 - x \quad (§. 256).$$

$$\tfrac{1}{3}d^2 - x\,V\tfrac{1}{3}d^2 = x^2$$

$$\tfrac{1}{3}d^2 = x^2 + x\,V\tfrac{1}{3}d^2$$

$$\tfrac{1}{12}d^2 \qquad\qquad \tfrac{1}{12}d^2$$

$$\tfrac{5}{12}d^2 = x^2 + x\,V\tfrac{1}{3}d^2 + \tfrac{1}{12}d^2$$

$$V\tfrac{5}{12}d^2 = x + V\tfrac{1}{12}d^2$$

$$V\tfrac{5}{12}d^2 - V\tfrac{1}{12}d^2 = x$$

h. e. $\tfrac{1}{2}V\tfrac{5}{3}d^2 - \tfrac{1}{2}V\tfrac{1}{3}d^2 = x$

Æquatio altera hoc ſuppeditat *Theorema*: Quadratum diametri ſphæræ æquatur rectangulo ex aggregato lateris dodecaëdri & hexaëdri eidem inſcriptorum in triplum latus dodecaëdri.

COROLLARIUM 1.

271. Si diameter ſphæræ fuerit 1, erit latus dodecaëdri inſcripti $(V\tfrac{5}{3} - V\tfrac{1}{3}) : 2$, conſequenter illa ad hanc, ut 2 ad $(V\tfrac{5}{3} - V\tfrac{1}{3})$ & quadratum illius ad quadratum hujus ut 4 ad $5 - V3$. Eſt ergo diameter ſphæræ lateri dodecaëdri inſcripti tum in ſe, tum potentia incommenſurabilis.

COROLLARIUM 2.

272. Latus dodecaëdri eſt portio major BG lateris hexaëdri DB eidem ſphæræ inſcripti media & extrema ratione ſecti in G. §. 222. Tab. II. Fig. 27.

PROBLEMA 135.

273. *Data diametro ſphæræ* HM *invenire latus icoſaëdri inſcripti.* Tab. II. Fig. 31.

Sit ABCDEA circulus ſubtendens angulum ſolidum icoſaëdri H; erit latus icoſaëdri æquale lateri pentagoni AB huic circulo inſcripti: Concipiatur eidem circulo inſcriptum decagonum regulare DKEFA &c. & alterum circulo alii, qui iſti parallelus & ab eo diſtat intervallo radii GC; erit DN $=$ DC (§. 241). Quodſi ergo anguli pentagonorum lineis tranſverſis DN, DI, EI &c. connectantur; decem prodibunt triangula æquilatera jun-

juncta decem aliis, quorum quinque a circulo ſuperiore, quinque ab inferiore ſubtenduntur.

Sit HM $= b$, HC $= x$, GC $= y$. Quoniam GC eſt latus hexagoni; erit HG latus decagoni (§. 241), adeoque $= \sqrt{\tfrac{5}{4}y^2} - \tfrac{1}{2}y$, *vi §. cit.* Habemus ergo

$$2\sqrt{\tfrac{5}{4}y^2} - y + y = b$$

h. e. $2\sqrt{\tfrac{5}{4}y^2} = b$

$$5y^2 = b^2$$

$$y^2 = \tfrac{1}{5}b^2$$

$$y = \sqrt{\tfrac{1}{5}b^2} = b : \sqrt{5}$$

$$x^2 = y^2 + \tfrac{5}{4}y^2 - y\sqrt{\tfrac{5}{4}y^2} + \tfrac{1}{4}y^2$$

$$x^2 = \tfrac{5}{2}y^2 - y\sqrt{\tfrac{5}{4}y^2}$$

$$x^2 = \tfrac{1}{2}b^2 - \sqrt{\tfrac{1}{20}b^4}$$

ſeu $\tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}b\sqrt{\tfrac{1}{5}b^2}$

$$x = \sqrt{(\tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}b\sqrt{\tfrac{1}{5}b^2})}$$

ab.
I.
ig.
7.
Conſtructio. Fiat AH $=$ AB $= b$, erit EH $= \sqrt{\tfrac{5}{4}b^2}$ (§. 394. *Geom.*) & ob EH : AH $=$ EK : IK, hoc eſt, $\tfrac{1}{2}b\sqrt{5} : b = \tfrac{1}{2}b : \frac{b}{\sqrt{5}}$ (§. 253. *Geom.*) IK $= b : \sqrt{5}$. eſt ergo IK radius circuli cui pentagonum icoſaëdri inſcribitur. Porro EI $= b : 2\sqrt{5} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{5}b^2}$ (§. 253. *Geom.*) & hinc AI $= \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{5}b^2}$. Unde tandem AK $= \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 - \tfrac{1}{2}b\sqrt{\tfrac{1}{5}b^2} + \tfrac{1}{20}b^2 + \tfrac{1}{5}b^2)} = \sqrt{(\tfrac{10}{20}b^2 - \tfrac{1}{2}b\sqrt{\tfrac{1}{5}b^2})} = \sqrt{(\tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}b\sqrt{\tfrac{1}{5}b^2})} = x$.

COROLLARIUM 1.

274. Quoniam $5y^2 = b^2$; quadratum diametri ſphæræ eſt in ratione quintupla ad quadratum radii circuli angulum ſolidum icoſaëdri ſubtendentis.

COROLLARIUM 2.

275. Liquet etiam, latus icoſaëdri diametro ſphæræ circumſcriptæ tum in ſe, tum potentia incommenſurabile eſſe.

SCHOLION 1.

276. *Si diameter ſphæræ fuerit* 10000 *erit latus tetraëdri inſcripti* 81149. *octaëdri* 70710, *hexaëdri* 57736, *icoſaëdri* 52573, *dodecaëdri* 35682 (f).

SCHOLION 2.

377. *Cum ex diametro ſphæræ corporibus regularibus circumſcriptæ invenire poſſimus latera eorum; non difficile foret, inde ulterius elicere tum ſuperficies, tum ſoliditates eorundem, easque tum inter ſe, tum cum quadrato & cubo diametri ſphæræ conferre: ſed quoniam hæc doctrina rariſſimi eſt uſus, eam prætermittendam eſſe judicamus.*

CAP. IV.
DE ALGEBRA AD TRIGONOMETRIAM PLANAM APPLICATA.

PROBLEMA 136.

278. *Datis baſi* HI *trianguli cujuscunque & angulis ad baſin* H & I *invenire altitudinem.*

Sic

(f) Herigonius Curſ. Mathem. Tom. I. p. 779.

Tab. II. Fig. 21. n. I. Sit $HI = a$, $LM = x$, ſinus anguli MIL $= s$, ejus Coſinus $= c$; ſinus anguli LHM $= p$, ejus Coſinus $= q$. Erit (§. 33. *Trigon.*) $s : x = c : MI$ & $p : x = q : HM$. Unde reperitur $MI = cx : s$ & $HM = qx : p$ (§. 272. *Arithm.*). Quare (§. 78. *Arithm.*).

$$cx : s + qx : p = a$$

$$cx + qsx : p = as$$

$$pcx + sqx = asp$$

$$x = asp : (pc + sq)$$

Æquatio penultima in hanc analogiam

$$pc + sq : sp = a : x$$

reſoluta ſequens exhibet

Theorema. In omni triangulo HIL baſis HI eſt ad altitudinem ML ut ſumma rectangulorum ex ſinu anguli obliqui ad baſin unius in Coſinum alterius ſe habet ad rectangulum ex ſinibus angulorum ad baſin.

Aliter.

Sumatur ML pro ſinu toto, erunt HM & MI tangentes angulorum HLM & MLI, ſeu Cotangentes datorum H & I. Sint ſinus totus $= t$, Cotangentes $= m$ & n, $LM = x$, $HI = a$; erit $t : m = x : HM$ & $t : n = x : MI$ (§. 38. *Trigon.*), conſequenter $HM = mx : t$, $MI = nx : t$, adeoque (§. 78. *Arithm.*),

$$a = (mx + nx) : t$$

$$at = mx + nx$$

$$at : (m + n) = x$$

Theorema. Baſis trianguli eſt ad altitudinem ut ſumma Cotangentium angulorum ad baſin ad ſinum totum.

PROBLEMA 137.

279. *Datis altitudine trianguli* LM *& angulis ad baſin* H *&* I *invenire baſin.* Tab. II. Fig. 21. n. I.

Si LM ſumitur pro ſinu toto, erunt HM & MI Cotangentes angulorum H & I.

Sint Cotangentes m & n, ſinus totus $= t$, $LM = b$, $HM = x$, $MI = y$: erit (§. 33. *Trigon.*).

$$b : x = t : m \qquad b : y = t : x$$

$$bm = tx \qquad bn = ty$$

$$bm : t = x \qquad bn : t = y$$

Ergo $x + y = (bm + bn) : t$.

Theorema. Altitudo trianguli LM eſt ad baſin ipſius HI ut ſinus totus ad aggregatum Cotangentium angulorum ad baſin.

PROBLEMA 138.

280. *Datis ſumma crurum* HL $+$ LI *una cum angulis ad baſin* H & I, *invenire crura* HL *&* LI. Tab. II. Fig. 21. n. I

Sit $HL + LI = a$, ſinus $H = m$, ſinus

ſinus I $= n$, HL $= x$, erit IL $= a - x$. Quare (§. 33 *Trigon.*),

$$x : n = a - x : m$$

$$mx = na - nx$$

$$mx + nx = na$$

$$x = na : (m + n)$$

$$a - x = (ma + na - na) : m + n = ma : (m + n)$$

Theorema: Summa crurum trianguli HL + LI eſt ad crus unum HL ut ſumma ſinuum angulorum ad baſin H & I ad ſinum anguli I cruri iſti HL oppoſitum.

PROBLEMA 139.

Tab. II. Fig. 21. 281. *Datis angulis ad baſin* H & I *una cum ſegmento baſeos uno* HM, *invenire ſegmentum alterum* MI.

Sit HM $= a$, MI $= x$, ſinus anguli H $= m$, ejus Coſinus $= n$; ſinus anguli I $= p$, ejus Coſinus $= q$. Erit (§. 33. *Trigon.*) $n : a = m :$ ML. Reperitur adeo ML $= am : n$. Porro vi §. *cit.* $q : x = p :$ ML. Reperitur itaque ML $= px : q$. Quare (§. 73. *Arithm.*),

$$px : q = am : n$$

$$pnx = amq$$

$$x = amq : pn$$

Eſt adeo $pn : mq = a : x$

Theorema: Si ex vertice trianguli L in baſin HI perpendiculum demittitur; ſegmentum unum HM eſt ad alterum MI, ut rectangulum ex ſinu anguli ſegmento MI adjacentis in Coſinum anguli ſegmento HM adjacentis ad rectangulum ex ſinu anguli H in Coſinum anguli I.

PROBLEMA 140.

282. *Data area trianguli rectanguli* ABC *una cum angulo* C, *invenire crura* AB & BC. Tab. I. Fig. 3.

Sit area $= b^2$ AB $= x$

Sinus totus $= r$ erit BC $= 2b^2 : x$ (§. 375. *Geom.*)

Tangens C $= t$

Quare (§. 38. *Trigon.*)

$$2b^2 : x = t : r$$

$$x$$

$$tx = 2rb^2 : x$$

$$x$$

$$tx^2 = 2rb^2$$

$$x^2 = 2rb^2 : t$$

$$x = V(2rb^2 : t)$$

Theorema: Area trianguli rectanguli eſt ad quadratum cruris unius AC ut tangens anguli eidem oppoſiti C ad duplum ſinus totius.

Conſtructio: Intra crura anguli dati D erigatur perpendicularis FE, puncto E pro lubitu aſſumto, erit DE $= r$ & FE $= t$ (§. 7. *Trigon.*). Fiat DG $=$ FE, GH $= b$ & agatur ipſi EG parallela HI; erit EI $= br : t$ (§. 256. *Geom.*). Tab. II. Fig. 32.

 Fiat

Fiat MI $= 2b$ & quæratur inter MI & DI media proportionalis IK (§ 312. *Geom.*), quæ erit crus unum. Dividatur MI bifariam in L & fiat IN $=$ LI, ducaturque NO ipſi MK parallela, erit IO $= 2b^2 : x$ (§. 256. *Geom.*), adeoque crus alterum, conſequenter KOI triangulum quæſitum.

PROBLEMA 141.

Tab. II. Fig. 33 283. *Data ſubtenſa arcus* AB *quadrante minoris una cum radio circuli* CE, *invenire ſubtenſam* CB *arcus compoſiti ex arcu* AB *& ejus complemento dimidio ad ſemicirculum.*

Applicetur AB diametro CD parallela & fiat DF $=$ AB, ducanturque rectæ EB, AD & DF. Quoniam $x = o$ (§. 300. *Geom.*), & $x = y$ (§. 212. *Geom.*); erit $o = y$ (§. 79. *Arithm.*). Eſt vero etiam $u = o$ (§. 174. *Geom.*) $= y$, conſequenter CF : CB $=$ CB : CE (§. 252. *Geom.*). Sit jam AB $= a$, CE $= r$; CB $= x$; erit DF $= a + 2r$, conſequenter

$$a + 2r : x = x : r$$

$$ar + 2r^2 = x^2$$

$$\sqrt{(ar + 2r^2)} = x.$$

COROLLARIUM 1.

284. Cum angulus CBD ſit rectus (§. 301. *Geom.*); erit $BD^2 = 4r^2 - ar - 2r^2 = 2r^2 - ar$ (§. 394 *Geom.*), conſequenter BD ſubtenſa dimidii complementi ad ſemicirculum arcus AB $= \sqrt{(2r^2 - ar)}$.

COROLLARIUM 2.

285. Quadratum ergo chordæ AB arcum quadrante minorem ſubtendentis æquatur rectangulo ex radio CE in differentiam chordæ AB a diametro CD.

COROLLARIUM 3.

286. Quadrata chordarum CB & BD, quæ ſemicirculum ſubtendunt, ambæ ſimul ſunt inter ſe ut $2r^2 + ar$ ad $2r^2 - ar$ (§. 282. 283), hoc eſt, ut $2r + a$ ad $2r - a$ (§. 172. *Arithm.*), hoc eſt, ut aggregatum ex diametro CD & chorda AB ex puncto concurſus B eidem parallela ducta ad differentiam hujus chordæ a diametro.

PROBLEMA 142.

287. *Datis in quadrilatero circulo inſcripto lateribus* AE, EB, BC *&* AC *una cum diagonali* EC, *invenire diagonalem* AB. Tab. II. Fig. 34.

Sit AE $= a$, EB $= b$, BC $= c$, AC $= d$, EC $= f$, AB $= y$. Ducatur EF, ita ut ſit $o = x$ (§. 197. *Geom.*). Quoniam præterea ACE $=$ ABE (§. 300 *Geom.*); erit EC : AC $=$ EB : BF, hoc eſt, $f : d = b :$ BF (§. 252. *Geom.*). Reperitur ergo BF $= bd : f$. Quoniam porro EAB $=$ ECB (§. 300. *Geom.*) & AEF $=$ CEB (§. 86. *Arithm.*); erit EC [f] : CB [c] $=$ EA

$= EA\,[a] : AF\,[ac : f]$ (§.252. *Geom.*). Quare (§. 78. *Arithm.*)

$$(bd + ac) : f = y$$

$$bd + ac = fy$$

Theorema: In quadrilatero circulo inſcripto AEBC rectangulum ex diagoniis EC & AB æquatur rectangulis ex lateribus oppoſitis EB in AC & EA in BC.

PROBLEMA 143.

288. *Dato ſinu anguli ſimpli, invenire ſinus & Coſinus angulorum multiplorum.*

Tab. II. Fig. 5. Sit angulus quicunque A, fiat $AB = BD = DF = FH = HL = LM = MP = PQ = QT = TV$: erit $A = ADB$ (§.174. *Geom.*) $EBD = A + ADB$ (§. 224. *Geom.*) $= 2A$, *per demonſtr.* Eodem modo oſtenditur, eſſe $FDH = A + DFA = 3A$; $HFL = A + AHF = 4A$; $LHK = A + ALH = 5A$; $PLM = A + AML = 6A$ &c. Demittantur perpendiculares BC, DE, FG, IH, LK, MN &c. Quodſi AB ſumatur pro ſinu toto; erit BC ſinus, AC Coſinus anguli ſimpli A; ED ſinus, BE Coſinus anguli dupli, FG ſinus DG Coſinus anguli tripli &c. (§. 2. 11. *Trigon.*).

Sit $AB = r$, $BC = b$, $AC = c$; erit ob angulum A utrique ΔΔ BAC & EAD communem & rectos ad C & E æquales (§. 252. *Geom.*):

AB :	BC =	AD :	DE
r	b	$2c$	$2bc : r$
AB :	AC =	AD :	AE
r	c	$2c$	$2c^2 : r$

Ergo $BE = 2c^2 : r - r = (2c^2 - r^2) : r$.
Eſt vero $r^2 = b^2 + c^2$ (§.394 *Geom.*)
Ergo $BE = (2c^2 - b^2 - c^2) : r = (c^2 - b^2) : r$ & $AF = (3c^2 - b^2) : r = AE + BE$.

AB :	BC =	AF :	FG (§. 253. *Geom.*)
r	b	$(3c^2-b^2):r$	$(3bc^2-b^3):r^2$
AB :	AC =	AF :	AG
r	c	$(3c^2-b^2):r$	$(3c^3-b^2c):r^2$

Ergo $DG = (3c^3 - b^2c) : r^2 - 2c = (3c^3 - b^2c - 2r^2c) : r^2 =$ [ſubſtituto valore ipſius r^2] $(3c^3 - b^2c - 2b^2c - 2c^3) : r^2 = (c^3 - 3b^2c) : r^2$, conſequenter $AH = AG + GH = (3c^3 - b^2c + c^3 - 3b^2c) : r^2 = (4c^3 - 4b^2c) : r^2$.

AB :	BC =	AH :	HI
r	b	$(4c^3-4b^2c):r^2$	$(4bc^3-4b^4c):r^3$
AB :	AC =	AH :	AI
r	c	$(4c^3-4b^2c):r^2$	$(4c^4-4b^2c^2):r^3$

Quare $FI = (4c^4 - 4b^2c^2) : r^3 - (3c^2 + b^2) : r = (4c^4 - 4b^2c^2 - 3r^2c^2 + b^2r^2) : r^3 =$ [ſubſtituto valore ipſius r^2] $(4c^4 - 4b^2c^2 - 3b^2c^2 - 3c^4 + b^4 + b^2c^2) : r^3 = (c^4 - 6b^2c^2 + b^4) : r^3$.

Eodem prorſus modo reperitur $KL = (5bc^4 - 18b^3c^2 + b^5) : r^4$ & $HK = (c^5 - 10b^2c^3 + 5b^4c) : r^4$; $MN = (6bc^5 - 20b^3c^3 + 6b^5c) : r^5$ & $LN = (c^6 - 15b^2c + 15b^4c^2 - b^6) : r^5$; $PO = (7bc^6 - 35b^3c^4 + 21b^5c^2 - b^7) : r^6$ & $QR = (b^7 - 21b^2c^6 + 35b^4c^3 - 7b^6c) : r^6$.

 Si ita-

Si itaque radius ſeu ſinus totus $=r$, erit ſinus anguli

Simpli b
dupli $2bc:r$
tripli $(3bc^2-b^3):r^2$
quadrupli $(4bc^3-4b^3c):r^3$
quintupli $(5bc^4-10b^3c^2+b^5):r^4$
ſextupli $(6bc^5-20b^3c^3+6b^5c):r^5$
ſeptupli $(7bc^6-35b^3c^4+21b^5c^2-b^7):r^6$
&c.

Hinc patet lex progreſſionis in infinitum. Coëfficientes enim terminorum ſunt unciæ terminorum ſecundi, quarti, ſexti, octavi &c. binomii ad eam dignitatem evecti, cujus exponens idem eſt cum exponente multipli anguli deſiderati (§. 78), adeoque in caſu indefinito $\frac{m}{1}$, $\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}$, $\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.3.4.5}$, $\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.m-6}{1.2.3.4.5.6.7}$ &c. (§. *cit.*). In termino primo b ducitur in dignitatem ipſius c, cujus exponens deficit unitate ab exponente multipli. In termino altero b^3 ducitur in dignitatem ipſius c, cujus exponens tribus unitatibus deficit ab exponente multipli. In termino tertio b^5 ducitur in dignitatem ipſius c, cujus exponens quinque unitatibus deficit ab exponente multipli &c. Hinc formula generalis in caſu indefinito emergit

$$\frac{mbc^{m-1}}{1.r^{m-1}} - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3.r^{m-1}}b^3c^{m-3} + \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.3.4.5.r^{m-1}}b^5c^{m-5} - \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.m-6}{1.2.3.4.5.6.r^{m-1}}b^7c^{m-7} \text{ &c.}$$

Similiter ſi ſinus totus r, erit Coſinus anguli

ſimpli $=c$
dupli $(c^2-b^2):r$
tripli $(c^3-3b^2c):r^2$
quadrupli $(c^4-6b^2c^2+b^4):r^3$
quintupli $(c^5-10b^2c^3+5b^4c):r^4$
ſextupli $(c^6-15b^2c^4+15b^4c^2-b^6):r^5$
ſeptupli $(c^7-21b^2c^5+35b^4c^3-7b^6c):r^6$
&c.

Unde denuo patet lex progreſſionis in infinitum. Nimirum coëfficientes ſunt unciæ terminorum primi, tertii, quinti, ſeptimi, noni &c. binomii ad eam dignitatem evecti, cujus exponens eſt idem cum exponente multipli anguli deſiderati (§. 78), adeoque in caſu indefinito *vi* §. *cit.* 1, $\frac{m.m-1}{1.2}$, $\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}$, $\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.2.3.4.5.6}$ &c. In termino primo b^0 ducitur in eam dignitatem ipſius c, cujus exponens idem cum exponente multi-

multipli. In termino ſecundo b^2 ducitur in dignitatem ipſius c, cujus exponens duabus unitatibus deficit ab exponente multipli. In termino tertio b^4 ducitur in dignitatem ipſius c, cujus exponens quatuor unitatibus deficit ab exponente multipli. In termino quarto b^6 ducitur in dignitatem ipſius c, cujus exponens 6 unitatibus deficit ab exponente multipli &c. Erit ergo formula generalis in caſu indefinito

$$c^m - \frac{m.m-1}{1.2.r^{m-1}} b^2 c^{m-2} + \frac{m.m-1.m-2.m-3.}{1.2.3.4.r^{m-1}} b^4 c^{m-4} - \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.2.3.4.5.6 r^{m-1}} b^6 c^{m-6} + \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.m-6.m-7}{1.2.3.4.5.6.7.8 r^{m-1}} b^8 c^{m-8} \text{ \&c.}$$

Quoniam $b^2 = r^2 - c^2$ (§. 16. *Trig.*) & ipſius b^2 potentiæ ſunt etiam rationales; ſubſtituto hoc valore ſive in formula generali, ſive in ſpecialibus, prodit Coſinus anguli multipli per ſolum Coſinum ſimpli & radium determinatus. Ita reperietur Coſinus anguli

dupli $\frac{c^2-b^2}{r} = \frac{c^2-r^2+c^2}{r} = \frac{2c^2-r}{r}$

tripli $\frac{c^3-3r^2c+3c^3}{r^2} = \frac{4c^3-3c}{r^2}$

quadrupli $\frac{c^4-6r^2c^2+6c^4+r^4-2c^2}{r^3}$

$\frac{r^2+c^4}{} = \frac{8c^4}{r^3} - \frac{8c^2}{r} + r$

quintupli $\frac{c^5-10r^2c^3+10c^5+5r^4c-10}{r^4}$

$\frac{r^2c^3+5c^5}{} = \frac{16c^5}{r^4} - \frac{20c^3}{r^2} + 5c$

Similiter ex ſinuum formula excludatur Coſinus, ſi valor ipſius $c = \sqrt{(r^2-b^2)}$ ſubſtituatur: quamvis ea non ſit ab irrationalitate libera.

COROLLARIUM.

289. Cum ſinus ſit chordæ dimidium (§. 2. *Trigon.*), ſi chorda arcus ſimpli dicatur b & chorda ejus complementi ad quadrantem c, & diameter r; per easdem formulas chordæ arcuum multiplorum determinantur. Quoniam vero data chorda datur etiam arcus; per easdem formulas arcus per datum numerum multiplicari poteſt.

PROBLEMA 144.

290. *Data tangente arcus ſimpli, invenire tangentem arcus multipli.*

Cum ſit ut Coſinus $c^m - \frac{m.m-1}{1.2r^{m-1}} b^2 c^{m-2}$ + &c. ad ſinum $\frac{mbc^{m-1}}{r^{m-1}} - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3.r^{m-1}} b^3 c^{m-3}$ &c. ita radius r ad tangentem (§. 26. *Trigon.*); erit tangens (aſſumtis ad abbreviandum calculum pro coëfficientibus Coſinuum

 A, B,

A, B, C, D, E, pro coëfficientibus ſinuum P, Q, R, S, T excluſo tamen in diviſoribus r^{m-1}) =

$$\frac{Prbc^{m-1} - Qrb^3c^{m-3} + Rrb^5c^{m-5} - Srb^7c^{m-7}}{c^m - Ab^2c^{m-2} + Bb^4c^{m-4} + Cb^6c^{m-6}} \text{ \&c.}$$

Sit tangens anguli ſimpli t, erit (§. *cit. Trigon.*) $c:b = r:t$, conſequenter $c = br:t$. Quodſi hic valor in locum ipſius c ſubſtituatur, prodit formula tangentis

$$\frac{\frac{Pb^mr^m}{t^{m-1}} - \frac{Qb^mr^{m-2}}{t^{m-3}} + \frac{Rb^mr^{m-4}}{t^{m-5}} - \frac{Sb^mr^{m-6}}{t^{m-7}}}{\frac{b^mr^m}{t^m} - \frac{Ab^mr^{m-2}}{t^{m-2}} + \frac{Bb^mr^{m-4}}{t^{m-4}} - \frac{Cb^mr^{m-6}}{t^{m-6}}} \text{ \&c.}$$

Quodſi ulterius hæc formula dividatur per b^m & multiplicetur per t^m, prodibit tangens indefinita

$$\frac{Pr^mt - Qr^{m-2}t^3 + Rr^{m-4}t^5 - Sr^{m-6}t^7}{r^m - Ar^{m-2}t^2 + Br^{m-4}t^4 - Cr^{m-6}t^6} \text{ \&c.}$$

Subſtitutis tandem valoribus P, Q, R, S & A, B, C, &c. tangentium formula erit $\left(\frac{m}{1}r^mt - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}r^{m-2}t^3 + \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.3.4.5}r^{m-4}t^5 - \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.m-6}{1.2.3.4.5.6.7}r^{m-6}t^7 \text{ \&c.}\right)$ $:\left(r^m - \frac{m.m-1}{1.2}r^{m-2}t^2 + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}r^{m-4}t^4 - \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.2.3.4.5.6}r^{m-6}t^6 \text{ \&c.}\right)$.

Apparet adeo, ſi binomium ex radio & tangente $r+t$ ad dignitatem indeterminatam elevetur (§. 78), fractionis, quæ tangentem indefinitam exprimit, denominatorem componi ex terminis imparibus, numeratorem vero ex terminis paribus, ſed per radium multiplicatis & utrobique ſignis + atque - alternantibus.

PROBLEMA 145.

291. *Data ſecante arcus ſimpli, invenire ſecantem multipli.*

Quoniam ſecans eſt tertia proportionalis ad Coſinum & radium (§. 26. *Trigon.*) erit (§. 288) aſſumtis pro coëfficientibus Coſinus, excluſo tamen in diviſoribus r^{m-1}, A, B, C, D &c. ſecans indeterminata:

$$\frac{r^{m+1}}{c^m - Ab^2c^{m-2} + Bb^4c^{m-4} - Cb^6c^{m-6}} \text{ \&c.}$$

Eſt vero $r:b = f:t$ (§. *cit. Trig.*): unde eruitur $r = bf:t$. Hoc valore in formula ſecantis ſubſtituto, mutatur ea in ſequentem:

$$\frac{rb^mf^m}{c^mt^m - Ab^2c^{m-2}t^m + Bb^4c^{m-4}t^m} \text{ \&c.}$$

Porro $c:b = r:t$ (§. *cit. Trigon.*), adeoque $c = br:t$. Subſtituto itaque

taque valore ipſius c in formula proxime præcedente; prodibit

$$\frac{rb^m s^m}{b^m r^m - Ab^m r^{m-2}t^2 + Bb^m r^{m-4}t^4 \text{ \&c.}}$$

Si tandem hæc formula dividatur per b^m, determinabitur valor ſecantis indefinitæ ex tangente & ſecante anguli ſimpli

$$\frac{s^m}{r^{m-1} - Ar^{m-3}t^2 + Br^{m-5}t^4 + Cr^{m-7}t^6}$$

CAP. V.

DE EXTRACTIONE RADICUM EX ÆQVATIONIBUS ALTIORIBUS.

PROBLEMA 146.

292. *Explicare naturam æquationum.*

1. Aſſumantur tot valores quantitatis incognitæ quot libuerit, formenturque inde ſimplices æquationes, ſed nihilo æquales.

2. Æquationes ſimplices in ſe invicem ducantur; ita prodidunt æquationes altiores, quarum conſideratio earum proprietates manifeſtabit.

Sit $x = 2$ $\quad x = a$
$x = -3$ $\quad x = -b$
$x = 4$ $\quad x = c$

erit $x - 2 = 0$. I $\quad x - a = 0$
$x + 3 = 0$. II $\quad x + b = 0$
$x - 4 = 0$. III $\quad x - c = 0$

Multiplicetur primo æquatio I per æquationem II & factum denuo per æquationem III.

$$\begin{array}{ll}
x - 2 = 0 & x - a = 0 \\
x + 3 = 0 & x + b = 0 \\
\hline
+3x - 6 & x^3 + bx - ab = 0 \\
x^2 - 2x & -ax \\
\hline
x^2 + x - 6 = 0 & \\
x - 4 = 0 & x - c = 0 \\
\hline
-4x^2 - 4x + 24 & x^3 - cx^2 - bcx + abc = 0 \\
x^3 + x^2 - 6x & +bx^2 - acx \\
 & -ax^2 - abx \\
\hline
x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0 &
\end{array}$$

Ad has æquationes attendens (quæ facile ad ſuperiores gradus evehi poſſunt) ſequentia obſervabit:

1. *Quantitatem cognitam ſecundi termini eſſe ſummam radicum, ſed ſigno contrario affectarum, quantitatem cognitam tertii eſſe ſummam productorum ex ſingulis binis; quantita-*

titatem cognitam quarti eſſe ſummam productorum ex ſingulis ternis &c. terminum denique ultimum eſſe factum omnium radicum. E. gr. in æquatione quadratica termini ſecundi quantitas cognita $1 = 3 - 2$. Radices vero ſunt $+2$ & -3. Similiter in cubica quantitas cognita ſecundi termini $-3 = +3 - 4 - 2$. Radices ſunt $-3, +4$ & $+2$. Quantitas cognita tertii termini in æquatione cubica $-10 = -6 + 8 - 12$. Radices ſunt, $+2, -3$ & $+4$. In eadem terminus ultimus $+24 = 2. 3. 4$.

2. *Quamlibet æquationem tot habere radices, quot quantitas incognita primi termini dimenſiones, ſeu exponens unitates.* E. gr. in æquatione quadratica x^2 duas habet dimenſiones: radices duæ ſunt $+2$ & -3. In æquatione cubica x^3 tres habet dimenſiones: radices tres ſunt $+2, -3$ & $+4$.

3. *In qualibet æquatione tot eſſe radices veras, quot ſunt ſignorum permutationes; tot eſſe falſas, quot eorundem ſucceſſiones.* E. gr. in æquatione quadratica $x^2 + x - 6 = 0$, una eſt ſignorum ſucceſſio $+ +$, una permutatio $+ -$. Æquatio vero habet radices duas, alteram veram $+2$, alteram falſam -3. In æquatione cubica $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ duæ ſunt ſignorum permutationes $+ -$ & $- +$; una ſucceſſio $- -$. Radices vero tres habet, duas quidem veras $+2$ & $+4$, unam falſam -3.

SCHOLION. 1.

293. *Theoremata duo priora ex ipſa æquationum geneſi haud difficulter demonſtrantur: tertium vero, quod* Harriotus *per inductionem primus invenit, nemo hactenus demonſtrare potuit.*

SCHOLION 2.

294. *Cæterum non eſt, quod miremur, unam æquationem multas habere poſſe radices. Unius enim ejusdemque problematis varii eſſe poſſunt caſus & in ſingulis caſibus ad eandem pervenitur æquationem. Quoniam tamen caſus quidam interdum impoſſibiles ſunt; radices quoque impoſſibiles eſſe debent.*

COROLLARIUM.

295. Radices veræ mutantur in falſas & falſæ in veras, ſi ſigna terminorum alternorum mutentur. E. gr. æquatio $x^3 - 3x^2 + 10x + 24 = 0$ duas habet radices veras, unam falſam; ſed ſi ſcribas $x^3 + 3x^2 - 10x - 24$, duæ ſunt ſignorum ſucceſſiones $+ +$ & $- -$; una vero permutatio $+ -$, adeoque æquatio duas radices falſas, veram unam habet.

PROBLEMA 147.

296. *Radicem æquationis augere vel minuere quantitate data.*

Sit æquatio $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$. Invenienda eſt æquatio alia, in qua radix $x + 3$.

$x + 3$

Fiat $x+3=y$

erit $x=y-3$

$x^2=y^2-6y+9$

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3-9y^2+27y-27 \\ -6x^2 &= \quad -6y^2+36y-54 \\ +13x &= \quad\quad +13y-39 \\ -10 &= \quad\quad\quad -10 \end{aligned}$$

$$y^3-15y^2+76y-130=0.$$

En æquationem novam, in qua $y=x+3$!

Sit e contrario in æquatione modo inventa radix minuenda binario.

Fiat $y-2=x$

erit $y=x+2$

$y^2=x^2+4x+4$

$$\begin{aligned} y^3 &= x^3+6x^2+12x+8 \\ -15y^2 &= \quad -15x^2-60x-60 \\ +76y &= \quad\quad +76x+152 \\ -130 &= \quad\quad\quad -130 \end{aligned}$$

$$x^3-9x^2+28x-30=0.$$

En æquationem novam, in qua $x=y-2$!

COROLLARIUM 1.

297. Quodſi radicem augeas quantitate maxima radice falſa majore; radices falſæ evadunt veræ, & contra ſi radicem minuas quantitate maxima radice vera majore, veræ evadunt falſæ. Si enim $y=-4$ & fiat $y+5=x$; erit $x=5-4=1$. Contra ſi $y=3$ & fiat $y-4=x$; erit $3-4=-1=x$. Dum itaque radicem minuimus quantitate quadam data, facile accidit ut radices veræ in falſas mutentur.

COROLLARIUM 2.

298. Dum radices veræ augentur, falſæ minuuntur. Nam ſi $y=3$ & $=-5$, fiatque $y+4=x$; erit $x=3+4=7$ & $y=4-5=-1$. Similiter ſi fiat $y-2=x$; erit $x=3-2=1$ & $y=-5-2=-7$.

PROBLEMA 148.

299. *Radicem æquationis per quantitatem datam multiplicare.*

Sit e. gr. radix æquationis $x^3+px^2+qx-r=0$ multiplicanda per a.

Fiat $ax=y$

erit $x=y:a$

$x^2=y^2:a^2$

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3:a^3 \\ +px^2 &= +py^2:a^2 \\ +qx &= +py:a \\ -r &= -r \end{aligned}$$

$$\frac{y^3}{a^3}+\frac{py^2}{a^2}+\frac{py}{a}-r=0. \quad a^3$$

$$y^3+apy^2+a^2py^3-a^3r=0$$

En æquationem novam, in qua $y=ax$.

COROLLARIUM 1.

300. Hinc manifeſtum eſt, æquationem

tionem datam tantum multiplicari debere per progreſſionem geometricam, in qua terminus primus 1, denominator rationis quantitas, per quam radix multiplicari jubetur. Sit e. gr. in æquatione $x^4+4x^3-19x^2-106x-120=0$ radix multiplicanda per 2. Ita ergo procedendum.

$$\begin{array}{cccccc} x^4 & +4x^3 & -19x^2 & -106x & -120 & =0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & \end{array}$$

$$y^4+8y^3-76y^2-848y-1920=0$$

En æquationem, in qua $y=2x$.

Similiter ſit radix æquationis $x^3-3x+1=0$ multiplicanda per 3.

$$\begin{array}{ccccc} x^3 & * & -3x & +1 & =0 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & \end{array}$$

$$y^3 \; * \; -27x+27=0$$

En æquationem, in qua $y=3x$

SCHOLION.

301. *Stellula repleri ſolent loca vacua, in quibus termini æquationis deficiunt.*

PROBLEMA 149.

302. *Radicem æquationis per quantitatem datam dividere.*

Sit æquationis $x^3-px^2+qx-r=0$ radix dividenda per a.

Fiat $x:a=y$

erit $x=ay$

$x^2=a^2y^2$

$x^3=a^3y^3$

$-px^2=-a^2py^2$

$+qx=+aqy$

$-r=-r$

$$a^3y^3-a^2py^2+aqy-r=0$$

$$y^3-\frac{py^2}{a}+\frac{qy}{a^2}-\frac{r}{a^3}=0$$

En æquationem novam, in qua $y=x:a$.

COROLLARIUM.

303. Apparet adeo, non alia re opus eſſe, quam ut æquatio data dividatur per progreſſionem geometricam, cujus terminus primus 1, denominator rationis quantitas, per quam radix dividenda. Sit e. gr. radix æquationis $x^4+8x^3-76x^2-848x-1920=0$ dividenda per 2. Ita igitur procedendum:

$$\begin{array}{cccccc} x^4 & +8x^3 & -76x^2 & -848x & -1920 & =0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & \end{array}$$

$$y^4+4y^3-19y^2-106y-120=0$$

In hac æquatione $y=\frac{1}{2}x$.

Similiter ſit radix æquationis $x^3 * -36x-54=0$ dividatur per 3; erit

$$\begin{array}{ccccc} x^3 & * & -36x & -54 & =0 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & \end{array}$$

$$y^3 \; * \; -4y-2=0.$$

In hac æquatione $y=\frac{1}{3}x$.

PROBLEMA 150.

304. *Complere æquationem, in qua termini quidam deficiunt.*

Radix

Radix æquationis augenda eſt quantitate data.

Sit e. gr. æquatio $x^3 * - 23x - 70 = 0$.

$$\text{Fiat } x + 1 = y$$
$$\text{erit } x = y - 1$$
$$x^2 = y^2 - 2y + 1$$

$$x^3 = y^3 - 3y^2 + 3y - 1$$
$$-23x = \quad - 23y + 23$$
$$-70 = \quad - 70$$

$$y^3 - 3y^2 - 20y - 48 = 0.$$

Habetur hic æquatio completa, in qua $y = x + 1$.

SCHOLION.

305. *Idem problema ſolvi poteſt radicem æquationis quantitate data minuendo: ſed cum hac ratione metuendum ſit, ne radices veræ in falſas mutentur* (§. 297), *conſultius eſt, ut radicem æquationis augeamus.*

PROBLEMA 151.

306. *Secundum terminum ex æquatione tollere.*

Si terminus ſecundus ſit poſitivus, augeatur; ſi privativus, minuatur radix quantitate cognita ſecundi termini per exponentem primi diviſa.

Sit e. gr. ex æquatione $x^3 - 8x^2 - x + 8 = 0$ tollendus medius terminus.

$$\text{Fiat } x - 8:3 = y$$
$$\text{erit } x = y + 8:3$$
$$x^2 = y^2 + 16y:3 + 64:9$$

$$x^3 = y^3 + 8y^2 + 192y:9 + 512:27$$
$$-8x^2 = -8y^2 - 128y:3 - 512:9$$
$$-x = \quad -y \quad - 8:3$$
$$+8 = \quad + 8$$

$$y^3 * - 67y:3 - 880:27 = 0$$

In hac æquatione $y = x - 8:3$.

COROLLARIUM 1.

307. Quodſi ex æquatione quadratica affecta ſecundus terminus aufertur, ad puram reducitur, ſicque ea alio adhuc modo reſolvi poteſt. Sit e. gr. $x^2 - 8x + 15 = 0$.

$$\text{Fiat } x - 4 = y$$
$$\text{erit } x = y + 4$$

$$x^2 = y^2 + 8y + 16$$
$$-8x = -8y - 32$$
$$+15 = \quad + 15$$

$$y^2 - 1 = 0$$

$$y = 1$$

Conſequenter $x = 1 + 4 = 5$.

COROLLARIUM 2.

308. *Secundo termino ſublato, æquationes cubicæ ad tres caſus reducuntur.* Nimirum

$x^3 \;\; * \; - px - r = 0$

$x^3 \;\; * + px - r = 0$

$x^3 \;\; * \; - px + r = 0$

PROBLEMA 152.

309. *Ex æquatione terminum tertium tollere.*

Sit in æquatione $x^3 - 4x^2 + 4x - 6 = 0$.

Fiat $x = y - m$

erit $x^2 = y^2 - 2my + m^2$

$$x^3 = y^3 - 3my^2 + 3m^2y + m^3$$
$$-4x^2 = -4y^2 + 8my - 4m^2$$
$$+4x = +4y - 4m$$
$$-6 = -6$$

Quoniam æquatio ſiniſtra dextræ æqualis; ſi tertius terminus deficere debet, talis aſſumendus eſt valor ipſius m, ut ſit

$$3m^2 + 8m + 4 = 0$$

erit ergo $m^2 + \frac{8}{3}m = -\frac{4}{3}$

$$\frac{16}{9} \qquad \frac{16}{9}$$

$$m^2 + \frac{8}{3}m + \frac{16}{9} = \frac{4}{9}$$

$$m + \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$m = -\frac{2}{3}$$

Fiat ergo $x = y + \frac{2}{3}$

erit $x^2 = y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}$

$$x^3 = y^3 + 2y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{8}{27}$$
$$-4x^2 = -4y^2 - \frac{16}{3}y - \frac{16}{9}$$
$$+4x = +4y + \frac{8}{3}$$
$$-6 = -6$$

$$y^3 - 2y^2 \; * \; - 130 = 0$$

En æquationem, in qua terminus tertius deficit, & $y = x - \frac{2}{3}$.

SCHOLION.

310. *Eodem modo inveniri poteſt quantitas radici vel addenda, vel ſubtrahenda, ut terminus ſecundus tollatur. Eodem artificio in aliis quoque caſibus utemur. Sed terminus quartus, quintus &c. hac methodo tolli nequeunt, quia radices altiores extrahendæ forent.*

PROBLEMA 153.

311. *Ex æquatione terminum penultimum tollere, ſi ſecundus deficiat.*

Pro quantitate incognita ſubſtituendus eſt terminus ultimus per y diviſus.

Sit e. gr. in æquatione $x^3 - 3x + 1 = 0$ tollendus terminus antepenultimus $-3x$. Operatio talis erit

$$x^3 = \frac{1}{y^3}$$
$$-3x = -\frac{3}{y}$$
$$+1 = +1$$

$$1 - \frac{3}{y} + \frac{1}{y^3} = 0 \qquad y^0$$

$$y^3 - 3y^2 + 1 = 0$$

PRO-

PROBLEMA 154.

312. *Æquationem datam a fractionibus liberare.*

Radix multiplicetur per factum ex omnibus denominatoribus fractionum occurrentium, aut per numerum, qui omnes denominatores metitur.

Exempla.

$$y^3 * - \frac{67}{3}y - \frac{880}{27} = 0$$

$$1 \quad 3 \quad 9 \quad 27$$

$$x^3 * \quad -201x - 880 = 0$$

In hac æquatione $x = 3y$.

$$x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}x - 64 = 0$$

$$1 \quad 12 \quad 144 \quad 1728$$

$$y^3 - 8y^2 + 108y - 110592 = 0$$

In hac æquatione $y = 12x$.

PROBLEMA 155.

313. *Æquationem datam ab irrationalitate liberare.*

Interdum id fieri poteſt per multiplicationem; interdum per diviſionem radicis. Neutra tamen regula univerſalis eſt.

Si radix fuerit quadrata, quæ tolli debet, radix æquationis multiplicatur per ipſam; ſi vero cubica aut altior quædam, per radicem cubicam ex quadrato quantitatis ſub ſigno radicali tollendæ poſitæ, aut in genere per radicem ejusdem gradus, quæ tolli debet, ſed ex quantitate ſub ſigno radicali tollendæ poſita ad gradum proxime inferiorem elevata. Interdum circumſtantiæ ſingulares aliud ſuadent.

Exempla.

$$x^4 + 2ax^3\sqrt{2} + 8abx^2 - a^3x\sqrt{8} - 2a^2b^2 = 0$$

$$1 \quad \sqrt{2} \quad 2 \quad \sqrt{8} \quad 4$$

$$x^4 + 4ay^3 + 16aby^2 - 8a^3y - 8a^2b^2 = 0.$$

In hac æquatione $y = x\sqrt{2}$.

$$x^3 - ax^2\sqrt[3]{2} + abx\sqrt[3]{32} - aab = 0$$

$$1 \quad 4 \quad 16^{1:3} \quad 4$$

$$y^3 - 2ay^2 + 3aby - 4a^2b = 0$$

In hac æquatione $y = x\sqrt[3]{4}$.

Diviſio exemplis rectius, quam regulis docetur.

$$x^2 - 3x\sqrt{3} - 2 = 0$$

Fiat $x = y\sqrt{3}$

erit $y^3 3\sqrt{3} - 3y\sqrt{3} - 2 = 0$

$$3\sqrt{3}$$

$$y^3 - 3y - 2 = 0$$

In hac æquatione $y = x \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$$x^3 - ax^2\sqrt[3]{2} + abx\sqrt[3]{32} - a^2b = 0$$

$$1 \quad \sqrt[3]{2} \quad \sqrt[3]{4} \quad 2$$

$$y^3 - ay^2 + 2aby - \frac{1}{2}a^2b = 0$$

In hac æquatione $y = x : \sqrt[3]{2}$.

$$x^3 - x^2 V2 + 3\tfrac{1}{2} x - 3V2 = 0$$
$$1 \quad V2 \quad 2 \quad 2V2$$

$$y^3 - y^2 + \tfrac{7}{4} y - \tfrac{3}{2} = 0$$

Quodſi ulterius fractiones tollere volueris; multiplicatio fieri debet per 2.

$$y^3 - y^2 + \tfrac{7}{4}y - \tfrac{3}{2} = 0$$
$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8$$

$$z^3 - 2z^2 + 7z - 12 = 0$$

In hac æquatione $z = 2y = 2x : V2$.

PROBLEMA 156.

314. *Invenire, utrum æquatio data habeat radices rationales, nec ne, &, ſi quas habet, quænam eæ ſint.*

Cum æquationis terminus ultimus ſit factum omnium radicum (§. 292), reſolvatur is in ſuos factores & hi ſucceſſive ſubſtituantur pro x in æquatione data: in quibus enim caſibus numeri poſitivi & negativi ſe mutuo deſtruunt, in iis ſubſtitutus eſt valor ipſius x.

Sit e. gr. $x^2 - 6x + 8 = 0$. Terminus ultimus 8 factores habet 2 & 4. Ponatur $x = 2$; erit

$$x^2 = 4$$
$$-6x = -12$$
$$+8 = +8$$
$$0 = 0$$

Eſt ergo 2 radix vera æquationis. Fiat quoque $4 = x$; erit

$$x^2 = 16$$
$$-6x = -24$$
$$+8 = +8$$
$$0 = 0$$

Eſt ergo 4 radix altera vera æquationis.

Sit $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$. Factores termini ultimi 15 ſunt 1, 3, 5.

Subſtituatur 1 pro x; erit

$$x = 1$$
$$-3x^2 = -3$$
$$-13x = -13$$
$$+15 = +15$$
$$0 = 0$$

Eſt ergo 1 una ex radicibus veris.

Subſtituatur porro 3 pro x; erit

$$x^3 = 27$$
$$-3x^2 = -27$$
$$-13x = -39$$
$$+15 = +15$$
$$0 = -24$$

Eſt ergo 3 nulla ex radicibus veris.

Subſtituatur ergo -3 pro x.

$$x^3 = -27$$
$$-3x^2 \quad -27$$
$$-13x = +39$$
$$+15 = +15$$
$$0 = 0$$

Eſt itaque -3 radix falſa æquationis.

Sub-

Subſtituatur denique 5 pro x; erit

$$x^3 = 125$$
$$-3x^2 = -75$$
$$-13x = -65$$
$$+15 = +15$$

Eſt ergo 5 radicum verarum altera.

Aliter.

15. Cum æquationes compoſitæ ex multiplicatione ſimplicium oriantur (§ 292); ſi radix aliqua fuerit rationalis, æquatio per ſimplicem ex aliquo factore termini ultimi & x conflatam diviſibilis ſit neceſſe eſt. Quare diviſio hæc tentanda.

Sit data æquatio $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$. Factores termini ultimi ſunt 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12: unde æquationes ſimplices conflantur $x-1=0$, $x+1=0$, $x-2=0$, $x+2=0$, $x-3=0$, $x+3=0$, $x-4=0$, $x+4=0$, $x-6=0$, $x+6=0$, $x-8=0$, $x+8=0$, $x-12=0$, $x+12=0$. Diviſio fruſtra tentatur per $x-1$ & $x+1$. Quare 1 nec radix falſa eſt, nec verarum una: ſuccedit autem diviſio per $x-2$.

$$
\begin{array}{r|l}
x-2) & x^3-3x^2-10x+24\ (x^2-x-12 \\
 & x^3-2x^2 \\ \hline
 & -x^2-10x \\
 & -x^2+2x \\ \hline
 & -12x+24 \\
 & -12x+24 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

Eſt adeo 2 una ex radicibus veris, cumque terminus ultimus ſit 12 in quotiente, 8 & 12 non ſunt in numero radicum. Diviſio æquationis quadraticæ $x^2 - x + 12 = 0$ per $x-3$ fruſtra tentatur: ſed per $x+3$ ſuccedit.

$$
\begin{array}{r|l}
x+3) & x^2-x-12\ (x-4 \\
 & x^2+3x \\ \hline
 & -4x-12 \\
 & -4x-12 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

Eſt ergo 3 radix falſa æquationis &, ob $x-4=0$, 4 verarum altera.

Similiter ſit $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$: erunt factores termini ultimi 1, 3, 5 conſequenter diviſores tentandi $x-1=0$, $x+1=0$, $x-3=0$, $x+3=0$, $x-5=0$, $x+5=0$. Tentetur diviſio per $x-1$.

$$
\begin{array}{r|l}
x-1) & x^3-3x^2-13x+15\ (x^2-2x-15 \\
 & x^3-x^2 \\ \hline
 & -2x^2-13x \\
 & -2x^2+2x \\ \hline
 & -15x+15 \\
 & -15x+15 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

Eſt ergo 1 radicum verarum una. Diviſio per $x-3$ non ſuccedit: ſuccedit tamen per $x+3$.

$x+$

$$
\begin{array}{l}
x+3)\ x^2-2x-15\ (x-5 \\
\qquad\ \ x^2+3x \\
\hline
\qquad\ -5x-15 \\
\qquad\ -5x-15 \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Eſt itaque 3 radix falſa, & ob $x-5=0$, 5 verarum altera.

COROLLARIUM.

316. Ex modo allatis exemplis manifeſtum eſt, problema præſens hanc quoque admittere ſolutionem:

1. Numerus, quem radicem eſſe ſuſpicamur, ſubducendus eſt ex coëfficiente ſecundi termini.
2. Reſiduum multiplicandum eſt per illum ipſum numerum & factum ex coëfficiente termini tertii ſubtrahendum.
3. Quod relinquitur, denuo per illum numerum multiplicetur; factum ex coëfficiente termini tertii ſubtrahatur & ita porro.

$$
\begin{array}{llll}
x^3 & -3x^2 & -10x & +24=0 \\
 & -2 & +2 & +24 \\
\hline
 & -1 & -12 & 0 \\
 & -2 & & (-2 \\
 & +2 & +24 &
\end{array}
$$

Quoniam 0 relinquitur, 2 eſt una radicum verarum.

$$
\begin{array}{llll}
x^3 & -3x^2 & -13x & +15=0 \\
 & -1 & +2 & +15 \\
\hline
 & -2 & -15 & 0 \\
 & -1 & & -1 \\
 & +2 & +15 &
\end{array}
$$

Eſt ergo 1 altera radicum verarum.

SCHOLION.

317. Ne radicum rationalium inveſtigatio moleſta accidat, conſultum eſt, ut vel æquationem propoſitam in aliam transformemus, in qua terminus ultimus diviſores pauciores habet, vel duos numeros inveſtigemus, intra quos radices continentur: quem in finem ſequentia ſubnectimus problemata.

PROBLEMA 157.

318. *Æquationem propoſitam, in qua terminus ultimus plures admittit diviſores, transformare in aliam, in qua terminus ultimus pauciores diviſores habet.*

Fiat $x=1$, vel $x=-1$, vel $x=2$, vel $x=-2$, vel $x=3$, vel $x=-3$, vel $x=4$, vel $x=-4$ &c. & his valoribus ſucceſſive ſubſtitutis, obſervetur, quo in caſu ſumma relinquat numerum pauciores factores habentem, quam terminus ultimus æquationis: eo enim numero radix æquationis vel augenda eſt, vel minuenda (§.296).

Sit e. gr. $x^3-3x^2-10x+24=0$.

$$
\begin{array}{ll}
\text{Fiat} & x=1 \\
\text{erit} & x^3=1 \\
 & -3x^2=-3 \\
 & -10x=-10 \\
 & +24=+24 \\
\hline
 & \text{Summa}=+12
\end{array}
$$

Cum 12 pauciores diviſores admittat quam 24;

Fiat

Fiat $x = y + 1$

erit $x^2 = y^2 + 2y + 1$

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 + 3y^2 + 3y + 1 \\ -3x^2 &= \quad -3y^2 - 6y - 3 \\ -10x &= \quad\quad -10y - 10 \\ +24 &= \quad\quad\quad +24 \end{aligned}$$

$$y^3 \; * \; -13y + 12 = 0$$

In hac æquatione eſt $y = x - 1$.

SCHOLION.

319. *Eadem æquatio* $y^3 * -13y + 12 = 0$ *habet radicem falſam* -4. *Si enim hunc valorem pro y ſubſtituas, prodibit* $-64 + 52 + 12 = 0$. *Ergo* $x = y + 1 = -3$. *Reperitur adeo radix falſa æquationis propoſitæ* $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ *prorſus ut ſupra* (§. 315).

PROBLEMA 158.

320. *Invenire limites æquationis; hoc eſt, duas quantitates, intra quas radix continetur.*

Sit $x^2 + px - q = 0$

erit $x^2 + px = q$

$$px < q$$

$$x < q : p$$

Similiter ob $x^2 + px = q$

$$(Vq + p)x > q$$

$$x > q : (Vq + p)$$

Sunt adeo limites æquationis $q : p$ & $q : (Vq + p)$. Nempe radix minor eſſe debet quam $q:p$ & major quam $q : (Vq + p)$.

Sit $x^2 - px + q = 0$

erit $x^2 + q = px$

$$x^2 < px$$

$$x < p$$

Similiter ob $x^2 = px - q$

$$px > q$$

$$x > q:p$$

Sunt adeo limites æquationis p & $q:p$. Nempe radix minor eſt quam p & major quam $q : p$.

Sit $x^2 - px - q = 0$

erit $x^2 = px + q$

$$x^2 > q$$

$$x > Vq$$

$$xVq > q$$

Ergo $x^2 < px + xVq$

$$x < p + Vq$$

Similiter $x^2 > px$

$$x > p$$

$$px > p^2$$

$$x^2 > p^2 + q$$

$$x > V(p^2 + q)$$

Sunt adeo limites $p + Vq$ & $V(p^2 + q)$. Nimirum radix minor eſſe

Yy debet

debet quam $p+q$; ſed major, quam $V(p^2+q)$.

Sit $x^3-qx+r=0$

erit $x^3+r=qx$

Ergo $qx>r$

$x>r:q$

Similiter $x^3<qx$

$x^2<q$

$x<Vq$

Sunt adeo limites $r:q$ & Vq.

Sit $x^3+qx-r=0$

erit $x^3+qx=r$

$qx<r$

$x<r:q$

Similiter $r>x^3$

$r^{1:3}>x$

$xr^{2:3}>x^3$

$xr^{2:3}+qx>r$

$x>r:(r^{2:3}+q)$

Sunt adeo limites $r:q$, & $r:(r^{2:3}+q)$,

Sit $x^3-px^2+qx-r=0$

erit $x^3-px^2=r-qx$

Quodſi ergo $x>p$, erit quoque $r>qx$, conſequenter $x<r:q$. Sed ſi $p>x$; erit $qx>r$, conſequenter $x>r:q$.

In utroque igitur caſu limites ſunt p & $r:q$

Sit $x^3-px^2-qx+r=0$

erit $x^3+r=px^2+qx$

$px^2+qx>r$

$x^2+qx:p+q^2:4p^2>r+q^2:4p^2$

$x+q:2p>V(q^2:4p^2)$

$x>V(r+q^2:4p^2)-q:2p$.

Similiter $px^2+qx>x^3$

$px+q>x^2$

$q>x^2-px$

$q+\frac{1}{4}p^2>x^2-px+\frac{1}{4}p^2$

$V(q+\frac{1}{4}p^2)>x-\frac{1}{2}p$

$x<V(q+\frac{1}{4}p^2)+\frac{1}{2}p$

Sunt adeo limites $V(r+q^2:4p^2)-q:2p$ & $V(q+\frac{1}{4}p^2)+\frac{1}{2}p$.

Sit $x^4-qx^2-rx-s=0$

erit $x^4-qx^2=rx+s$

Ergo $x^2>q$

$x>Vq$

Similiter $x^4-rx=qx^2+s$

ergo $x^3>r$

$x>r^{1:3}$

Tan-

Tandem $x^4 - s = qx^2 + rx$

$$x^4 > s$$

$$x > s^{1:4}$$

$$x^3 s^{1:4} > s$$

Ergo ob $x^4 = qx^2 + rx + s$

$$x^4 > x^3 q^{1:2} + x^3 r^{1:3} + x^3 s^{1:4}$$

$$x > q^{1:2} + r^{1:3} + s^{1:4}$$

Sunt adeo limites $\sqrt{q}$ vel $r^{1:3}$ & $q^{1:2} + r^{1:3} + s^{1:4}$.

Eodem modo operandum eſt in caſibus aliis.

SCHOLION.

321. *In æquatione* $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ *factores termini ultimi ſunt* 1. 2. 3. 4. 6. 8. 12. 24. *Limites reperiuntur* $\sqrt{(24 + \frac{25}{9})} - \frac{5}{3} = \sqrt{\frac{241}{9}} - \frac{5}{3} = \frac{15-5}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ *fere &* $\sqrt{(10 + \frac{9}{4})} + \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{49}{4}} + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = \frac{10}{2} = 5$. *Maxima igitur radicum non poteſt eſſe minor quam* $3\frac{1}{3}$, *debet tamen eſſe minor quam* 5. *Unde apparet diviſionem tentandam eſſe per* x - 4.

PROBLEMA 159.

322. *Ex æquatione cubica radicem extrahere.*

Æquationes cubicæ, ſublato ſecundo termino, ad hos tres caſus reducantur:

$$x^3 = +px + q$$
$$x^3 = -px + q$$
$$x^3 = +px - q$$

Fiat $x = y + z$

erit $x^3 = y^3 + 3y^2z + 3z^2y + z^3$

$$px = py + pz$$

Quamobrem in caſu primo

$$y^3 + 3y^2z + 3z^2y + z^3 = py + pz + q.$$

Fiat $3y^2z + 3zy^2 = +py + pz$ $y + z$

erit $3yz = p$ $3y$

$$z = p : 3y$$

Erit porro $y^3 + z^3 = q$

hoc eſt $y^3 + p^3 : 27y^3 = q$ y^3

$$y^6 + \tfrac{1}{27}p^3 = qy^3$$

$$y^6 - qy^3 = -\tfrac{1}{27}p^3$$

$$\tfrac{1}{4}q^2 \qquad \tfrac{1}{4}q^2$$

$$y^6 - qy^3 + \tfrac{1}{4}q^2 = \tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3$$

$$y^3 - \tfrac{1}{2}q = \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3)}$$

$$y^3 = \tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3)}$$

$$y = [\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3)}]^{1:3}$$

Quoniam $y^3 + z^3 = q$ erit etiam

$$z^3 = q - y^3$$

$$z^3 = q - \tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3)}$$

$$z = [\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3)}]^{1:3}$$

Ergo $y + z = x = \sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3)}]} + \sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3)}]}$.

Quodſi propponatur $-p$, prodibit

bit radix in caſu altero $\sqrt[3]{[\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]} + \sqrt[3]{[\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3})]}$.

Denique ſi in formula prima pro q ponatur $-q$; habebitur radix in caſu tertio $\sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)}]} + \sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)}]}$.

E. gr. Sit $x^3 = 6x + 40$: erit $p = 6$, $q = 40$, adeoque $\frac{1}{2}q = 20$, $\frac{1}{4}q^2 = 400$, $\frac{1}{3}p = 2$, $\frac{1}{27}p^3 = 8$, conſequenter per regulam primam $x = [20 + \sqrt{(400 - 8)}]^{1:3} + [20 - \sqrt{(400-8)}]^{1:3} = [20 + \sqrt{392}]^{1:3} + [20 - \sqrt{392}]^{1:3} =$ (radice cubica actu extracta) $2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$.

Sit $x^3 = -3x + 36$. Quia $p = -3$, $q = 36$, adeoque $\frac{1}{2}q = 18$, $\frac{1}{4}q^2 = 324$, $\frac{1}{3}p = -1$, $\frac{1}{27}p^3 = 1$; erit per regulam ſecundam $x = [18 + \sqrt{(324+1)}]^{1:3} + [18 + \sqrt{(324+1)}]^{1:3} =$ (radice cubica in utroque membro actu extracta) $1\frac{1}{2} - \sqrt{3\frac{1}{4}} + 1\frac{1}{2} + \sqrt{3\frac{1}{4}} = 3$.

Sit $x^3 = 6x - 40$. Quoniam $p = 6$, $q = 40$, adeoque $\frac{1}{2}q = 20$, $\frac{1}{4}q^2 = 400$, $\frac{1}{3}p = 2$, $\frac{1}{27}p^3 = 8$; erit per regulam tertiam $x = [-20 + \sqrt{(400-8)}]^{1:3} + [-20 - \sqrt{(400-8)}]^{1:3} = [-20 + \sqrt{392}]^{1:3} + [-20 - \sqrt{392}]^{1:3} =$ (radice cubica actu extracta) $-2 - \sqrt{2} + \sqrt{2} - 2 = -4$.

SCHOLION.

323. *Ut appareat, quomodo ex* $20 + \sqrt{392}$ *radix cubica extrahatur; methodum generalem apponere libet, qua & in aliis caſibus ſimilibus utendum. Caeterum formulas illas* Cardani *regulas vocat* Carteſius (g), *quia eas primus publicavit; ipſe enim* Cardanus *inventionis laudem* Scipioni Ferreo *tribuit*.

PROBLEMA 160.

324. *Extrahere radicem deſideratam ex quantitate irrationali compoſita.*

Sit ex binomio $3 + \sqrt{8}$ extrahenda radix quadrata. Ponamus eam eſſe $x + \sqrt{y}$, erit $x^2 + 2x\sqrt{y} + y = 3 + \sqrt{8}$.

Fiat $x^2 + y = 3$ $\qquad$ $2x\sqrt{y} = \sqrt{8}$

erit $x^4 + 2x^2y + y^2 = 9$ $\qquad$ $4x^2y = 8$

$$4x^2y = 8$$

$$x^4 - 2x^2y + y^2 = 1$$

$$x^2 - y = 1$$

$$x^2 = y + 1$$

Eſt vero etiam, ob $x^2 + y = 3$, $x^2 = 3 - y$.

Quare $3 - y = y + 1$

$$3 = 2y + 1$$

$$2 = 2y$$

$$1 = y$$

Ergo $x^2 + 1 = 3$

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2}$$

Eſt

(g) Geometr. lib. 3. p. m. 93 & 94.

Eſt ergo $\sqrt{y} + = 1 + \sqrt{2}$.

Sit ſimiliter in problemate præcedente ex $20 + \sqrt{392}$ extrahenda radix cubica. Ponamus radicem eſſe $x + \sqrt{y}$, erit ejus cubus

$$x^3 + 3x^2\sqrt{y} + 3xy + \sqrt{y^3} = 20 + \sqrt{392}$$

Fiat $3x^2\sqrt{y} + \sqrt{y^3} = \sqrt{392}$

erit $9x^4y + 6x^2y^2 + y^3 = 392$

Porro $x^3 + 3xy = 20$

$$x^6 + 6x^4y + 9x^2y^2 = 400$$
$$9x^4y + 6x^2y^2 + y^3 = 392 \text{ ſubtr.}$$

$$x^6 - 3x^4y + 3x^2y^2 - y^3 = 8$$

$$x^2 - y = 2$$

$$x^2 - 2 = y$$

Subſtituto valore ipſius y in æquatione:

$$x^3 + 3xy = 20$$

erit $x^3 + 3x^3 - 6x = 20$

hoc eſt $4x^3 - 6x = 20$ 4

$$x^3 * - \tfrac{6}{4}x = 5$$
$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad (\S. 312).$$

$$z^3 * - 6z = 40$$

Si pro z ſubſtituatur 4; erit $64 - 24 = 40$. Eſt ergo 4 radix hujus æquationis (§. 314), conſequenter $x = z : 2 = 2$. Quare cum ſit

$$x^2 - 2 = y$$

erit $4 - 2 = y$

$$2 = y$$

Eſt ergo radix cubica ex $20 + \sqrt{392}$ extracta $2 + \sqrt{2}$.

Eodem modo operandum eſt in caſibus aliis.

PROBLEMA 161.

325. *Æquationem biquadraticam, in qua ſecundus terminus deficit, reducere ad cubicam.*

Sit æquatio biquadratica $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$, ubi retinetur in omnibus terminis ſignum $+$, ut omnes caſus repræſententur. Cum æquatio biquadratica ex multiplicatione duarum quadraticarum oriatur (§. 292); aſſumantur duæ quadraticæ $x^2 + yx + z = 0$ & $x^2 - yx + v = 0$, quæ in ſe invicem ductæ generabunt

$$\begin{aligned} x^4 * + zx^2 & + yvx + vz = 0 \\ + vx^2 & - yzx \\ - y^2x^2 & \end{aligned}$$

Quoniam hæc æquatio eadem ſupponitur cum propoſita; erit

$z + v - y^2 = q \quad yv - yz = r \quad vz = s$

$q + y^2 = z + v \quad v - z = r : y$

$q + y^2 - v = z \quad v - q - y^2 + v = r : y$

$$2v = q + y^2 + r : y$$

$$v = \frac{q + y^2 + r : y}{2}$$

Sub-

Subſtituatur valor ipſius v in æquatione $q+y^2-v=z$, erit

$$\frac{2q+2y^2-q-y^2-r:y}{2}=z, \text{ hoc eſt,}$$

$$\frac{q+y^2-r:y}{2}=z$$

Ergo

$$vz=\frac{(q+y^2+r:y)}{2}\frac{(q+y^2-r:y)}{2}=$$

$$\frac{q^2+2qy^2+y^4-r^2:y^2}{4}=ſ$$

$$\underline{-4y^2}$$

$$q^2y^2+2qy^4-y^6-r^2=4y^2ſ$$

$$\begin{array}{l} y^6+2qy^4+q^2y^2-r=0 \\ \qquad\qquad -4ſy^2 \end{array}$$

Fiat $y^2=t$, erit

$$\begin{array}{l} t^3+2qt^2+q^2t-r^2=0. \\ \qquad\qquad -4ſt \end{array}$$

PROBLEMA 162.

326. *Ex æquatione biquadratica radicem extrahere.*

I. Si æquatio fuerit pura, e. gr. $x^4=a^2bc$: extrahatur primum radix quadrata, ut habeatur $x^2=a\sqrt{bc}$ & hinc denuo educatur radix quadrata. Reperietur $x=\sqrt{(a\sqrt{bc})}$

E. gr. Sit $x^4=32$; erit $x^2=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$, adeoque $x=2\sqrt{2}=\sqrt{8}$.

II. Si æquatio fuerit affecta

1. Tollatur ſecundus terminus, ſi adfuerit (§. 306).
2. Reducatur æquatio ad cubicam (§. 323)
3. Inde extrahatur radix cubica (§. 320 & 321).
4. Hac data ex æquationibus, quarum ope biquadraticam ad cubicam reduximus, radices æquationis propoſitæ erui poſſunt.

E. gr. Sit $x^4-86x^2+600x-851=0$; erit $q=-86$, $r=600$, $ſ=-851$. Jam cum æquatio cubica, ad quam reducenda, ſit $t^3+2qt^2+q^2t-r^2=0$; ſi
$\qquad\qquad\qquad -4ſt$
in ea ſubſtituantur valores quantitatum $q, r, ſ$, prodibit

$$t^3-172t^2+10800t-360000=0.$$

Hæc æquatio cum ſit per $t-100$ diviſibilis (§. 306); erit $t=100$, adeoque in problemate præcedente $y^2=100$ & hinc $y=10$.

Hoc valore ſubſtituto in æquatione $\frac{q+y^2-r:y}{2}=z$; reperitur z

$$=\frac{-86+100-600:10}{2}=-\tfrac{46}{2}=-23.$$

Eodem valore ipſius y ſubſtituto in æquatione $v=\frac{q+y^2+r:y}{2}$; invenitur $v=\frac{-86+100+600:10}{2}$

$=\frac{74}{2}=37$. Tandem valores quantitatum $y, z, \& v$ ſubſtituendi ſunt in æquationibus quadraticis $x^2+yx+z=0$ & $x^2-yx+v=0$ & habebimus:

I. x^2

I. $x^2+10x-23=0$

$x^2+10x \quad 23$
$\quad 25 \quad 25$

$x^2+10x+25=48$

$x+5=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$

$x=4\sqrt{3}-5$

II. $x^2-10x+37=0$

$x^2-10x=-37$
$\quad 25 \quad 25$

$x^2-10x+25=-12$

$x-5=\sqrt{-12}=2\sqrt{-3}$
$5-x$

$x=5\pm 2\sqrt{-3}$

Sunt ergo radices æquationis propoſitæ $4\sqrt{3}-5$, $5+2\sqrt{-3}$ & $5-2\sqrt{-3}$.

PROBLEMA 163.

327. *Ex æquatione quacunque extrahere radicem per approximationem.*

Quamvis æquationum quadraticarum radices ſurdæ extrahi poſſint (§. 121), nec difficile ſit inde ulterius radicem prope veram in fractionibus decimalibus elicere (§. 248. *Arithm.*): quoniam tamen methodus, quam nunc explicare intendimus, univerſalis eſt, ab exemplo facillimo æquationis quadraticæ ut ordiamur, conſultum ducimus

Sit $x^2-5x-31=0$. Ponamus radicem eſſe $8+y$, ita ut y denotet fractionem, qua numerus aſſumtus radicem vel excedit, vel ab ea deficit: erit

$$x^2=64+16y+y^2$$
$$-5x=-40-5y$$
$$-31=-31$$

$$-7+11y+y^2=0$$

Quoniam fractionum potentiæ continuo decreſcunt & radix tantum deſideratur prope vera, y^2 abjicitur: quo facto erit

$$-7+11y=0$$

$$y=\tfrac{7}{11}=\tfrac{6}{10}\text{ fere}=0,6$$

Ergo $x=8+0.6=8.6$

Ponamus $x=8.6+y$: erit

$$x^2=\tfrac{7396}{100}+\tfrac{172}{10}y+y^2$$
$$-5x=-\tfrac{430}{10}-5y$$
$$-31=-31$$

$$\tfrac{7396}{100}-\tfrac{430}{10}-31+\tfrac{172}{10}y-5y=0$$

hoc eſt, reductione ad eandem denominationem facta, (quod in gratiam tyronum ſemel hic exhibere placuit)

$$7396-4300-3100+(1720-500)y=0$$

$$-0,04+1220y=0$$

$$12,20y=0,04$$

$$y=004:12,20=0,0032$$

Ergo

Ergo $x = 8.6000 + 0.0032 = 8.6032$.

Ponamus $x = 8.6032 + y$, erit

$$x^2 = 7401505024 + 17.20640000\,y + y^2$$
$$-5x = -43.01600000 - 500000000\,y$$
$$-31 = -31.00000000$$

$$-0.000094976 + 12.20640000\,y = 0$$

$$y = 0.000094976 : 12.20640000 = 0.0000077808.$$

Ergo $x = 8.60320000000 + 0.0000077808 = 8.6032778\,8$.

Sit ſimiliter ex æquatione cubica $x^3 + 2x^2 - 23x - 70 = 0$ extrahenda radix per approximationem. Ponamus denuo radicem eſſe $5 + y$ (numerus 5 aſſumitur vi limitum æquationis §. 306), quoniam termini, in quibus eſt y^2 & y^3, omittuntur; non opus eſt, ut in transformatione æquationis exprimantur. Reperitur adeo:

$$x^3 = 125 + 75y \ldots$$
$$+2x^2 = 50 + 20y \ldots$$
$$-23x = -115 - 23y$$
$$-70 = -70$$

$$-10 + 72y = 0$$

$$y = -\tfrac{10}{72} = 0.1$$

Ergo $x = 5 + 0.1 = 5.1$

Ponamus $x = 5.1 + y$: erit

$$x^3 = 132.651 + 78.030y \ldots$$
$$+2x^2 = 52.020 + 20.400y$$
$$-23x = -117.300 - 23.000y$$
$$-70 = -70.000$$

$$-2.629 + 75.430y = 0$$

$$75.430y = 2.629$$

$$y = 3.649 : 75.430 = 0.0348$$

Ergo $x = 5.1 + 0.048 = 5.1348$

Eodem modo progredi licet, quousque libuerit.

Nec difficile eſt eadem methodo regulam generalem inveſtigare. Sit nempe $x^m + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + dx^{n-4} + ex^{n-5}$ &c. $+ f = 0$. Ponamus eſſe $x = p + y$; erit

$$x^m = t^m + mt^{m-1}y + \frac{m.m-1}{2}t^{m-2}y^2 \ldots$$
$$+ax^{m-1} = at^{m-1} + m-1.\,at^{m-2}y + \frac{m-1.m-2}{2}at^{m-3}y^2 \ldots$$
$$+bx^{m-2} = bt^{m-2} + m-2.\,bt^{m-3}y + \frac{m-2.m-3}{2}bt^{m-4}y^2 \ldots$$
$$+cx^{m-3} = ct^{m-3} + m-3.\,ct^{m-4}y + \frac{m-3.m-4}{2}ct^{m-5}y^2 \ldots$$

&c. &c.

$$+f = +f.$$

Fiat $t^m + at^{m-1} + bt^{m-2} + ct^{m-3}$ &c. $= p$, $mt^{m-1} + \frac{m-1}{1}at^{m-2} + \frac{m-2}{1}bt^{m-3} + \frac{m-3}{1}ct^{m-4}$ &c. $= q$ & $\frac{m.m-1}{2}t^{m-2}$

$+ m-$

$+\frac{m-1.m-2}{2}at^{m-3} + \frac{m-2\,m-3}{2}bt^{m-4}$
$+\frac{m-3.m-4}{2}ct^{m-5}$ &c. $= r$. Quoniam termini, in quibus y ad plures dimenſiones aſcendit, ob parvitatem abjiciuntur, erit

$$p+qy+ry^2=0$$

Fiat ut in exemplis ſpecialibus

$$p+qy=0$$

erit $qy=-p$

$$y=-p:q$$

Ergo $x=t-p:q$

In hac regula generali eadem calculi inſtauratione opus eſt, qua in exemplis ſpecialibus paulo ante uſi ſumus.

Quodſi vero regula deſideretur, quæ celerius appropinquat, ex æquatione prima hunc in modum eruitur.

Quoniam $p+qy+ry^2=0$

erit $qy+ry^2=-p$ $\quad q+ry$

$$y=-p:(q+ry)$$

Sed $y=-p:q$, per regulam priorem.

Ergo $y=-p:(q-\frac{pr}{q})=-pq:(q^2-pr)$.

Vel quia $p+qy+ry^2=0$

erit $qy+ry^2=-p$ $\quad r$

$$qy:r+y^2=-p:r$$

$$q^2:4r^2+qy:r+y^2=q^2:4r^2-p:r$$

$$q:2r+y=\surd(\tfrac{1}{4}q^2-pr):r$$

Habetur adeo $x=t-pq:(q^2-pr)$, vel $x=\surd(\frac{1}{4}q^2-pr):r-q:2r$.

SCHOLION.

328. *Duas regulas poſteriores methodo ab hac diverſa inveſtigavit celeberrimus* Hallejus (h)*; ubi eandem aliquot exemplis illuſtravit. Quamvis vero uſus earum ex ante allatis exemplis manifeſtus eſſe videatur; non inconſultum tamen judicamus, ut unum apponamus.*

Sit $\underset{a}{x^3+438}x^2-\underset{b}{7825}x-\underset{f}{98508430}$ $=0$. Fiat $x=t+y=300+y$; erit

$x^3=27000000+270000y+900y^2+y^3$
$+ax^2=39420000+262800y+438y^2$
$-bx=-2347500-7825y$
$-f=-98508430$

$$-34435930+524975y+1338y^2=0$$

Eſt itaque $p=-34435930$, $-q=524975$, $-r=1338$. Quare $y=-p:(q+pr:q)=-34435930:(-524975+46075274340:-524975)=-34435930:-612739=56.2$, conſequenter $x=300+56.2=356.2$.

Fiat jam $x=356+y$; erit

(h) In Transact. Anglican. n. 210. p. 136.

$x^3 = 45118016 + 380208y + 1068y^2 + y^3$
$+ax^2 = 55510368 + 311856y + 438y^2$
$-bx = -2785700 - 7825y$
$-f = -98508430$

$-665746 + 684239y + 1506y^2 = 0.$

Eſt itaque $p = -665746$, $-q = 684239$, $-r = 1506$. Quare $y = p : (q + pr : q) = -665746 : (-684239 + 1002613476 : -684239) = -6657460 : 685733 = 0.9708$, conſequenter $x = 356 + 0.9708 = 356.9708$.

Per regulam irrationalem radix in pluribus notis per duas operationes inveniri poteſt, quia rationali accuratior. Poſſunt quoque plures notæ inveniri per rationalem, ſi operatio continuetur.

COROLLARIUM.

329. Si $x^m - f = 0$ & fiat $x = t + y$; erit $x^m - f = t^m + mt^{m-1}y + \frac{m.m-1}{2}t^{m-2}y^2$ &c. $-f$. Unde ſi fiat $t^m + mt^{m-1}y - f = 0$, erit $y = f - t^m : mt^{m-1}$.

Quæ eſt regula per approximationem extrahendi radicem ex quævis æquatione pura. Si accuratior deſideretur, fiat ut ante $t^{m-1} = p$, $mt^{m-1} = q$, $\frac{m.m-1}{2}t^{m-2} = r$; reperietur ut in problemate $y = -p : (q - pr : q)$. Unde apparet, eandem regulam inſervire radicum extractioni tum ex æquationibus puris, tum ex affectis.

PROBLEMA 164.

330. *Ex ſerie infinita radicem extrahere.*

Sit $v = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5$ &c.

Fiat $x = hv + iv^2 + kv^3 + lv^4 + mv^5 + nv^6$ &c. erit (§. 85).

$$x^2 = h^2v^2 + 2hiv^3 + i^2v^4 + 2ikv^5 + k^2v^6$$
$$+ 2hkv^4 + 2hlv^5 + 2ilv^6$$
$$+ 2hmv^6$$
$$x^3 = h^3v^3 + 3h^2iv^4 + 3hi^2v^5 + i^3v^6 \text{ \&c.}$$
$$+ 3h^2kv^5 + 3h^2lv^6$$
$$+ 6hikv^6$$
$$x^4 = h^4v^4 + 4h^3iv^5 + 6h^2i^2v^6 \text{ \&c.}$$
$$+ 4h^3kv^6$$
$$x^5 = h^5v^5 + 5h^4iv^6 \text{ \&c.}$$
$$x^6 = h^6v^6 \text{ \&c.}$$

Subſtituantur valores modo inventi in æquatione $0 = -u + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6$ &c. erit

$$-u = -v$$

$$+ax = +abv \quad + aiv^2 \quad + akv^3 \quad + alv^4 \quad + amv^5 \quad + anv^6 \quad \&c.$$

$$+bx^2 = \quad + bh^2.. \quad + 2bhi.. \quad + bi^2.. \quad + 2bhl.. \quad + bk^2..$$

$$+ 2bhk.. \quad + 2bik.. \quad + 2bhm..$$

$$+ 2bil..$$

$$+cx^3 = \quad + ch^3.. \quad + 3ch^2i.. \quad + chi^2.. \quad + 3ch^2l..$$

$$+ 3cl^2k.. \quad + 6chik..$$

$$+ ci^3..$$

$$+dx^4 = \quad + dh^4.. \quad + 4dh^3i.. \quad + 6dh^2i^2..$$

$$+ 4dh^3k..$$

$$+ eh^5.. \quad + 5eh^4i..$$

$$+ fh^6..$$

Fiat jam in hac æquatione quilibet terminus nihilo æqualis, erit

$$ah-1 = 0 \qquad ai + bh^2 = 0$$

$$h = 1:a \qquad i = -bh^2:a$$

$$i = -b:a^3$$

$$ak + 2bhi + ch^3 = 0$$

$$k = (-2bhi - ch^3):a$$

$$k = (+2b^2 - ac):a^5$$

$$al + bi^2 + 2bhk + 3ch^7i + dh^4 = 0$$

$$l = (-bi^2 - 2bhk + 3chi - dh^4):a$$

$$l = -b^3:a^7 - 4b^3:a^7 + 2ba:a^6 + 3bc:a^6 - d:a^5$$

$$l = (5abc - 5b^3 - a^2d):a^7$$

Eodem modo reperitur $m = (14b^4 + 6abd - 21ab^2c + 3a^2c^2 - a^3e):a^9$, $n = (-42b^5 + 84ab^3c - 28a^2bc - 28a^2b^2d + 7a^3cd + 7a^3be - a^4f):a^{11}$ & ita porro.

Quodſi tandem in æquatione aſſumta $x = hv + iv^2 + kv^3 + lv^4 + mv^5 + nv^6$ &c. valores inventi coëfficientium h, i, k, l, m, n &c. ſubſtituantur, prodibit radix quæſita.

$$x = \frac{v}{a} - \frac{bv^2}{a^3} + \frac{2b^2 - ac}{a^5}v^3 + \frac{5abc - 5b^3 + a^2d}{a^7}v^4 + \frac{14b^4 + 6abd - 21ab^2c + 3a^2c^2 - a^3e}{a^9}v^5 \text{ \&c. in infinit.}$$

SCHOLION.

331. *Illud per ſe patet, ſi termini quidam defuerint in æquatione propoſita, eosdem quoque in radice deſiderari debere.* E. gr. *ſi fuerit* $v = ax + cx^3 + ex^5$ &c. erit $x = \frac{v}{a} - \frac{acv^3}{a^5} + \frac{3a^2c^2 - a^3ev^5}{a^9}$ &c.

CAP. VI.

DE ALGEBRA AD GEOMETRIAM SUBLIMIOREM APPLICATA.

DEFINITIO 18.

332 PEr *Geometriam ſublimiorem* intelligo eam Geometriæ partem, quæ de lineis curvis & ſolidis inde genitis tractat.

DEFINITIO 19.

Tab. III. Fig. 36. 333. *Diameter* curvæ eſt recta AD rectas MM inter ſe parallelas bifariam ſecans in P. In ſpecie *Axis* vocatur, ſi rectas æquidiſtantes ad angulos rectos ſecet.

DEFINITIO 20.

334. *Vertex Curvæ* eſt punctum A, ex quo ducitur diameter.

DEFINITIO 21.

335. *Ordinatim applicatæ* ſunt lineæ æquidiſtantes MM, quæ a diametro bifariam ſecantur. Earum dimidia PM vocantur *ſemiordinatæ.*

DEFINITIO 22.

336. *Abſciſſa* AP eſt pars diametri inter verticem aut aliud punctum fixum & ſemiordinatam PM intercepta. Quidam *ſagittam* vocant.

DEFINITIO 23.

Tab. III. Fig. 37. 337. *Diameter transverſa* AB eſt recta quæ utrinque intra curvas continuata rectas intra easdem æquidiſtantes MM bifariam ſecat.

DEFINITIO 24.

338. *Diameter conjugata* eſt recta, quæ alteri diametro æquidiſtantes bifariam ſecat.

DEFINITIO 25.

339. *Quantitates variabiles* ſunt, quæ creſcentibus aliis vel decreſcentibus aut creſcunt, aut decreſcunt. E. gr. ſemiordinata PM & abſciſſa AP circuli ſunt quantitates variabiles: una enim creſcente creſcit etiam altera. *Quantitates conſtantes* ſunt, quæ creſcentibus aliis vel decreſcentibus eædem manent. Ita ſemidiameter circuli AC eſt quantitas conſtans: creſcentibus enim abſciſſis & ſemiordinatis AP & PM ſemper eadem manet. Tab. III. Fig. 38.

HYPOTHESIS 8.

340. *Quantitates conſtantes primis alphabeti litteris indigitentur* a, b, c &c. *variabiles vero ultimis* z, y, x &c. *Speciatim* x *abſciſſam,* y *ſemiordinatam denotet, niſi aliud expreſſe moneatur.*

DEFINITIO 26.

341. *Curva Algebraica* eſt, in qua

ib. II. g. 36.

qua relatio abſciſſarum AP ad ſemiordinatas per æquationem Algebraicam explicari poteſt. Sit e. gr. in circulo $AB = a$, $AP = x$, $PM = y$, erit $PB = a-x$, conſequenter ob $PM^2 = AP.PB$ (§.312.359. *Geom.*), $y^2 = ax-x^2$.

ab. II. ig. 8.

Vel ſit $PC = x$, $AC = a$, $PM = y$; erit (§. 394. *Geom.*) $MC^2 = -PC^2, = PM^2$ hoc eſt, $a^2 - x^2 = y^2$.

SCHOLION. 1.

342. *Dicuntur æquationes algebraicæ, quæ determinati ſunt gradus, ita ut æquatio ſemper eadem maneat in ſingulis punctis curvæ.*

SCHOLION 2.

343. *Vulgo cum* Carteſio (g) *lineas algebraicas* Geometricas *vocant, quod eas tantum ad conſtruenda problemata admittant adeoque in Geometriam recipiant. Aliter vero nobis videtur non refragantibus ſummis in re Geometrica arbitris* Leibnitio *atque* Nevvtono (h). *Nimirum in conſtructione problematum curva una alteri præferenda, non quod per ſimpliciorem æquationem definitur quam altera; ſed quod facilius deſcribi poteſt.*

DEFINITIO 27.

344. *Curva tranſcendens* eſt, quæ per æquationem algebraicam definiri nequit.

SCHOLION.

345. *Curvæ tranſcendentes ab aliis* Carteſii *exemplo dicuntur* mechanicæ *& ex Geometria ejiciuntur, aliter ſentientibus viris ſummis* Leibnitio *atque* Nevvtono, *ob rationem ante* (§. 343) *allatam. Invenit quoque* Leibnitius *novum æquationum tranſcendentium genus, quibus curvæ tranſcendentes definiuntur & quæ ſunt gradus indefiniti, hoc eſt, non conſtanter eædem in omnibus curvæ punctis* (i).

DEFINITIO 28.

346. *Curvæ algebraicæ ejusdem generis* ſunt, quarum æquationes ad eandem dimenſionem aſſurgunt. Cum vero ſola æquatio, quæ rectam definit, unius dimenſionis eſſe poſſit; *Curva primi generis* vocatur, in qua æquatio ad duas dimenſiones aſſurgit; ſi ad tres, *curva ſecundi generis*; ſi ad quatuor, *curva tertii generis* &c. E. gr. æquatio pro circulo eſt $y^2 = ax - x^2$, vel etiam $a^2 - x^2 = y^2$ (§. 295). Eſt ergo circulus curva primi generis. Similiter curva primi generis eſt, quæ definitur per æquationem $ax = y^2$. Sed curva ſecundi generis eſt, quam definit æquatio $a^2x = y^3$.

DEFINITIO 29.

347. *Familia curvarum* vocatur plurium curvarum diverſi generis congeries, quæ omnes per eandem æquationem indeterminati gradus, ſed pro diverſitate generis diverſimode explicandi definiuntur. E. gr. Sit æquatio indeterminati gradus $a^{m-1}x = y^m$. Si $m = 2$, erit $ax = y^2$. Si $m = 3$, erit $a^2x = y^3$; ſi $m = 4$, erit $a^3x = y^4$ &c. in infinitum. Omnes iſtæ curvæ dicuntur ejusdem familiæ.

(g) lib. 2. p. m. 17. & ſeq.
(h) Act. Erudit. Lipſ. A. 1708. p. 525.
(i) Act. Erudit. Lipſ. A. 1684. p. 234. 235.

SCHOLION.

348. *Æquationes, per quas curvarum familiæ definiuntur, cum tranſcendentibus non ſunt confundendæ. Licet enim intuitu totius familiæ ſint gradus indeterminati; cujuslibet tamen ex familia curvæ reſpectu gradum determinatum habent, cum æquationes tranſcendentes reſpectu ejusdem curvæ indefiniti gradus exiſtant* (§. 345).

COROLLARIUM.

349. Omnes adeo curvæ algebraicæ familiam quandam componunt, ex innumeris aliis conſtantem, quarum unaquælibet infinita genera complectitur. Cum enim æquationes, per quas curvæ definiuntur, ingrediantur facta vel ex potentiis abſciſſarum & ſemiordinatarum in coëfficientes datos, vel ex potentiis abſciſſarum in potentias ſemiordinatarum, vel ex meris quantitatibus datis, omnes vero æquationes nihilo æquales fieri poſſint (e. gr. ſi $ax = y^2$, erit $ax - y^2 = 0$); æquatio pro omnibus curvis algebraicis erit $ay^m + bx^n + cy^r x^s + df = 0$. Signum + in omnibus terminis retinetur, quia in caſibus ſingularibus infinitæ variationes occurrere poſſunt.

DEFINITIO 30.

350. *Sectiones conicæ* ſunt lineæ curvæ, quæ ex coni ſectione oriuntur.

SCHOLION

351. *Sectiones conicæ præter circulum ſunt tres* Parabola, Hyperbola & Ellipſis. *Nos præcipuas earum proprietates, quæ ſcilicet frequentioris ſunt uſus, ex æquationibus eas definientibus per calculum algebraicum eruemus, quia nobis propoſitum eſt, Algebræ ad Geometriam ſublimiorem applicationem exemplis docere, licet non diffiteamur, communes earum proprietates una eademque opera demonſtrari, ſi in ſolido ſeu in cono, ex quo ſecantur, conſiderentur.*

DEFINITIO 31.

352. *Parabola* eſt curva, in qua $ax = y^2$, hoc eſt, quadratum ſemiordinatæ æquatur rectangulo ex abſciſſa in rectam conſtantem, quæ axis *Parameter*, ab aliis *Latus rectum* dicitur.

SCHOLION

353. *Hanc proprietatem parabolæ competere aſſumimus reſpectu axis: quod vero etiam ipſi competere debeat reſpectu cujuslibet diametri, inferius demonſtrabitur.*

COROLLARIUM 1.

354. Eſt ergo parabola curva primi generis & creſcentibus abſciſſis creſcunt ſemiordinatæ, conſequenter curva in ſe non redit.

COROLLARIUM 2.

355. Et in ea $x = y^2 : a$ atque $a = y^2 : x$, hoc eſt, abſciſſa eſt tertia proportionalis ad parametrum & ſemiordinatam, parameter vero tertia proportionalis ad abſciſſam & ſemiordinatam.

COROLLARIUM 3.

356. Porro $\sqrt{ax} = y$, hoc eſt, ſemiordinata eſt media proportionalis inter parametrum & abſciſſam.

CORO-

COROLLARIUM 4.

357. Data itaque parametro AB deſcribi poteſt parabola. Continuetur enim parameter AB in C & in B erigatur perpendicularis infra lineam AC continuanda in N. Ex centris ad libitum aſſumtis circino usque ad A aperto ducantur arcus, rectam BV in I, II, III, IV, V &c. rectam vero BC in 1, 2, 3, 4, 5 &c. interſecantes: erunt B1, B2, B2, B3, B4, B5 &c. abſciſſæ, BI, BII, BIII, BIV, BV &c. ſemiordinatæ (§. 312. *Geom.*) Quare ſi lineæ B1, B2, B3 &c. ex recta BC in BN transferantur & in punctis 1, 2, 3 &c. normales applicentur 1I = BI, 2II = BII, 3III = BIII &c. curva per puncta I, II, III &c. tranſiens parabola eſt: PN vero ejus axis (§. 352).

COROLLARIUM 5.

358. Quodlibet etiam punctum parabolæ geometrice determinari poteſt. E. gr. quæritur, utrum punctum M ſit in parabola nec ne. Demittatur ex M ad BN perpendicularis PM & fiat PN parametro AB æqualis. Super BN deſcribatur ſemicirculus. Quodſi enim is tranſeat per M; erit punctum M in parabola (§. 312. *Geom.* & §. 352. *Analyſ.*).

DEFINITIO 32.

Tab. III. Fig. 40. 359. *Focus* eſt punctum axis F, in quo ſemiordinata FN æquatur ſemiparametro.

PROBLEMA 165.

360. *Invenire diſtantiam Foci a vertice* AF.

Sit AF = x, parameter = a, erit FN = $\frac{1}{2}a$ (§. 359), conſequenter

$$\frac{1}{4}a^2 = ax \text{ (§. 352)}$$
$$\overline{\qquad\qquad} \quad a$$
$$\frac{1}{4}a = x$$

Theorema. In Parabola diſtantia foci a vertice AF eſt ad parametrum in ratione ſubquadrupla.

COROLLARIUM.

361. Quoniam $y^2 = ax$ (§. 352): quadratum ſemiordinatæ eſt quadruplum rectanguli ex diſtantia foci a vertice in abſciſſam.

PROBLEMA 166.

Tab. III. Fig. 40. 362. *Determinare quantitatem rectæ* FM *ex foco* F *ad extremitatem ſemiordinatæ* M *ductæ.*

Quoniam AF = $\frac{1}{4}a$ (§. 360), AP = x (§. 296); erit PF = $x - \frac{1}{4}a$ vel $\frac{1}{4}a - x$, ſi AF > PM, conſequenter

$$PF^2 = x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{4}a^2$$
$$PM^2 = ax \quad \text{(§. 352)}$$
$$FM^2 = x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 \quad \text{(§. 394. Geom.)}$$
$$FM = x + \frac{1}{4}a.$$

Theorema. Recta FM ex foco F ad extremitatem ſemiordinatæ parabolæ ducta æquatur aggregato ex abſciſſa AP & diſtantia foci a vertice AF.

CORO-

COROLLARIUM 1.

363. Si quarta pars parametri ex A in f & F transfertur & per AD parallelæ quotcunque ipſi in punctis P normales MM aguntur, tandemque ex F intervallo Pf puncta M determinantur; curva per hæc puncta tranſiens eſt parabola.

COROLLARIUM 2.

Tab. III. Fig. 41. 364. Poteſt ergo parabola etiam continuo motu deſcribi. Nimirum aſſumta recta pro axe fiat $fA = AF = \frac{1}{4}a$. In A firmetur regula DB ſecans axem fD ad angulos rectos. Extremitati regulæ alterius EC alligetur filum, altero ſui extremo in foco F fixum, quod ſit $= AD + AF$. Quodſi ſtylo ad regulam EC applicato regula EC juxta ductum alterius DB dextrorſum & dein ſiniſtrorſum promoveatur; ſtylus parabolam deſignabit. Eſt enim conſtanter $FM = EM = Pf = x + \frac{1}{4}a$, conſequenter punctum M in parabola.

PROBLEMA 167.

365. *Invenire rationem ſemiordinatarum in Parabola.*

Sint abſciſſæ x & v, ſemiordinatæ y & z; erit $y^2 = ax$ & $z^2 = av$ (§. 352), conſequenter

$$y^2 : z^2 = ax : av$$

$$y^2 : z^2 = x : v \quad (\S. 104)$$
$$y : z = \sqrt{x} : \sqrt{v}$$

Theorema. Quadrata ſemiordinatarum ſunt inter ſe ut abſciſſæ: ipſæ autem ſemiordinatæ in ratione ſubtripli-cata abſciſſarum.

PROBLEMA 168.

Tab. III. Fig. 40. 366. *Determinare quantitatem rectanguli ex ſumma duarum ſemiordinatarum* $PM + pm$ *in differentiam earundem* Rm.

$$PM + pm = \sqrt{ax} + \sqrt{av} \quad (\S. 365.$$
$$mR = \sqrt{av} - \sqrt{ax} \quad 352.)$$

$$(PM + pm)\, mR = av - ax = a(v - x)$$

Theorema. Rectangulum ex ſumma duarum ſemiordinatarum in differentiam earundem æquatur rectangulo ex parametro in differentiam abſciſſarum.

COROLLARIUM.

367. Eſt ergo parameter ad ſummam duarum ſemiordinatarum, ut earundem differentia ad differentiam abſciſſarum (§. 269. *Arithm.*).

PROBLEMA 169.

368. *Determinare quantitatem rectanguli ex ſemiordinata in abſciſſam.*

Tab. III. Fig. 40. Quoniam $PM = \sqrt{ax}$ (§. 356); erit $PM.AP = x\sqrt{ax} = \sqrt{ax^3}$ (§. 57). Quare cum ſit $ax : \sqrt{ax^3} = \sqrt{ax^3} : x^2$, hoc eſt, $ax : x\sqrt{ax} = \sqrt{ax^3} : x^2$; erit $a : \sqrt{ax} = \sqrt{ax^3} : x^2$ (§. 104).

Theorema. In parabola eſt rectangulum ex ſemiordinata in abſciſſam ad qua-

quadratum abſciſſæ ut parameter ad ſemiordinatam.

PROBLEMA 170.

369. *Determinare quantitatem rectanguli ex abſciſſa una in alteram.*

Sit abſciſſa una $= x$, altera $= v$; ſemiordinata una $= y$, altera $= z$; erit $x = y^2 : a$ & $v = z^2 : a$ (§. 355), conſequenter $xv = y^2 z^2 : a^2$, adeoque $a^2 : y^2 = z^2 : xv$.

Theorema. In parabola quadratum parametri eſt ad quadratum ſemiordinatæ unius, ut quadratum ſemiordinatæ alterius ad rectangulum abſciſſarum.

DEFINITIO 33.

Tab. III. Fig. 42. 370. Si TM curvam tangit in M, ducatur MR ad tangentem normalis; recta PT inter tangentem TM & ſemiordinatam PM intercepta *Subtangens* vocatur: quæ vero inter ſemiordinatam & normalem intercipitur PR, *Subnormalis* audit.

COROLLARIUM.

371. Eſt adeo TMR triangulum rectangulum (§. 87. *Geom.*), adeoque ob PM ad AR normalem (§. 314. *Geom.*), PR : PM = PM : PT & PM : PT = MR : TM.

PROBLEMA 171.

Tab. III. Fig. 42. 372. *Determinare quantitatem ſubtangentis PT & ſubnormalis PR in Parabola.*

Sit AP $= x$, MR ad tangentem TM perpendicularis $= t$, RA $= v$, erit PR $= v - x$, PM$^2 = ax$ (§. 352) & (§. 394 *Geom.*)

$$ax = t^2 - v^2 + 2vx - x^2$$

hoc eſt
$$x^2 - 2vx + v^2 = 0$$
$$+ ax - t^2$$

Eadem æquatio provenit, ſi recta TM parabolam ſecet, & quidem ad utrumque ſectionis punctum. Quoniam itaque in puncto contactus duo illa puncta coincidunt; æquatio duas radices æquales habere debet, coincidentibus nimirum etiam abſciſſis per x deſignatis. Quare ſi fiat $x = z$ ſeu $x - z = 0$ & inde formetur æquatio $x^2 - 2zx + z^2 = 0$, duas æquales radices continens (§. 292); hæc cum antea inventa eadem eſſe debet, conſequenter

$$-2z = -2v + a$$

Ergo ob $z = x$) $x = v - \frac{1}{2}a$

$$\tfrac{1}{2}a = v - x = PR$$

Porro (§. 371) PR : PM = PM : PT

$$\tfrac{1}{2}a : y = y : \frac{2y^2}{a} = 2x \text{ (§. 355).}$$

Theorema. In parabola ſubtangens PT eſt abſciſſæ AP dupla; ſubnormalis vero PR parametri ſubdupla, adeoque conſtans.

COROLLARIUM.

373. Quoniam TA $= x$ & diſtantia foci a vertice AF $= \frac{1}{4}a$ (§. 360); erit TF Tab. III. Fig. 42.

$TF = \frac{1}{4}a + x$. Ergo recta FM ex foco F ad punctum contactus M ducta æquatur rectæ TF (§. 362), conſequenter TFM triangulum æquicrurum.

PROBLEMA 172.

374. *Ducta* ON *tangenti* TM, & MG *axi* AQ *parallela, determinare rationem ſegmentorum* HF & FN.

Tab. III. Fig. 43.

Sit $AP = AT = x$, erit $PM = \sqrt{ax}$ (§. 356) $PT = IO$ (ob $TO = MF = PI$ (§. 242 *Geom.*) $= 2x$ (§. 372). Sit $MF = PI = v$, erit $TI = v + 2x$, $IA = v + x$. Sit denique $IQ = FG = t$, erit $OQ = OI + IQ = 2x + t$, $QA = x + v + t$, & hinc $QN^2 = ax + av + at$ (§. 352). Porro (§. 253 *Geom.*).

$OI : IF = OQ : QN$

h. e. $OI^2 : IF^2 = OQ^2 : QN^2$

$4x^2 \quad ax \quad (2x+t)^2$

$4x : a \quad (2x+t)^2 \quad \frac{a(2x+t)^2}{4x}$

Eſt itaq; $a(x+v+t) = a(2x+t)^2 : 4x$

$4x^2 + 4xv + 4tx = 4x^2 + 4tx + t^2$

$4xv = t^2$

Quodſi LI dicatur t; reperietur eodem modo $t^2 = 4xv$, reliquis manentibus iisdem. Unde patet, eſſe $LI = IQ$. Eſt vero (§. 252. & 253 *Geom.*).

$FN : FG = OH : HL$

$OH : HL = HN : LQ$

$FN : FG = HN : LQ$ (§. 156 *Arithm.*)

$FN : HN = FG : LQ$ (§. 164 *Arithm.*)

Sed $FG = \frac{1}{2}LQ$, *per demonſtr.* Ergo $FH = FN$.

Theorema. Si recta HN tangenti TM parallela ducatur, recta MG ex puncto contactus M cum axe parallela ducta eam bifariam ſecat in F.

COROLLARIUM 1.

375. Eſt ergo MG diameter, HN ejus ordinata, MF abſciſſa (§. 333). Tab. III. Fig. 43.

COROLLARIUM 2.

376. Quoniam (§. 252 *Geom.*)

$OI : FI = FG : GN$

$2x \quad \sqrt{ax} \quad \sqrt{4vx} \quad \sqrt{av}$

& (§. 394 *Geom.*) $FN^2 = FG^2 + GN^2$: erit $FN^2 = 4vx + av = (a+4x)v$. Jam cum $FM = v$, $a + 4x$ eſt parameter diametri, & quadratum etiam ad diametrum applicatæ æquale rectangulo ex parametro in abſciſſam.

COROLLARIUM. 3.

377. Recta ex foco ad verticem diametri M ducta eſt $\frac{1}{4}a + x$ (§. 362); diameter ergo parametri eſt rectæ illius quadrupla.

DEFINITIO 34.

378. *Ellipſis* eſt linea curva, in qua quadratum ſemiordinatæ PM eſt ad rectangulum ex ſegmentis axis AP & PB ut parameter ad axem, hoc eſt, ſi $AB = a$, parameter Tab. III. Fig. 44.

$= b$,

$=b$, PM $=y$, AP $=x$, erit $b:a=y^2:ax-x^2$ adeoque $ay^2=abx-bx^2$.

COROLLARIUM 1.

379. Eſt ergo $y^2=bx-bx^2:a$, hoc eſt, quadratum ſemiordinatæ æquatur rectangulo ex parametro in abſciſſam, demto tamen alio rectangulo ex eadem abſciſſa in quartam proportionalem ad axem, parametrum & abſciſſam.

COROLLARIUM 2.

380. Quia $ay^2=abx-bx^2$

erit $bx^2=abx-ay^2$

$bx^2:(bx-y^2)=a$

Invenitur ergo axis ex parametro, abſciſſa & ſemiordinata datis, ſi fiat 1. $b:y=y:\frac{y^2}{b}$, 2. $x-\frac{y^2}{b}=(bx-y^2):b\;x=x:a$.

COROLLARIUM 3.

381. Quia $ay^2=abx-bx^2$

erit $ay^2:(ax-x^2)=b$

Datis ergo axe AB, abſciſſa AP & ſemiordinata PM, ita invenitur parameter AG. 1. Fiat AI $=$ PM & ex A per M ducatur recta AL. 2. In I erigatur perpendicularis LI; erit (§. 353. *Geom.*) ob AP : PM $=$ AN : LI; LI $=y^2:x$. 3. Producatur PM in O, donec PO $=$ LI $=y^2:x$, & ex B per O ducatur recta BG. 4. In A excitetur perpendicularis GA $=$ (ob BP : PO $=$ BA : GA) $ay^2:(ax-x^2)$: quæ erit parameter AG.

COROLLARIUM 4.

382. $y=\sqrt{(abx-bxx)}:\sqrt{a}$. Datis itaque axe AB & parametro AG, cuilibet abſciſſæ BP ſemiordinata PN aſſignatur, ſi parametro AG axi AB ad angulos rectos juncta ducatur GB & erecta perpendiculari PN, fiat PL $=$ PH, tandemque ſuper AL ſemicirculus deſcribatur. Eſt enim AB $[a]$: GA $[b]$ $=$ BP $[x]$: PH $[bx:a]$ & PN $=\sqrt{(AP.PL)}=\sqrt{(a-x,bx:a)}=\sqrt{(bx-bx^2:a)}$.

PROBLEMA 173.

383. *Invenire diſtantiam foci a vertice* AF. Tab. III. Fig. 44.

Sit AB $=a$, parameter $=b$, AF $=x$, erit FR $=\frac{1}{2}b$ (§. 359) &

$$\frac{1}{4}ab^2=abx-bx^2$$

$$\frac{1}{4}ab=ax-x^2$$

$$x^2-ax=-\frac{1}{4}ab$$

$$\frac{1}{4}a^2 \qquad \frac{1}{4}a^2$$

$$x^2-ax+\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}ab$$

$$\frac{1}{2}a-x=\sqrt{(\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}ab)}$$

$$\frac{1}{2}a-\sqrt{(\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}ab}=x$$

Conſtructio. Ex B in L transferatur dimidia parameter, erit CL $=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$. In centro C erigatur perpendicularis CK occurrens ſemicirculo ſuper AL

 deſcri-

deſcripto, erit $CK = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)}$. Fiat itaque $CF = CK$; erit in F focus.

Æquatio ſecunda ſequens ſuppeditat

Theorema: Si axis AB in foco F ſecetur; erit rectangulum ex ſegmentis axis AF.FB ſubquadruplum rectanguli ex parametro in axem.

COROLLARIUM.

384. Diſtantia foci a centro eſt $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)}$, hoc eſt, quadratum ejus æquatur rectangulo ex axe dimidio in differentiam ſemiparametri a dimidio axe.

PROBLEMA 174.

Tab. III. Fig. 44. 385. *Datis parametro & axe* AB *invenire dimidium axem conjugatum* DC.

Sit parameter $= b$, $AB = a$, $DC = \frac{1}{2}z$: erit (§. 378).

$$\frac{1}{4}z^2 : \frac{1}{4}a^2 = b : a$$

$$z^2 : a^2 = b : a$$

$$z^2 = ab$$

$$z = \sqrt{ab}$$

Theorema. In ellipſi axis conjugatus eſt medius proportionalis inter axem & parametrum.

COROLLARIUM 1.

386. Parameter itaque eſt tertia proportionalis ad axem majorem & minorem.

COROLLARIUM 2.

387. Quoniam $\frac{1}{4}z^2 = \frac{1}{4}ab$ (§. 385) & $\frac{1}{4}ab = AF.FB$ (§. 383); erit etiam $\frac{1}{4}z^2 = CD^2 = AF.FB$, hoc eſt, quadratum dimidii axis conjugati æquatur rectangulo ex diſtantia foci a vertice in ejus complementum ad axem.

PROBLEMA 175.

388. *Invenire rationem ordinatarum* PM & pm *in ellipſi*. Tab. III. Fig. 44.

Sit $AB = a$, parameter $= b$, $AP = x$, $PM = y$, $Ap = z$, $pm = v$; erit

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = bx - bx^2 : a \\ v^2 = bz - bz^2 : a \end{array}\right\} (\S.\ 379).$$

Ergo $y^2 : v^2 = bx - \frac{bx^2}{a} : bz - \frac{bz^2}{a}$

h. e. $y^2 : v^2 = ax - x^2 : az - z^2$

ſeu $PM^2 : pm^2 = AP.BP : Ap.pB$

Theorema. In ellipſi quadrata ſemiordinatarum ſunt inter ſe ut rectangula ex axis ſegmentis.

COROLLARIUM 1.

389. Eſt igitur etiam $DC^2 : PM^2 = CB^2 : AP.PB$, conſequenter $DC^2 : CB^2 = PM^2 : AP.PB$ (§. 164. *Arithm.*), hoc eſt, quadratum axis minoris eſt ad quadratum majoris ut quadratum ſemiordinatæ ad rectangulum ex axis ſegmentis.

COROLLARIUM. 2.

390. Sit $CP = x$, erit $AP = \frac{1}{2}a - x$ & $PB = \frac{1}{2}a + x$, conſequenter $AP.PB = \frac{1}{4}a^2 - x^2$. Habemus adeo (§. 389).

$$\tfrac{1}{4}ab : \tfrac{1}{4}a^2 = y^2 : \tfrac{1}{4}a^2 - xx$$

hoc eſt $b : a = y^2 : \tfrac{1}{4}a^2 - x^2$

$$ay^2 = \tfrac{1}{4}a^2 b - bx^2$$

$$y^2 = \tfrac{1}{4}ab - bx^2 : a$$

En æquationem aliam, quæ naturam ellipſis definit, abſciſſis a centro C computatis.

COROLLARIUM 3.

391. Sit $CD = d$, $AC = r$, $PC = x$, erit $AP = r - x$ & $PB = r + x$, conſequenter $AP.PB = r^2 - x^2 = AC^2 - PC^2$. Habemus ergo ut ante

$$d^2 : r^2 = y^2 : r^2 - x^2$$

unde $r^2 y^2 = d^2 (r^2 - x^2)$

$$y^2 = d^2 (r^2 - x^2) : r^2$$

En æquationem adhuc aliam, quæ itidem ellipſis naturam definit, abſciſſis denuo a centro C computatis, & qua in ſubſequentibus ob commoditatem utemur.

COROLLARIUM. 4.

392. Creſcentibus adeo abſciſſis x, ſemiordinatæ decreſcere debent. Quod ſi tandem fiat $x = r$; erit $r^2 - x^2 = 0$, conſequenter $y^2 = 0$, adeoque ellipſis cum axe tandem concurrit. Unde porro intelligitur, ellipſin eſſe lineam in ſe redeuntem.

PROBLEMA 176.

393. *Determinare quantitatem rectæ DF ex foco F ad extremitatem axis conjugati D ductæ.* Tab. IV. Fig. 46.

Sic parameter $= b$, $AB = a$; erit $FC^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}ab$ (§. 384) & $CD^2 = \tfrac{1}{4}ab$ (§. 385.). Ergo $FD^2 = \tfrac{1}{4}a^2$ (§. 394. *Geom.*), conſequenter $FD = \tfrac{1}{2}a = AC$.

Theorema. Recta FD ex foco F ad extremitatem ſemi axis conjugati ducta æquatur ſemiaxi transverſo AC.

COROLLARIUM

394. Datis ergo axibus conjugatis, foci haud difficulter determinantur. Dividatur enim axis major AB bifariam in C, ex C erigatur perpendicularis CD ſemiaxi conjugato æqualis, tandemque ex D intervallo CA foci F & f determinentur.

PROBLEMA 177.

395. *Determinare quantitatem rectarum FM & fM ex utroque foco F & f ad idem peripheriæ punctum M ductarum.* Tab. IV. Fig. 46.

Sint $FC = fC = c$, reliqua ut ante: erit $PC = \tfrac{1}{2}a - x$, $Pf = c + \tfrac{1}{2}a - x$, $PF = c - \tfrac{1}{2}a + x$, adeoque $PF^2 = c^2 - ac + \tfrac{1}{4}a^2 + 2cx - ax + x^2$, $Pf^2 = c^2 + ac + \tfrac{1}{4}a^2 - 2cx - ax + x^2$. Eſt vero (§. 389.).

$$CB^2 : DC^2 = AP.PB : PM^2$$
$$\tfrac{1}{4}a^2 : \tfrac{1}{4}a^2 - c^2 = ax - xx : PM^2$$

(§. 393. *Analyſ.* & 394 *Geom.*).

Habemus adeo

$$PM^2 = ax - xx - \frac{4ccx}{a} + \frac{4ccxx}{aa}$$
$$PF^2 = cc - ac + \tfrac{1}{4}aa + 2cx - ax + xx$$
$$FM^2 = cc - ac + \tfrac{1}{4}aa + 2cx - \frac{4ccx}{a} + \frac{4c^2x^2}{aa}$$
$$FM = \tfrac{1}{2}a - c + 2cx : a$$

Porro

$$PM^2 = ax - xx - \frac{4ccx}{a} + \frac{4ccxx}{aa}$$
$$Pf^2 = cc + ac + \tfrac{1}{4}aa - 2cx - ax + xx$$
$$fM^2 = cc + ac + \tfrac{1}{4}aa - 2cx - \frac{4ccx}{a} + \frac{4c^2x^2}{aa}$$
$$fM = \tfrac{1}{2}a + c - 2cx : a$$
$$FM = \tfrac{1}{2}a - c + 2cx : a$$
$$fM + FM = a = AB$$

Theorema. Summa rectarum FM & fM ex utroque foco F & f ad idem peripheriæ punctum M ductarum æquatur axi majori AB.

COROLLARIUM.

396. Datis ergo axibus conjugatis ellipſis facillime deſcribitur. Determinatis enim focis F & f (§. 394), clavi in iis deſigantur & his filum circumligetur FMf axi majori AB æquale. Quodſi immiſſo ſtylo filum extendatur & circa clavos circumducatur, ellipſis deſignabitur.

PROBLEMA 178.

397. *Determinare quantitatem rectæ MR ex quovis ellipſis puncto M ad axem conjugatum DC perpendicularis.* Tab. III. Fig. 44.

Sit MR = PC = v, AC = r, erit AP = $r - v$ & PB = $r + v$. Sit DR = z, DC = c, erit RC = PM = $c - z$, conſequenter (§. 389.)

$$DC^2 : CB^2 = PM^2 : AP.PB$$
$$cc : rr = z^2 - 2cz + c^2 : r^2 - v^2$$
$$c^2 : z^2 - 2cz + c^2 = r^2 : r^2 - v^2 \quad (\text{§. 164. Arithm.})$$
$$2cz - z^2 : c^2 = v^2 : r^2 \quad (\text{§. 183. Arithm.})$$
$$2cz - z^2 : v^2 = c^2 : r^2 \quad (\text{§. 164. Arithm.})$$
$$DR.RE : RM^2 = DC^2 : AC^2.$$

Theorema. Rectangulum ex ſegmentis axis conjugati eſt ad quadratum ſemiordinatæ ipſius ut quadratum axis conjugati ad quadratum axis majoris.

COROLLARIUM I.

398. Habent ergo ad axem conjugatum coordinatæ eandem relationem, quæ inter coordinatas ad axem majorem intercedit.

COROLLARIUM 2.

399. Quoniam $v^2 = \frac{2r^2z}{c} - \frac{r^2z^2}{c^2}$ (§. 397); ſi fiat $2r^2 : c = p$, erit $v^2 = pz - pz^2 : c$. Eſt adeo p parameter axis conjugati (§. 378) quare parameter axis conjugati eſt tertia proportionalis ad $2c$ & $2r$, ſeu ad axem conjugatum & axem majorem.

PRO-

PROBLEMA 179.

400. *Determinare ſubtangentem PT & ſubnormalem PR in Ellipſi.*

Eadem prorſus methodo utendum, qua in parabola uſi ſumus. Nimirum ſit Parameter $=b$, axis major $=a$, AP $=x$, PM $=y$, MR $=t$, RA $=z$; erit PR $=z-x$, conſequenter PM² $=t^2-z^2+2zx-x^2$. Eſt vero etiam PM² $=bx-bx^2:a$ (§. 379). Quare

$$t^2-z^2+2zx-x^2=bx-bx^2:a \qquad a$$

$$at^2-az^2+2azx-ax^2=abx-bx^2$$

$$ax^2-bx^2+abx-2azx+az^2-at^2=0 \qquad a-b$$

$$x^2+\frac{(ab-2az)}{a-b}x+\frac{az^2-at^2}{a-b}=0$$

Cum ex ſuperioribus conſtet, æquationem hanc duas habere debere radices æquales: ponatur ut ſupra (§.372) $x-v=0$, erit $x^2-2vx+v^2=0$, æquatio eadem cum anteriore, conſequenter

$$(ab-2az):(a-b)=-2v \qquad a-b$$

$$ab-2az=-2av+2bv$$

$$ab+2av-2bv=2az \qquad 2a$$

$$\tfrac{1}{2}b+v-bv:a=x$$

Eſt vero $v=x$, *per hypoth.* Quare ſi x pro v ſubſtituatur, prodibit $z=\frac{1}{2}b+x-bx:a=$ AR. Ergo PR $=\frac{1}{2}b+x-bx:a-x=\frac{1}{2}b-bx:a=(\frac{1}{2}ab-bx):a$, quæ expreſſio hanc ſuppeditat analogiam:

$$a:\tfrac{1}{2}a-x=b:\text{PR}$$

hoc eſt $a:b=\frac{1}{2}a-x:$ PR

Theorema: In ellipſi eſt ut axis primus ad parametrum ita diſtantia ſemiordinatæ a centro ad ſubnormalem.

Porro PR : PM = PM : PT (§.371).

$$\frac{\frac{1}{2}ab-bx}{a}:y=y:\frac{ay^2}{\frac{1}{2}ab-bx}$$

Eſt vero $ay^2=abx-bx^2$ (§.378). Ergo PT $=(abx-bx^2):(\frac{1}{2}ab-bx)=(ax-x^2):(\frac{1}{2}a-x.)$ Habemus adeo

$$\tfrac{1}{2}a-x:a-x=x:\text{PT}$$

$$\text{PC}:\text{PB}=\text{AP}:\text{PT}$$

Ergo $\quad$ PC. AP = BP.PT

Theorema. In ellipſi rectangulum ex ſegmentis axis æquatur rectangulo ex diſtantia ſemiordinatæ a centro in ſubtangentem.

Tandem AT = PT - AP $=(ax-x^2):(\frac{1}{2}a-x)-x=(ax-x^2-\frac{1}{2}ax+x^2):(\frac{1}{2}a-x)=\frac{1}{2}ax:(\frac{1}{2}a-x)$. Quare

$$\tfrac{1}{2}a-x:\tfrac{1}{2}a=x:\text{AT}$$

$$\text{PC}:\text{AC}=\text{AP}:\text{AT}$$

Theorema: Ut diſtantia ſemiordinatæ a centro ad axem dimidium, ita abſciſſa ad portionem ſubtangentis inter verticem ellipſis & tangentem interceptam.

COROLLARIUM. I.

401. Quia PC : AC = AP : AT;

erit

erit etiam PC : AP = AC : AT (§. 104.), conſequenter PC : PC + PA = AC : CA + AT (§. *cit.*), hoc eſt, PC : AC = AC : CT.

COROLLARIUM 2.

402. Creſcentibus abſciſſis x, decreſcit $\frac{1}{2}a-x$, conſequenter ratio $\frac{1}{2}a-x : \frac{1}{2}a$ minuitur (§. 187. *Arithm.*) Abſciſſa igitur major ad AT rationem minorem habet quam minor.

COROLLARIUM 3.

403. Si $x = \frac{1}{2}a$, hoc eſt, quando AC fit abſciſſa, $\frac{1}{2}a-x = 0$, conſequenter abſciſſa rationem infinitam habet ad AT, adeoque tangens TM cum ſubtangente TP nunquam concurrit. Eſt igitur axi parallelus.

COROLLARIUM 4.

404. Hinc vero ulterius liquet, quantitatem finitam AC reſpectu infinitæ pro nihilo habendam eſſe.

PROBLEMA 180.

Tab. IV. Fig. 47. 405. *Determinare quantitatem rectanguli ex ſubtangente* PT *in abſciſſam* AP.

Sit PC = x, PT = t, AC = r; erit AP = $r-x$ & PB = $r+x$, CT = $t+x$. Quoniam (§. 401)

$$\begin{array}{ccccccc} PC & : & AC & = & AC & : & CT \\ x & & r & & r & & r^2 : x \end{array}$$

$$\text{erit } t+x = r^2 : x$$

$$\overline{}\; x$$

$$tx+xx = r^2$$

$$tx = r^2 - x^2 = AP.PB$$

Theorema. Rectangulum ex ſubtangente PT in abſciſſam AP æquatur rectangulo ex ſegmentis axis.

COROLLARIUM.

406. $r^2 = tx + x^2$, hoc eſt, quadratum ſemiaxis AC æquatur rectangulo ex CT in PC.

PROBLEMA 181.

Tab. IV. Fig. 47. 407. *Determinare valorem ſubtangentis* PT, *abſciſſis a centro computatis.*

Sit AC = r, PC = v, erit PB = $r+v$, AP = $r-v$, conſequenter (§. 400).

$$\begin{array}{ccccccc} PC & : & PB & = & AP & : & PT \\ v & : & r+v & = & r-v & : & t \end{array}$$

$$tv = r^2 - v^2.$$

Theorema. Rectangulum ex ſubtangente & diſtantia ordinatæ a centro æquatur differentiæ quadrati hujus diſtantiæ a quadrato ſemiaxis transverſi.

PROBLEMA 182.

Tab. IV. Fig. 47. 408. *Determinare quantitatem ſubtangentis* KE *in axe conjugato.*

Si tangens TM continuetur, donec axi conjugato continuato in E occurrat, & ex M demittatur perpendicularis MK = PC (§. 223 *Geom.*) erit (§. 252. *Geom.*)

$$\begin{array}{ccccccc} TP & : & PM & = & MK & : & KE \\ \frac{r^2-v^2}{v} & : & y & = & v & : & \frac{v^2 y}{r^2-v^2} \end{array}$$

Quodſi

Quodſi fiat $DC = c$, $DK = z$, erit $KC = PM = y = c - z$ & $v^2 = \frac{2r^2z - r^2z^2}{c^2}$. (§ 397) Hinc $r^2 - v^2 = (c^2r^2 - 2r^2cz + r^2z^2):c^2$ & $v^2y = (2r^2cz - r^2z^2)(c-z):c^2$. Quare $v^2y : (r^2 - v^2) = (2r^2cz - r^2z^2)(c-z) : (c^2r^2 - 2r^2cz + r^2z^2) = (2r^2cz - r^2z^2) : (cr^2 - r^2z) = (2cz - z^2) : (c - z)$.

Expreſſio itaque ſubtangentis in axe conjugato eadem, quæ in transverſo.

PROBLEMA 183.

409. *Si recta* HN *tangenti* TM *parallela ducatur & punctum contactus* M *atque centrum* C *jungantur recta* MC, *quæ* HN *ſecat in* G, *determinare rationem rectarum* HG *&* GN.

Tab. V. Fig. 48.

Sit $PM = y$, $PC = c$, $FG = KD = t$, $GI = KS = z$, erit $IF = HL = DS = t - z$, $HL^2 = t^2 - 2tz + z^2$. Opera nunc danda, ut HL^2 alia adhuc ratione exprimatur. Eſt itaque (§. 253 *Geom.*)

$$PM : PC = FG : FC$$
$$y : t = t : tc:y$$

Et quia Δ TMP $\backsim$ POG (§. 222. & 252. *Geom.*), & GIH $\backsim$ POG (§. §. *cit.*); erit etiam TMP $\backsim$ GIH conſequenter (§. 252. *Geom.*)

$$PM : PT = GI : HI$$
$$y : \frac{ax - x^2}{c} = z : \frac{(ax - x^2)z}{cy} \quad (\text{§. } 400.)$$

Ponamus brevitatis gratia $ax - x^2 = v$; erit $FL = HI = vz : cy$. Ergo $CL = FL + FC = tc : y + vz : cy = (tc^2 + vz) : cy$. Hinc $AL = AC - CL = \frac{1}{2}a - (tc^2 - vz) : cy = (\frac{1}{2}acy - tc^2 - vz) : cy$ & $BL = AB - AL = a - (\frac{1}{2}acy + tc^2 + vz) : cy = (\frac{1}{2}acy + tc^2 + r^2z) : cy$. Eſt vero (§. 388)

$$AP.PB : LA.LB = PM^2 : HL^2$$
$$v : \frac{\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - 2tc^2vz - v^2z^2}{c^2y^2} = y^2 : HL^2$$

Hinc $HL^2 =$

$$\frac{\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - 2tc^2vz - v^2z^2}{c^2v} = t^2 - 2tz + z^2$$

$$\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - 2tc^2vz - v^2z^2 = t^2c^2v - (2tc^2zv + z^2c^2v$$

$$\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - v^2z^2 = t^2c^2v + z^2c^2v$$

$$\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - t^2c^2v = v^2z^2 + c^2vz^2$$

$$\frac{\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - t^2c^2v}{v^2 + c^2v} = z^2$$

Quodſi jam KN dicatur z, reliqua maneant ut ante; reperietur eodem modo $z^2 = \frac{\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - t^2c^2v}{v^2 + c^2v}$, conſequenter $KN^2 = KS^2$, adeoque & $KN = KS$.

Eſt vero (§. 253. *Geom.*) KN : KS $=$ GN : HG. Ergo GN $=$ HG.

Theorema. Si recta HN tangenti TM parallela ducatur, recta MC per contactum M & centrum ellipſis C tranſiens eam bifariam ſecat.

COROLLARIUM 1.

Tab. IV. Fig. 49. 410. Eſt ergo MQ diameter, HN ejus ordinata (§. 333).

COROLLARIUM 2.

411. Cum vero parallelæ HN quamcunque aliam, & rectæ MQ itidem quamcunque aliam ſubſtituere liceat; omnes rectæ per centrum tranſeuntes & in peripheria utrinque terminatæ ſunt diametri, ipſisque coordinatæ ſunt tangentibus parallelæ.

COROLLARIUM 3.

412. Eſt ergo etiam ECV diameter conſequenter MQ & EV ſunt diametri conjugatæ (§. 338).

PROBLEMA 184.

413. *Si ex diametri* VE *tangenti* TM *parallelæ extremitate* V *perpendicularis* VR *demittatur in axem* AB; *determinare quantitatem rectæ* RC.

CA $= r$, CR $= v$, PT $= t$, PC $= x$; erit AR $= r-v$, RB $= r+v$, conſequenter AP.PB $= tx$ (§. 405), AR.RB $= r^2-v^2 = tx+x^2-v^2$ (§. 406). Quoniam VE ipſi TM parallela, *per hypoth.* erit MTC $=$ TCV (§. 222. *Geom.*). Quare cum anguli ad P & R ſint recti, *per conſtruct.* erit PM : TP $=$ RV : RC (§. 252. *Geom.*), adeoque & PM : RV $=$ TP : RC (§. 164. *Arithm.*). Hinc PM² : RV² $=$ TP² : RC² (§. 104). Eſt vero etiam PM² : RV² $=$ AP.PB : AR.RB (§. 388). Ergo (§. 156. *Arithm.*) Tab. IV. Fig. 49.

$$AP.PB : AR.RB = TP^2 : RC^2$$

$$tx : tx+x^2-v^2 = t^2 : v^2$$

$$tv^2x = t^3x + t^2x^2 - t^2v^2 \quad \text{———} t$$

$$v^2x = t^2x + tx^2 - tv^2$$

$$tv^2 + xv^2 = t^2x + tx^2 \quad \text{———} t + x$$

$$v^2 = tx$$

hoc eſt, CR² $=$ AP.PB,

conſequenter AP : CR $=$ CR : PB.

PROBLEMA 185.

Tab. IV. Fig. 49. 414. *Determinare quantitatem ſemiordinatæ* GH *ad diametrum ellipſis* MQ.

Ductis KI ipſi FD & KG ipſi AB parallelis, fiat CP $= x$, AC $= r$, PT $= t$, PM $= y$, KG $=$ IL $= m$, LC $= n$, Erit (§. 253. *Geom.*)

$$CP : PM = CL : LG$$

$$x : y = n : \frac{ny}{x}$$

Porro ob parallelas TM & HN *per conſtr.* S $=$ H (§. 222. *Geom.*) adeoque

eoque T = HGK (§. 231. *Geom.*), conſequenter (§. 252. *Geom.*)

$TP : PM = KG : KH$

$t : y = m : \frac{my}{t}$

$HI = KI - KH = \frac{ny}{x} - \frac{my}{t}$

$CI = CL + LI = n + m$

$HI^2 = \frac{n^2y^2}{x^2} - \frac{2mny^2}{tx} + \frac{m^2y^2}{t^2}$

$CI^2 = n^2 + 2mn + m^2$

$AI.IB = AC^2 - CI^2 = r^2 - n^2 - 2mn - m^2$ (§. 391)

Eſt vero (§. 388)

$AP.PB : AI.IB = PM^2 : HI^2$

$r^2 - x^2 : r^2 - n^2 - 2mn - m^2 = y^2 : HI^2$

Unde eli- $HI^2 = \frac{r^2y^2 - n^2y^2 - 2mny^2 - m^2y^2}{r^2 - x^2}$ citur:

Quare

$\frac{n^2y^2}{x^2} - \frac{2mny^2}{tx} + \frac{m^2y^2}{t^2} = \frac{r^2y^2 - n^2y^2 - 2mny^2 - m^2y^2}{r^2 - x^2}$

Sed $\frac{2mny^2}{tx} = \frac{2mny^2}{r^2 - x^2}$ (§. 405). Ergo

$\frac{n^2y^2}{x^2} + \frac{m^2y^2}{t^2} = \frac{r^2y^2 - n^2y^2 - m^2y^2}{r^2 - x^2}$

——————— y^2

$\frac{n^2}{x^2} + \frac{m^2}{t^2} = \frac{r^2 - n^2 - m^2}{r^2 - x^2}$

——————— x^2

$n^2 + \frac{m^2x^2}{t^2} = \frac{r^2x^2 - n^2x^2 - m^2x^2}{r^2 - x^2}$

———————

$\frac{m^2x^4}{t^2} = \frac{r^2x^2 - n^2x^2 - m^2x^2}{r^2 - x^2} - n^2$

———————

$\frac{m^2x^4}{tx^2} = \frac{r^2x^2 - n^2x^2 - m^2x^2 - r^2n^2 + n^2x^2}{r^2 - x^2}$

$= \frac{r^2x^2 - m^2x^2 - r^2n^2}{r^2 - x^2}$

hoc eſt, ob $t^2x^2 = (r^2 - x^2)^2$ (§. 405)

$m^2x^4 = (r^2x^2 - m^2x^2 - r^2n^2)\ (r^2 - x^2)$

$= r^4x^2 - r^2m^2x^2 - r^4n^2 - r^2x^4 + m^2x^4 + r^2n^2x^2$

———————

$0 = r^4x^2 - r^2m^2x^2 - r^4n^2 - r^2x^4 + r^2n^2x^2$

r^2x^2 ———————

$0 = r^2 - m^2 - \frac{r^2n^2}{x^2} - x^2 + n^2$

———————

$m^2 = r^2 + n^2 - x^2 - \frac{r^2n^2}{x^2}$

Sit jam $CM = v$, erit (§. 253. *Geom.*)

$CP : CM = CL : CG$

$x \quad v \quad n \quad vn : x$

Ergo $MG = MC - CG = v - vn : x$

& $GQ = GC + MC = v + vn : x$

$MG.GQ = v^2 - v^2n^2 : x^2$.

Quodſi $v^2 - v^2n^2 : x^2 = MG.QG$ multiplices per $r^2 - x^2 = CR^2$ & $r^2 + n^2 - x^2 - r^2n^2 : x^2 = KG^2$ per $v^2 = CM^2$; utrobique prodit $r^2v^2 + n^2v^2 - x^2v^2 - r^2n^2v^2 : x^2$. Eſt itaque $MG.QG.CR^2 = KG^2.CM^2$, adeoque (§. 269. *Arithm.*) $KG^2 . CR^2 = MG.QG : CM^2$. Jam ob parallelas EV & HN, *per hypoth.* MCV = MGH

$=$ MGH (§. 222. *Geom.*) & ob parallelas KG & RC, *per conſtr.* MGK $=$ MCR (§ *cit.*). Ergo KGH $=$ RCV (§. 83. *Arithm.*), conſequenter KG^2 : CR^2 $=$ HG^2 : CV^2 (§. 252. *Geom.* & §. 239. *Arithm.*). Unde tandem habetur (§. 156. *Arithm.*) MG. QG : CM^2 $=$ HG^2 : CV^2.

Theorema. In ellipſi eſt quadratum ſemiordinatæ ad quadratum ſemidiametri conjugatæ ut rectangulum ex ſegmentis diametri ad quadratum ſemidiametri.

COROLLARIUM.

415. Sit MQ $= a$, EV $= c$, MG $=$ x, HG $= y$, erit GQ $= a$-x, conſequenter

$$ax - x^2 : \tfrac{1}{4}a^2 = y^2 : \tfrac{1}{4}c^2$$

$$\tfrac{1}{4}c^2 ax - \tfrac{1}{4}c^2 - x^2 = \tfrac{1}{4}a^2 y^2 \quad \tfrac{1}{4}a$$

$$c^2 x - \frac{c^2 x^2}{a} = ay^2$$

Fiat $\frac{c^2}{a} = b$, erit $c^2 = ab$.

Hinc $abx - bx^2 = ay^2$

Eadem ergo eſt relatio ſemiordinatarum ad diametros, quæ ad axem (§. 378) & diametri parameter eſt tertia proportionalis ad diametros.

SCHOLION.

416. *Cum ex hac æquatione fundamentali vel quas ellipſis proprietates reſpectu axis deduxerimus; evidens eſt, omnes quoque iſtas proprietates ellipſi competere intuitu diametri.*

DEFINITIO 35.

417. *Hyperbola* eſt linea curva, in qua $ay^2 = abx + bxx$, hoc eſt, $b : a = y^2 : ax + x^2$, ſeu quadratum ſemiordinatæ eſt ad rectangulum ex abſciſſa in rectam compoſitam ex eadem abſciſſa & recta quadam conſtante, quæ *Axis transverſus, vel latus transverſum* audit, ut recta alia conſtans, quæ *axis Parameter* dicitur, ad axem transverſum.

COROLLARIUM.

418. Eſt ergo etiam hic ut in ellipſi $y^2 = bx + bx^2 : a$, $b = ay^2 : (ax + xx)$, $a = bxx : (y^2 - bx)$ &c. niſi quod hic contraria ſigna occurrant.

DEFINITIO 36.

419. In hyperbola *Axis conjugatus* dicitur media proportionalis inter axem transverſum & parametrum, quia talis eſt axis conjugatus in ellipſi (§. 385).

DEFINITIO 37.

420. Si axis transverſus AB axi AX in directum jungitur & in C bifariam dividitur; punctum C *Centrum* appellatur. Tab. III. Fig. 37.

PROBLEMA 186.

421. *Datis parametro & axe transverſo* AB, *invenire diſtantiam foci a vertice* AF.

Sit

Sit parameter $= b$, AB $= a$, erit FN $= \frac{1}{2}b$ (§. 359) & (§. 417).

$$b : a = \frac{1}{4}bb : ax + xx$$

$$\frac{1}{4}abb = abx + bxx$$

$$\frac{1}{4}ab = ax + xx$$

$$\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}ab = \frac{1}{4}aa + ax + xx$$

$$V(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}ab) = \frac{1}{2}a + x$$

$$V(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}ab) - \frac{1}{2}a = x$$

Invenitur adeo x eodem fere modo, quo *in probl.* 171. (§. 383.)

COROLLARIUM. 1.

422. Eſt adeo diſtantia foci a centro FC $= V(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}ab)$. Et quia $CE^2 = \frac{1}{4}ab$ (§. 419); ſi $FC^2 = c^2$; erit $CE^2 = c^2 - \frac{1}{4}a^2$.

COROLLARIUM 2.

423. Quia $ax + xx = \frac{1}{4}ab$ & $ax + xx =$ AF.FB, $\frac{1}{4}ab$ vero quadratum ſemiaxis conjugati (§. 419), rectangulum ex AF in FB huic qadrato æquale eſt.

PROBLEMA 187.

424. *Invenire rationem ſemiordinatarum* PM *&* pm.

Sit axis transverſus $= a$, parameter $= b$, AP $= x$, PM $= y$, A$p = v$, $pm = z$; erit (§. 418.)

$$y^2 : z^2 = bx + \frac{bxx}{a} : bv + \frac{bv^2}{a}$$

$$ax + xx : bv + v^2 \text{ (§.104)}$$

$$(a + x)x : (b + v)v$$

Theorema. In hyperbola quadrata ſemiordinatarum ſunt inter ſe ut rectangula ex abſciſſa in rectam quandam compoſitam ex abſciſſa & axe transverſo.

COROLLARIUM.

425. Creſcentibus adeo abſciſſis x, creſcunt quoque rectangula $ax + x^2$, conſequenter & quadrata ſemiordinatarum y^2, adeoque ſemiordinatæ ipſæ. Hyperbola igitur continuo ab axe recedit.

PROBLEMA 188.

426. *Invenire rationem axis transverſi ad axem conjugatum.*

Sit axis transverſus $= a$, parameter $= b$, erit quadratum axis conjugati $= ab$ (§. 419). Hoc ergo ad quadratum transverſi, ut ab ad aa, hoc eſt, ut b ad a (§. 172 *Arithm.*).

Theorema. Quadratum axis conjugati eſt ad quadratum transverſi, ut parameter ad axem transverſum.

COROLLARIUM.

427. Quoniam $b : a = PM^2 : AP . PB$ (§. 417); quadratum axis conjugati ad quadratum transverſi ut quadratum ſemiordinatæ ad rectangulum ex abſciſſa in compoſitam ex abſciſſa & axe transverſo. Tab. III. Fig. 37.

PROBLEMA 189.

428. *Sint duæ hyperbolæ æquales, eandem parametrum, eundem axem* Tab. III. Fig. 37.

axem transverſum atque conjugatum habentes, quarum axes AX *&* BY *cum axe transverſo communi* AB *in directum jacent. Ex focis* F *&* f *ad punctum* M *hyperbolæ unius ducantur rectæ* fm *&* FM: *determinare quantitatem harum rectarum.*

Sit FC $= f$C $= c$, reliqua aut in præcedentibus: erit AF $= c - \frac{1}{2}a$, AE $= c + \frac{1}{2}a$, PF $= x - c + \frac{1}{2}a$, P$f = c + \frac{1}{2}a + x$, PF$^2 = x^2 - 2cx + c^2 + ax - ac + \frac{1}{4}a^2$, P$f^2 = c^2 + ac + \frac{1}{4}a^2 + 2cx + ax + x^2$. Jam (§. 422) quadratum ſemiaxis conjugati CE $= cc - \frac{1}{4}aa$. Porro (§. 427)

$$AC^2 : CE^2 = AP.BP : PM^2$$
$$\tfrac{1}{4}aa : cc - \tfrac{1}{4}aa = ax + xx : PM^2$$

Eſt itaque

$$PM^2 = -ax - xx + 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$$
$$PF^2 = x^2 - 2cx + c^2 + ax - ac + \tfrac{1}{4}a^2$$

$$FM^2 = c^2 - 2cx - ac + \tfrac{1}{4}a^2 + \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$$

$$FM = c - \tfrac{1}{2}a + 2cx : a$$

Similiter

$$PM^2 = -ax - x^2 + 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$$
$$Pf^2 = c^2 + ac + \tfrac{1}{4}a^2 + 2cx + ax + x^2$$

$$fM^2 = c^2 + ac + \tfrac{1}{4}a^2 + 2cx + \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$$

$$fM = c + \tfrac{1}{2}a + 2cx : a$$

$$FM = c - \tfrac{1}{2}a + 2cx : a$$

$$fM - FM = a = AB$$

COROLLARIUM 1.

429. Datis ergo axe transverſo & diſtantia a vertice, hyperbola motu continuo ita deſcribitur. Scilicet in focis F & f defigantur clavi aut paxilli, quorum alteri in F annectatur filum FMC, altero ſui extremo C regulæ Cf alligatum, quæ ipſum ſuperet axe transverſo AB. Altera regulæ extremitas perforata clavo f injiciatur & ſtylo ad filum applicato regula emoveatur. Tab. IV. Fig. 50.

COROLLARIUM 2.

430. Iisdem datis puncta quotcunque hyperbolæ determinantur, ſi ex foco f intervallo quocunque AB majore deſcribatur arcus, facto fb = AB, intervallo reſiduo bm ex F ducatur arcus alius priorem in m interſecans, erit enim ob fm-Fm=AB, m punctum hyperbolæ (§. 428).

PROBLEMA 190.

431. *Determinare ſitum rectæ* DE, *quæ per verticem* A *ipſi ordinatæ* Mm *parallela ducitur.* Tab. IV. Fig. 51.

Decreſcentibus in hyperbola abſciſſis AP, decreſcunt etiam ordinatæ Mm. Quare cum in vertice A fiat $x = 0$; erit etiam $y = 0$, conſequenter DE tota extra hyperbolam cadit, eamque tangit.

Theo-

Theorema. Si recta DE per verticem A ordinatis Mm parallela ducatur; hyperbolam in A tangit.

DEFINITIO 38.

Tab. IV. Fig. 51. 432. Si recta DE per verticem hyperbolæ A ordinatis Mm parallela ducatur, fiatque axi conjugato æqualis, nempe pars DA & AE ſemiaxi; præterea ex centro C per D & E agantur rectæ CF & CG: rectæ hæ dicuntur *Aſymptotæ hyperbolæ.*

COROLLARIUM 1.

433. Quoniam (§. 253. *Geom.*) $CA : CE = CP : Pr$ & $CA : [DA]\ CE = CP : PR$; erit $Pr = PR$ (§. 169. *Arithm.*). Quare cum ſit $PM = Pm$ (§. 335); erit quoque $MR = mr$ (§. 83. *Arithm.*).

COROLLARIUM. 2.

434. Si AI ducatur parallela ipſi DC & AH ipſi CE; erit $EA : ED = AI : DC$ (§ 253. *Geom.*). Sed $EA = \frac{1}{2} ED$ (§. 432). Ergo $AI = \frac{1}{2} DC = \frac{1}{2} CE$. Et quoniam porro $EA : ED = EI : EC$ (§. 253. *Geom.*); erit $EI = \frac{1}{2} EC$, conſequenter $AI = EI = CI$.

DEFINITIO 39.

435. Quadratum rectæ CI vel AI dicitur *Potentia hyperbolæ.*

PROBLEMA 191.

436. *Determinare potentiam hyperbolæ.*

Sit $CA = \frac{1}{2} a$, $AE = \frac{1}{2} c$, erit $CE = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc)}$ (§. 394. *Geom.*) adeoque $CI = \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc)}$. Ergo $CI^2 = \frac{aa + cc}{16}$.

Theorema: Potentia hyperbolæ eſt decima ſexta pars quadratorum axium conjugatorum, vel quarta pars quadratorum ſemiaxium conjugatorum.

COROLLARIUM.

437. Quoniam $cc = ab$ (§. 419); erit $CI^2 = \frac{aa + ab}{16} = \frac{1}{4}a(\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b)$, hoc eſt, potentia hyperbolæ æquatur rectangulo ex quarta parte axis transverſi in quartam partem aggregati ex axe transverſo & parametro.

PROBLEMA 192.

438. *Determinare differentiam quadratorum* PM *&* PR. Tab. IV. Fig. 51.

Quoniam $DA = \sqrt{\frac{1}{4} ab}$ (§. 419) & $CP = \frac{1}{2}a + x$; præterea (§. 253. *Geom.*)

$$CA : AD = CP : PR$$
$$\tfrac{1}{2}a : \sqrt{\tfrac{1}{4}ab} = \tfrac{1}{2}a + x : PR$$

erit $PR = (\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{4}ab} + x\sqrt{\frac{1}{4}ab}) : \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}ab} + 2x\sqrt{\frac{1}{4}ab} : a$. Quare

$$PR^2 = \tfrac{1}{4}ab + bx + bx^2 : a$$
$$PM^2 = bx + bx^2 : a \quad (§. 418)$$

$$PR^2 - PM^2 = \tfrac{1}{4}ab = DA^2.$$

Theorema. Si in hyperbola ſemiordinata PM producatur, donec aſymptoto in R occurrat; erit differentia qua-

quadratorum PM & PR æqualis quadrato ſemiaxis conjugati DA.

COROLLARIUM

439. Creſcente adeo ſemiordinata PM, decreſcit recta PR, conſequenter MR, adeoque hyperbola ad aſymptotum propius accedit. Nunquam tamen cum ea concurrere poteſt, quia cum ſit $PR^2 - PM^2 = DA^2$, fieri nequit, ut $PR^2 - PM^2 = 0$ evadat.

SCHOLION.

440. *En rationem, cur lineas* CF *&* CG *ἀσυμπτώτους ſeu non coincidentes vocaverint veteres.*

PROBLEMA 193.

441. *Determinare quantitatem rectanguli ex* MR *in* Mr.

Sit $PR = z$, $PM = y$; erit $MR = z-y$, $Mr = z+y$, conſequenter $MR.Mr = z^2-y^2 = PR^2-PM^2$.

Theorema. In hyperbola rectangulum ex MR & *Mr* æquatur differentiæ quadratorum PR^2 & PM^2.

COROLLARIUM.

442. Idem ergo rectangulum æquale eſt quadrato ſemiaxis conjugati DA (§. 438) conſequenter omnia rectangula eodem modo formata æqualia ſunt.

PROBLEMA 194.

Tab. IV. Fig. 51. 443. *Si* QM *&* ſm *cum aſymptoto* CG, qm *&* SM *cum altera* CF *parallelæ ducantur; determinare rationem rectangulorum* QM.MS *&* qm.mſ.

Sit $MR = mr = a$, $Rm = rM = b$, $QM = v$, $mq = z$. Erit (§. 253. *Geom.*)

$$RM : MQ = Rm : mſ$$
$$a : v = b : (bv:a)$$
$$rm : mq = rM : MS$$
$$a : z = b : (bz:a)$$

Eſt ergo $MQ.MS = bvz:a$ & $mq.mſ = bvz:a$, conſequenter $MQ.MS = mq.mſ$.

Theorema. Si QM & *mſ* cum aſymptoto CG, *qm* vero & MS cum altera CF parallelæ ducantur; rectangula ex QM in MS & *qm* in *mſ* æqualia ſunt.

COROLLARIUM.

444. Quoniam $Cq = ſm$ & $CQ = SM$ (§. 242. *Geom.*); etiam rectangula ex *Cq* in *qm* & ex CQ in QM æqualia ſunt.

PROBLEMA 195.

445. *Determinare rationem rectanguli ex* qm *in* mſ *ad potentiam hyperbolæ ſeu* AI^2.

Sit $mr = z$, $qm = y$, $AE = c$: erit, ob parallelas AE & Pr, $E = r$, & ob parallelas AI & *qm*, $I = q$ (§. 222. *Geom.*); conſequenter (§. 253. *Geom.*)

$$mr : qm = AE : AI$$
$$z : y = c : \frac{cy}{z}$$

Porro

Porro ob $mR.mr = AE^2$ (§. 442) erit (§. 269. *Arithm.*)

$$mr : AE = AE : mR$$
$$z : c = c : \frac{cc}{z}$$

Denique ob parallelas fm & CE $o = x$ & ob parallelas DE & Rm, $x = y$ (§. 221. *Geom.*) adeoque $o = y$ (§. 79. *Arithm.*) Similiter ob parallelas AI & CR, IAE = CDE & ob parallelas DE & Rm, CDE = fRm (§. 221. *Geom.*), Ergo IAE = R (§. 29. *Arithm.*), conſequenter

$$AE : IE = mR : fm$$
$$c : \frac{cy}{z} = \frac{cc}{z} : \frac{ccy}{zz}.$$

Quare $fm.qm = ccyy : zz$. Eſt vero etiam $AI^2 = c^2y^2 : z^2$. Ergo $fm.qm = AI^2$.

Theorema. Si qm cum aſymptoto CF parallela ducatur, rectangulum ex qm in Cq æquatur potentiæ hyperbolæ.

COROLLARIUM 1.

446. Quare ſi fiat $CI = AI = a$, $Cq = x$ & $qm = y$; erit $a^2 = xy$: quæ eſt æquatio naturam hyperbolæ intra aſymptotos declarans.

COROLLARIUM 2.

447. Datis ergo aſymptotis poſitione & latere potentiæ hyperbolæ CI & AI, ſi in una aſymptotorum CG ſumantur abſciſſæ quotcunque, invenientur totidem ſemiordinatæ & per eas puncta quotlibet hyperbolæ determinabuntur, quærendo ad abſciſſas & latus potentiæ CI tertias proportionales (§. 257. *Geom.*).

COROLLARIUM 3.

448. Quodſi abſciſſæ non computentur a centro C, ſed ab alio quovis puncto L, dicaturque $CL = b$; erit $Cq = b + x$, conſequenter $a^2 = by + xy$.

PROBLEMA 196.

449 *Determinare in hyperbola ſubtangentem* PT *& ſubnormalem* PR. Tab. III. Fig. 42.

Sit parameter $= b$, axis transverſus $= a$, $AP = x$, $PM = y$, $RM = z$, $RA = t$, erit $PR = t - x$, $RM^2 = z^2 - t^2 + 2tx - x^2$. Quare (§. 418).

$$z^2 - t^2 + 2tx - x^2 = bx + bx^2 : a$$

$$az^2 - at^2 + 2atx - ax^2 = abx + bx^2$$

$$\begin{array}{l} bx^2 + ax^2 + abx + at^2 = o \\ \qquad\qquad - 2atx - az^2 \end{array} \quad \Big|\, b + a$$

$$x^2 + \frac{ab - 2atx}{b + a} + \frac{at^2 - az^2}{b + a} = o$$

Fiat jam ob rationes ſupra (§. 372) allatas $x - v = o$: erit $x^2 - 2vx + v^2 = o$, & quia hæc æquatio eadem cum præcedente, habetur

$$\frac{ab - 2at}{b + a} = -2v \quad \Big|\, b + a$$

$$ab - 2at = -2bv - 2av$$

$$ab + 2bv + 2av = 2at$$

$$\tfrac{1}{2}b + \frac{bv}{a} + v = t$$

hoc eſt, quia $x = v$,

$\tfrac{1}{2}b + bx : a + x = t = RA$.

Ergo $PR = \tfrac{1}{2}b + bx : a + x - x = \tfrac{1}{2}b + bx : a = (\tfrac{1}{2}a + x)b : a$.

Theorema. In hyperbola eſt ut axis transverſus ad parametrum, ita aggregatum ex ſemiaxe transverſo & abſciſſa ad ſubnormalem.

Porro (§. 371):

$$PR : PM = PM : PT$$

$$\frac{(\tfrac{1}{2}a + x)b}{a} : V\frac{(bx + bx^2)}{a} = V\frac{(bx + bx^2)}{a} : PT$$

Reperitur ergo $PT = (abx + b^2x^2) : (\tfrac{1}{2}a + x)b = (ax + x^2) : (\tfrac{1}{2}a + x)$.

Theorema. In hyperbola eſt ut aggregatum ex ſemiaxe transverſo & abſciſſa ad abſciſſam ita aggregatum ex integro axe transverſo & abſciſſa ad ſubtangentem.

Denique $AT = (ax + x^2) : (\tfrac{1}{2}a + x) - x = (ax + x^2 - \tfrac{1}{2}ax - x^2) : (\tfrac{1}{2}a + x) = \tfrac{1}{2}ax : (\tfrac{1}{2}a + x)$.

Theorema. In hyperbola eſt ut aggregatum ex ſemiaxe transverſo & abſciſſa ad abſciſſam, ita ſemiaxis transverſus ad rectam AT inter verticem & tangentem intercepta.

PROBLEMA 197.

450. *Ducta* NO *tangenti* TM *parallela, & ex centro* C *per contactum* M *recta* CQ, *quæ* NO *ſecat in* G, *determinare rationem ſegmentorum* GN *&* GO.

Sit $GI = HS = v$, $GF = HD = z$, erit $IF = DS = LO = z - v$: erit (§. 253. *Geom.*)

$$PM : PC = GI : IC$$

$$y : p = v : \frac{pv}{y}$$

ob paralleias TM & GO (§. 222. *Geom.*) K = T & K = O, conſequenter O = T. Quare cum præterea F & P ſint recti; erit (§. 252. *Geom.*)

$$PM : PT = GF : FO$$

$$y : \frac{ax + x^2}{\tfrac{1}{2}a + x} = z : \frac{(ax + x^2)z}{(\tfrac{1}{2}a + x)y}$$

Ponatur brevitatis gratia $ax + x^2 = q$ & $\tfrac{1}{2}a + x = p$ ut ante; erit $FO = qz : py$. Ergo $LC = IC - FO = pv : y - qz : py = (p^2v - qz) : py$ & $LA = LC - AC = (p^2v - qz - \tfrac{1}{2}apy) : py$, $LB = LC + CB = (p^2v - qz + \tfrac{1}{2}apy) : py$. Eſt vero (§. 424)

$$AP.PB : AL.LB = PM^2 : OL^2$$

$$q : \frac{p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \tfrac{1}{4}a^2p^2y^2}{p^2y^2} = y^2 : OL^2$$

Quare

$$OL^2 = \frac{p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \tfrac{1}{4}a^2p^2y^2}{p^2q}$$

Jam

Jam $yy = (ax+xx)b : a$ (§. 418) Cum itaque poſuerimus $ax + xx = q$; $yy = bq : a$. Hoc valore in expreſſione ipſius OL^2 ſubſtituto, habetur $OL^2 = \frac{p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2}{p^2q} - \frac{1}{4}a^2p^2bq$. Enimvero $LO^2 = z^2 - 2zv + v^2$. Habemus adeo

$$z^2 - zv + v^2 = \frac{p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \frac{1}{4}ap^2bq}{p^2q}$$

$$p^2qz^2 - 2p^2qzv + p^2qv^2 = p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \frac{1}{4}ap^2bq$$

$$\frac{1}{4}ap^2bq + p^2qv^2 - p^4v^2 = q^2z^2 - p^2qz^2$$

$$\frac{\frac{1}{4}ap^2bq + p^2qv^2 - p^4v^2}{q^2 - p^2q} = z^2$$

Quodſi HN dicatur z & calculus eodem modo inſtituatur; reperietur denuo $z^2 = \frac{\frac{1}{4}ap^2bq + p^2qv^2 - p^4v^2}{p^2 - p^2q}$. Unde liquet eſſe $HN^2 = GF^2 = HD^2$, conſequenter $HN = HD$. Quoniam igitur (§. 253. *Geom.*) HN : HD = NG : GO; erit NG = GO.

Theorema. Recta CQ ex centro C per contactum M ducta dividit rectas NO tangenti TM parallelas bifariam.

COROLLARIUM.

451. Eſt itaque Q diameter, NO ordinatim ad eam applicata (§. 333): MC vero eſt ſemidiameter transverſa.

PROBLEMA 198.

452. *Ductis duabus rectis* Hm *&* mK *ex eodem hyperbolæ puncto* m, *utrinque in aſymptotis* CQ *&* CT *terminatis, itidemque duabus aliis* LN *&* NO *prioribus parallelis; determinare rationem rectangulorum* Hm.mK *&* LN.NO. Tab. V. Fig. 53.

Ducantur ordinatæ ad axem utrinque usque ad aſymptotos continuandæ Rr & QT.

Sit $Rm = y$, $QN = z$, $TN = t$. Quoniam ob $Rm.mr = QN.NT$ (§. 442); erit (§. 269. *Arithm.*)

$$Rm : QN = TN : mr$$
$$y : z = t : \frac{tz}{y}$$

Sit porro $Hm = a$, $mK = b$. Quoniam ob parallelas mr & NT, $r = T$ & ob parallelas Km & NO, $K = O$ (§. 222. *Geom.*) erit (§. 252. *Geom.*)

$$mr : Km = TN : NO$$
$$\frac{tz}{y} : b = t : \frac{by}{z}$$

Ob ſimilem rationem

$$Rm : Hm = QN : LN$$
$$y : a = z : \frac{az}{y}$$

Ergo $LN.NO = abzy : zy = ab$. Eſt vero etiam $Hm.mK = ab$. Sunt igitur duo iſta rectangula æqualia.

Theorema. Si intra aſymptotos hyperbolæ ex ejus puncto m ducantur

utcunque duæ rectæ Hm & mK & iis aliæ duæ parallelæ LN & NO; erit $Hm.mK = LN.NO$.

Idem invenitur, ſi ductæ rectæ Hmk agatur parallela LNo. Nempe in hoc etiam caſu $Hm.mK = LN.NO$.

COROLLARIUM.

453. Omnia igitur rectangula ex rectis eidem Hk vel duabus Hm & mK parallelis eodem modo formata inter ſe æqualia ſunt.

PROBLEMA 199.

454. *Si recta* Hk *utcunque intra* Tab. IV. Fig. 53. *aſymptotos* CQ *&* GT *ducatur, determinare rationem ſegmentorum* HE *&* mk *inter hyperbolam & aſymptotos interceptorum.*

Ducantur per E & m rectæ IG & Rr ad axem normales, fiatque $Rm = a$, $IE = b$, $EG = c$, $Hm = x$, $mk = y$. Quia $IE.EG = Rm : mr$ (§. 453.); erit

$$mR : IE = EG : mr$$
$$a : b = c : \frac{bc}{a}$$

Porro (§. 253. *Geom.*)

$$mR : Hm = IE : EH$$
$$a : x = b : \frac{bx}{a}$$

$$rm : km = EG : Ek$$
$$\frac{bc}{a} : y = c : \frac{ay}{b}$$

Eſt itaque $Ek.EH = abxy : ab = xy \cdot Hm.mk$. Quare

$$Ek : mk = mH : HE$$
$$Ek - mk : mk = mH - HE : HE \text{ (§. 183. *Arithm.*)}$$

h. e. $Em : mk = Em : HE$,

conſequenter $mk = HE$ (§. 169 *Arithm.*).

Theorema: Si inter aſymptotos recta Hk utcunque ducatur, ſegmenta HE & mK inter hyperbolam & aſymptotos utrinque intercepta æqualia ſunt.

COROLLARIUM 1.

455. Quando fit $Em = o$; recta Hk hyperbolam tangit. Tangens adeo FD inter aſymptotos intercepta in contactu V bifariam divitur.

COROLLARIUM 2.

456. Rectangulum itaque ex ſegmentis Hm & mk rectæ tangenti FD parallelæ æquatur quadrato tangentis dimidiæ DV (§. 453.).

PROBLEMA 200.

457. *Determinare relationem ſemiordinatæ* PM *ad diametri abſciſſam* AP. Ta V Fi 54

Sit $DA = c$, $CA = r$, $PM = y$, $CP = v$ & $CB = AC$: erit (§. 253. *Geom.*)

$$CA : DA = CP : PR$$
$$r : c = v : \frac{cv}{r}$$

Quare $RM = \frac{cv}{r} - y = \frac{cv - ry}{r}$ &

MQ

$MQ = \frac{cv+ry}{r}$, conſequenter RM.

$MQ = (c^2v^2-r^2y^2):r^2$. Eſt vero $RM.MQ = DA^2 = c^2$ (§. 456.). Habemus itaque

$$(c^2v^2-r^2y^2):r^2 = c^2$$
$$\overline{} r^2$$
$$c^2v^2-r^2y^2 = r^2c^2$$
$$c^2v^2-r^2c^2 = r^2y^2$$

quæ æquatio in hanc reſolvitur analogiam,

$$y^2 : v^2-r^2 = c^2 : r^2$$
$$PM^2 : AP.PB = DA^2 : AC^2$$

Theorema: Quadratum ſemiordinatæ in hyperbola eſt ad rectangulum ex abſciſſa & aggregato ex diametro transverſa AB & abſciſſa AP, ut quadratum ſemidiametri conjugatæ AD ad quadratum ſemidiametri transverſæ CA.

COROLLARIUM.

458. Quodſi fiat $AP\,x$, & $2r^2 = AB = a$, erit $v^2-r^2 = ax+x^2$, conſequenter $y^2 = (c^2ax+c^2x^2):\frac{1}{4}aa = \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$. Fiat $4c^2:a = b$; erit $y^2 = bx + bx^2 : a$. Eadem ergo æquatio hyperbolæ naturam definit reſpectu diametri, quæ eam exprimit reſpectu axis, eſtque parameter tertia proportionalis ad diametros conjugatas DE & AB. Unde liquet easdem proprietates hyperbolæ competere reſpectu diametri, quæ ſuperius ex æquatione fundamentali deduximus reſpectu axis.

PROBLEMA 201.

459. *Ductis* AF *&* TN *aſymptoto* CR *parallelis, determinare rationem rectanguli ex* TN *in* TC *ad rectangulum ex* AF *in* FC. Tab. V. Fig. 54.

Sit $CF = a$, $AF = b$, $AD = c$, $RN = z$, erit ob $AE = DA$ etiam $EF = FC = a$ (§. 253 *Geom.*). Et quoniam $RN.NQ = DA^2$ (§. 456), erit (§. 269. *Arithm.*)

$$RN : DA = DA : NQ$$
$$z : c = c : \frac{c^2}{z}$$

Porro (§. 253. *Geom.*)

$$AE : AF = QN : TN$$
$$c : b = \frac{c^2}{z} : \frac{bc}{z}$$

$$AE : FE = QN : TQ$$
$$c : a = \frac{c^2}{z} : \frac{ac}{z}$$

$$QN : QT = RN : TC$$
$$\frac{c^2}{z} : \frac{ac}{z} = z : \frac{az}{c}$$

Ergo $TC.TN = \frac{azbc}{cz} = ab =$ CF.AF.

Theorema. Si ex vertice A & quocunque parabolæ puncto N ducantur AF & TN cum aſymptoto CR parallelæ; erit rectangulum ex TN in TC æquale rectangulo ex FA in FC.

COROLLARIUM.

460. Quodſi adeo fiat $TC = x$, $TN = y$; æquatio hyperbolæ naturam inter aſymptotos reſpectu diametri declarans erit $xy = ab$.

DEFINITIO 40.

Tab. IV. Fig. 51. 461. *Hyperbola æquilatera* dicitur, in qua axes conjugati AB & DE ſunt æquales.

COROLLARIUM 1.

462. Cum parameter ſit tertia proportionalis ad axes conjugatos (§. 419.); ipſa etiam axibus æqualis eſt.

COROLLARIUM 2.

463. Quare ſi in æquatione $y^2 = bx + bx^2 : a$ fiat $b = a$; æquatio $y^2 = ax + x^2$ naturam hyperbolæ æquilateræ declarat.

COROLLARIUM 3.

464. Hinc quadrata ordinatarum y^2 & z^2 ſunt inter ſe ut $ax + x^2$ & $av + v^2$, hoc eſt, ut rectangula ex abſciſſas in rectas compoſitas ex abſciſſa & axe determinato vel parametro.

COROLLARIUM 4.

465. Si ſint $CP = x$, $CA = r$, erit $AP = x - r$ & $PB = r + x$, conſequenter $y^2 = x^2 - x^2$.

COROLLARIUM 5.

466. Quoniam $AE = CA$ (§. 461); erit ACE angulus ſemirectus (§. 276 *Geom.*), conſequenter angulus aſymptotorum FCG rectus.

PROBLEMA 202.

467. *Inveſtigare naturam curvæ, quæ oritur, ſi conus* ABC *ita ſecetur ut ſectionis axis* DE *ſit lateri Coni* AC *parallelus.*

Sit $AE = HP$ (§. 142. *Geom.*) $= v$, $PI = t$, $DP = x$, $DE = z$; erit (§. 253. *Geom.*)

$$DP : DE = PI : EB$$
$$x : z = t : \frac{tz}{x}$$

Ergo $PM^2 = HP.PI$ (§. 341) $= tv$ & $EN^2 = AE.EB$ (§. cit.) $= tzv : x$. Eſt ergo (poſitis $PM^2 = y^2$, $EN^2 = z^2$).

$$\left.\begin{array}{l} y^2 : z^2 = tv : \frac{tzv}{x} \\ \text{hoc eſt} \quad tvx : tzv \end{array}\right\} (\S.\ 104).$$
$$x : z$$

Eſt itaque curva DMNLD parabola (§. 361).

PROBLEMA 203.

468. *Si Conus* ABC *ita ſecetur, ut axis ſectionis* DE *cum diametro baſis* AB *in* F *concurrat, invenire naturam curvæ ex hac ſectione prodeuntis* DMNELD.

Sit $DE = a$, $DP = x$, $DQ = v$, $PH = t$, $QL = f$; erit $PE = a - x$, $QE = a - v$ & (§. 253. *Geom.*)

$$DP : PH = DQ : QK$$
$$x : t = v : \frac{vt}{x}$$

EQ:

$EQ : QL = FP : PI$
$a-v : ſ = a-x : \frac{ſa-ſx}{a-v}$

Quare (§. 341.) $PM^2 = HP.PI = (tſa-tſx) : (a-v)$ & $QN^2 = KQ.QL = vtſ : x$. Eſt adeo

$PM^2 ; QN^2 = \frac{tſa-tſx}{a-v} : \frac{vtſ}{x}$

hoc eſt $tſax-tſx^2 : avtſ\,v^2tſ$
(§. 104) $ax-x^2 : av-v^2$

Eſt itaque curva DMNELD Ellipſis (§. 388).

PROBLEMA 204.

469. *Si Conus* ABC *ita ſecetur, ut axis ſectionis* DQ *continuatus cum latere Coni* AC *continuato in* E *concurrat; invenire naturam curvæ* DLN, *quæ ex hac ſectione reſultat.*

Sit $ED = a$, $DP = x$, $DQ = v$, $PH = t$, $PI = ſ$; erit $EP = a + x$, $EQ = a + v$ & (§. 253. *Geom.*)

$EP : PH = EQ : AQ$
$a+x : t = a+v : \frac{at+vt}{a+x}$

$DP : PI = DQ : QB$
$x : ſ = v : \frac{ſv}{x}$

Ergo $HP.PI = tſ$ & $AQ.QB = (atſv + v^2ſt) : (ax + x^2)$, conſequenter ob $PM^2 = HP.PI$ & $QN^2 = AQ.QB$ (§. 341.)

$PM^2 ; QN^2 = tſ ; \frac{atſv + v^2ſt}{ax+x^2}$

hoc eſt, $1 ; \frac{av+v^2}{ax+x^2}$
(§. 104) $ax+x^2 : av+v^2$

Eſt itaque DLN hyperbola (§. 424), DE ejus axis transverſus, E vertex hyperbolæ oppoſitæ.

SCHOLION

470. *Hinc intelligimus, quod ſtatim ab initio parabolam, hyperbolam atque ellipſin tanquam ex Cono ſectas proponere & ex indole ſectionis æquationem fundamentalem eruere licuiſſet, niſi nobis conſtitutum fuiſſet oſtendere, quomodo ex æquationibus utcunque aſſumtis vel datis curvarum proprietates ac deſcriptiones per algebram & arithmeticam ſpecioſam eruere debeamus. Immo potuiſſent quoque (quod faciunt alii) earundem curvarum per motum continuum deſcriptiones fundamenti loco aſſumi & inde æquationes elici: quod ut appareat, unum de ellipſi exemplum propoſuiſſe ſuffecerit.*

PROBLEMA 205.

471. *Sit deſcripta curva* ADMB, *circumductu regulæ* GM *in inſtrumento, cujus ſtructura ex Fig. 59. Tab. IV. manifeſta eſt, ita ut paxilli in E defixi baſis mobilis incedat per canalem* ab, *alterius vero in* F *per* cd; *inveſtigare naturam ejus.* Tab. IV. Fig. 58.

Ex Curvæ deſcriptione manifeſtum, eſſe longitudinem regulæ GM axi majori dimidio CB, partem vero ejus FM axi dimidio minori DC æqualem, conſequenter diſtantiam Tab. IV. Fig. 59.

ſtantiam paxillorum EF differentiam inter ſemiaxem majorem AC & ſemiaxem minorem DC.

Tab. IV. Fig. 58. Aſſumamus itaque quemcunque regulæ ſitum GFM & determinetur curva, in qua ſit punctum ejus M, demittantur ex puncto M ordinatæ ad utrumque axem PM & MR.

Fiat CP = RM = x, PM = y, AC = GM = r, CD = FM = d, erit GF = r-d & (§. 253 *Geom.*)

$$GM : MR = GF : FC$$
$$a : x = a-b : \frac{ax-bx}{a}$$

Ergo PF = $x-(ax+bx):a = bx:a$.

Hinc $PM^2 = FM^2 - FP^2$ (§. 394. *Geom.*) $= b^2 - b^2x^2 : a^2 = (a^2b^2 - b^2x^2) : a^2 = y^2$.

Quare $a^2y^2 = a^2b^2 - b^2x^2$. Eſt adeo curva ADMD ellipſis (§. 391).

DEFINITIO 40.

Tab. III. Fig. 38. 472. *Circuli ſuperiorum generum* ſunt curvæ, in quibus eſt $AP^m : PM^m = PM : PB$ vel etiam $AP^m : PM^m = PM^n : PB^n$.

COROLLARIUM 1.

473. Sit AP = x, PM = y, AB = a: erit PB = $a-x$, conſequenter $x^m : y^m = y : a-x$. Hinc æquatio infinitos circulos definiens eſt $y^{m+1} = ax^m - x^{m+1}$ & alios adhuc infinitos definiens $y^{m+n} = (a-x)^n x^m$.

COROLLARIUM 2.

474. Si $m = 1$, erit $y^2 = ax - x^2$, adeoque circulus primi generis ſub hac æquatione una continetur. Si $m = 2$, erit $y^3 = ax^2 - x^3$: quæ æquatio circulum ſecundi generis definit.

DEFINITIO 41.

475. *Parabolæ ſuperiorum generum* ſunt curvæ Algebraicæ, quæ definiuntur per $a^{m-1}x = y^m$, e. gr. per $a^2x = y^3$, $a^3x = y^4$, $a^4x = y^5$, $a^5x = y^6$ &c. Dicuntur a nonnullis *Paraboloides*: ſpeciatim *Paraboloidem cubicalem* vocant, ſi $a^2x = y^3$; *Paraboloidem biquadraticalem* vel *ſurdeſolidalem* ſi $a^3x = y^4$ &c. Et harum curvarum reſpectu *Parabola* primi generis ſuperius explicata, dicitur *Apolloniana*, item *quadratica*. Ad parabolas quoque referri ſolent curvæ, in quibus $ax^{m-1} = y^m$, veluti $ax^2 = y^3$, $ax^3 = y^4$: quæ a nonnullis *ſemiparabolæ* appellantur. Omnes comprehenduntur ſub communi æquatione $a^m x^n = y^r$, quæ ad alias quoque curvas extenditur, veluti ad eas in quibus $a^2x^2 = y^4$, $a^2x^3 = y^5$, $a^3x^4 = y^7$.

COROLLARIUM.

476. Cum in parabolis ſuperiorum generum ſit $y^m = a^{m-1}x$; ſi alia quæcunque ſemiordinata dicatur v, abſciſſa ipſi reſpondens z, erit $v^m = a^{m-1}z$, conſequenter

y^m:

$$y^m : v^m = a^{m-1}x : a^{m-1}z$$

hoc eſt, $x : z$

Communis adeo parabolarum proprietas eſt, quod ordinatarum potentiæ rationem abſciſſarum habeant.

COROLLARIUM 2.

477. In ſemiparabolis vero eſt $y^m : v^m = ax^{m-1} : az^{m-1}, = x^{m-1} : z^{m-1}$, ſeu potentiæ ſemiordinatarum ſunt ut potentiæ abſciſſarum uno gradu inferiores e. gr. in ſemiparabolis cubicalibus cubi ordinatarum y^3 & v^3 ſunt ut quadrata abſciſſarum x^2 & z^2.

DEFINITIO 42.

478. *Ellipſes infinitas* definit æquatio $ay^{m+n} = bx^m(a-x)^n$, quæ a nonnullis *Elliptoides* dicuntur, ſi $m > 1$ & $n > 1$. E. gr. *Elliptoidem cubicalem* vocant, ſi $ay^3 = bx^2(a-x)$: *Elliptoidem biquadraticalem* vel *ſurdeſolidalem* appellant ellipſin tertii generis, in qua $ay^4 = bx^2(a-x)^2$. Harum curvarum reſpectu *Ellipſis* primi generis *Apolloniana* vocatur.

COROLLARIUM.

479. Si alia quæcunque ordinata dicatur v & abſciſſa reſpondens z; erit $av^{m+n} = bz^m(a-x)^n$, conſequenter $ay^{m+n} : av^{m+n} = bx^m(a-x)^n : bz^m(a-z)^n$ hoc eſt, $y^{m+n} : v^{m+n} = x^m(a-x)^n : z^m(a-z)^n$.

DEFINITIO 43.

480. *Hyperbolas infinitas* definit æquatio $ay^{m+n} = bx^m(a+x)^n$, quæ a nonnullis *Hyperboloides* appellantur, ſi $m > 1$ & $n > 1$. e. gr. $ay^3 = bx^2(a+x)$. Et harum curvarum reſpectu *Hyperbola* primi generis *Apolloniana* ſalutatur.

COROLLARIUM.

481. Eſt ergo in infinitis hyperboloidibus $ay^{m+n} : av^{m+n} = bx^m(a+x)^n : bz^m(a+z)^n$ hoc eſt, $y^{m+n} : v^{m+n} = x^m(a+x)^n : z^m(a+z)^n$.

DEFINITIO 44.

482. *Conos ſuperiorum generum* appello, quorum baſes & ſectiones baſibus parallelæ ſunt circuli ſuperiorum generum. Generatur iſtiuſmodi Conus, ſi recta linea AC in puncto ſublimi C fixa, ſed quæ pro re nata magis aut minus extendi poſſe concipitur, circa peripheriam circuli AM convertatur. Tab. V. Fig. 55.

PROBLEMA 206.

483. *Inveſtigare naturas curvarum, quæ prodeunt, ſi Coni ſuperiorum generum ita ſecentur, ut axis ſectionis DE ſit lateri Coni AC parallelus.* Tab. V. Fig. 55.

Sit $PM = y$, $EN = q$, $AE = HP = v$, $DP = x$, $DE = z$, $PI = t$; reperietur ut *in probl.* 202. (§. 467) $EB = tz : x$. Eſt vero (§. 472).

$$HP^m \; PM^m = PM : PI$$
$$v^m : y^m = y : t$$
$$y^{m+1} = tv^m$$

Porro $AE^m : EN^m = EN : EB$

$$v^m : q^m = q : (tz : x)$$

$$q^{m+1} = tzv^m : x$$

Quare $y^{m+1} : q^{m+1} = tv^m : \frac{tzv^m}{x}$

hoc eſt $1 : \frac{z}{x}$ (§. 104).

ſeu $x : z$

Sunt ergo curvæ iſtæ parabolæ ſuperiorum generum (§. 475).

PROBLEMA 207.

Tab. V. Fig. 56. 484. *Inveſtigare naturam curvarum, quæ enaſcuntur, ſi coni ſuperiorum generum ita ſecantur, ut axis ſectionis* DE *cum diametro baſis* AB *continuata in* F *concurrat.*

Sit $DE = a$, $DP = x$, $DQ = v$, $PH = t$, $QL = ſ$, $PM = y$, $QN = z$; erit $PE = a - x$, $QE = a - v$ & reperietur ut *in probl.* 203 (§. 468) $QK = vt : x$, $PI = (ſa - ſx) : (a - v)$. Eſt vero (§. 472).

$$IP^m : PM^m = PM : PH$$
$$\frac{ſ^m (a-x)^m}{(a-v)^m} : y^m = y : t$$

$$y^{m+1} = tſ^m (a-x)^m : (a-v)^m$$

Porro $QL^m : QN^m = QN : KQ$

$$ſ^m : z^m = z : \frac{vt}{x}$$

$$z^{m+1} = tſ^m v : x$$

Quare $y^{m+1} : z^{m+1} = \frac{tſ^m (a-x)^m}{(a-v)^m} : \frac{tſ^m v}{x}$

hoc eſt $x(a-x)^m : v(a-v)^m$

Sunt adeo curvæ iſtæ in numero ellipſium ſuperiorum generum (§. 479).

COROLLARIUM.

485. Quodſi fuerit $HP^m : PM^m = PM^m : PI^m$ & $KQ^m : QN^m = QN^n : QL^n$ (§. 472); reperietur $y^{m+n} : z^{m+n} = x^m (a-x)^n : v^m (a-v)^n$, adeoque curvæ denuo ſunt ellipſes ſuperiorum generum (§. 479).

PROBLEMA 208.

486. *Inveſtigare naturam curvarum, quæ gignuntur, ſi Coni ſuperiorum generum ita ſecentur, ut axis ſectionis* DQ *cum latere Coni continuato* AC *continuatus & ipſe in* E *concurrat.*

Sit $DE = a$, $DP = x$, $DQ = v$, $PH = t$, $PI = ſ$; erit $EP = a + x$, $EQ = a + v$ & reperietur ut *in probl.* 204. (§. 469) $AQ = t(a+v) : (a+x)$ & $QB = ſv : x$. Eſt vero (§. 472)

$$PI^m : PM^m = PM^n : PH^n$$
$$ſ^m : y^m = y^n : t^n$$

$$y^{m+n} = t^n ſ^m$$

Porro $QB^m : QN^m = QN^n : AQ^n$

$$\frac{ſ^m v^m}{x^m} : z^m = z^n : \frac{t^n (a+v)^n}{(a+x)^n}$$

z^{m+n}

$$z^{m+n} = \frac{t^n s^m v^m (a+v)^n}{x^m (a+x)^n}$$

Quare

$$y^{m+n} : z^{m+n} = t^n s^m : \frac{t^n s^m v^m (a+v)^n}{x^m (a+x)^n}$$

hoc eſt (§. 104) $1 : \frac{v^m (a+v)^n}{x^m (a+x)^n}$

ſeu $x^m (a+x)^n : v^m (a+v)^n$

Sunt adeo curvæ hyperbolæ ſuperiorum generum (§. 481).

PROBLEMA 209.

487. *Diametro ſemicirculi* AB *jungatur ad angulos rectos recta* AT *ducanturque ex centro* C *ſecantes* QC. *Erigantur in* Q *normales* QM *ipſis* QR *æquales. Inveſtigare naturam curvæ* AMP *quæ eſt locus omnium punctorum* M *hac ratione inventorum.*

Sit AQ $=$ PM $= y$, QM $=$ QR $= x$, AB $= a$, erit (§. 361. *Geom.*) $y^2 = ax + x^2$.

Eſt adeo curva AMR hyperbola æquilatera, cujus axes & parameter diametro circuli AB æquales (§. 461).

COROLLARIUM.

488. Habemus adeo facilem hyperbolæ æquilateræ per innumera puncta M geometrice determinata deſcriptionem

DEFINITIO 45.

489. Si ducatur recta BD & alia AC ad ipſam in E perpendicularis, ex puncto autem C agantur rectæ quotcunque CM rectam BD ſecantes in Q, fiatque QM $=$ QN $=$ AE $=$ EF; Curva, in qua ſunt puncta M, dicitur a *Nicomede* inventore *Conchilis* ſeu *Conchois prima*; altera vero, in qua ſunt puncta N, *Conchois ſecunda*. Recta BD *regula*; punctum C *Polus*. Excogitavit autem inſtrumentum, quo motu continuo Conchois prima deſcribi poteſt. Nimirum in regula AD excavatus eſt canalis, ut clavus teres regulæ mobili CB in F firmiter infixus intra eam libere moveri poſſit. Regulæ EG in K infigitur clavus alius, in fiſſuram regulæ mobilis CB immittendus. Quod ſi regula BC ita moveatur, ut clavus F canalem AD percurrat; ſtylus in C Conchoidem primam deſcribet. Tab. VI. Fig. 61. Fig. 62.

COROLLARIUM. 1.

490. Sit AP $= x$, AE $= a$, erit PE $=$ MR $= a - x$. Creſcentibus adeo x, decreſcit $a - x$ ſeu MR, adeoque curva continuo ad *regulam* BD propius accedit. Eodem modo patet, rectam NO continuo decreſcere debere, adeoque conchoidem quoque inferiorem ad regulam continuo propius accedere. Tab. VI. Fig. 61.

COROLLARIUM 2.

491. Quoniam tamen inter con-

 choi-

choidem utramque & rectam BD ſemper interjicitur recta QM vel QN ipſi AE æqualis (§. 489.) neutra conchoidum cum recta BD concurrere poteſt, conſequenter BD eſt aſymptotus utriusque conchoidis.

Tab. VI. Fig. 61.

PROBLEMA 210.

492. *Invenire æquationem pro Conchoide.*

Sit $QM = AE = a$, $EC = b$, $MR = EP = x$, $ER = PM = y$, erit $CP = b + x$ & (§. 253 *Geom.*)

$$PE : MQ = EC : CQ$$
$$x : a = b : \frac{ab}{x}$$

Hinc $CM = a + ab : x = (ax + ab) : x$. Et quoniam $PM^2 + PC^2 = CM^2$ (§. 394. *Geom.*); erit $y^2 + x^2 + 2bx + b^2 = (a^2b^2 + 2a^2bx + a^2x^2) : x^2$, conſequenter $x^4 + 2bx^3 + y^2x^2 + b^2x^2 = a^2b^2 + 2a^2bx + a^2x^2$: quæ eſt æquatio naturam conchoidis primæ explicans.

Sit $CE = b$, $QN = a$, $EG = ON = x$, $GN = EO = y$; erit $GC = b - x$ & (§. 253. *Geom.*)

$$EG : QN = GC : CN$$
$$x : a = b - x : \frac{ab - ax}{x}$$

Habemus ergo ob $CN^2 = CG^2 + GN^2$ (§. 394. *Geom.*), $(a^2b^2 - 2a^2bx + a^2x^2) : x^2 = b^2 - 2bx + x^2 + y^2$, hoc eſt, $a^2b^2 - 2a^2bx + a^2x^2 = b^2x^2 - 2bx^3 + x^4 + x^2y^2$: quæ eſt æquatio naturam conchoidis inferioris declarans.

COROLLARIUM.

493. Eſt adeo conchois utraque linea tertii generis.

DEFINITIO 46.

494. Aliæ *Conchoidum* ſpecies prodeunt, ſi fiat $CE : CQ = QM : AE$, vel indefinite ſi $CE^m : CQ^m = QM^m : AE^m$.

COROLLARIUM.

495. Quare ſi $CE = b$, $EA = a$, $CQ = x$, $QM = y$, erit $ab = xy$ & pro infinitis conchoidibus $a^mb^m = x^my^m$.

PROBLEMA 211.

496. *Invenire æquationem ad quodlibet punctum Conchoidis, in qua* $CE : CQ = QM : AE$.

Sit $AE = a$, $CE = b$, $PM = y$, $PE = x$, erit $CP = b + x$, $CP^2 = b^2 + 2bx + x^2$, $CM^2 = y^2 + b^2 + 2bx + x^2$ (§. 394. *Geom.*) & (§. 253. *Geom.*) $CP : CM = CE : CQ = EP : QM$. Quare $CE.EP : CQ.QM = CP^2 : CM^2$ (§. 202. *Arithm.*), hoc eſt, ob $CQ.QM = CE.EA$ *per hypoth.*

$$CE.EP : CE.EA = CP^2 : CM^2$$

hoc eſt (§. 104), $EP : EA = CP^2 : CM^2$

$$x : a = b^2 + 2bx + x^2 : y^2 + b^2 + 2bx + x^2$$

$$ab^2 + 2abx + ax^2 = y^2x + b^2x + 2bx^2 + x^3$$

quæ eſt æquatio deſiderata.

DEFI-

DEFINITIO 47.

497. Diametro AB ſemicirculi AOB jungatur ad angulos rectos recta indefinita BC. Ducatur recta AH fiatque AM = IH, vel in altero quadrante LC = AN: erit punctum M, itemque L, in curva AMOL, quam *Ciſſoidem* dixit *Diocles* inventor.

COROLLARIUM 1.

498. Ducantur rectæ PM & KI ad AB normales; erit (§. 256. *Geom.*) AP : KB = AM : IH. Sed AM = IH (§. 497). Ergo AP = KB, conſequenter AK = PB (§. 80. *Arithm.*) & PN = IK.

COROLLARIUM 2.

499. Eodem modo patet, Ciſſoidem AMO ſemicirculum AOB bifariam dividere. Eſt enim AO : OF = AG : GB (§. 253. *Geom.*). Sed AO = OF (§. 497). Ergo AG = GB. Eſt itaque ANO quadrans.

COROLLARIUM 3.

500. AK : KI = KI : KB (§. 312. *Geom.*), hoc eſt, AK : PN = PN : AP (§. 498). Porro AK : [KI] PN = AP : PM (§. 253. *Geom.*). Ergo PN : AP = AP : PM (§. 156. *Arithm.*). Sunt adeo AK, PN, AP & PM quatuor lineæ continue proportionales &, ſi fiat PN = v, AP = x, PM = y, $x^2 = vy$. Eodem modo oſtenditur eſſe AP, PN, AK, KL continue proportionales.

PROBLEMA 212.

501. *Invenire æquationem, quæ naturam Ciſſoidis* AMOL *declarat.*

Sit AB = a, AP = x, PM = y; erit AK = PB (§. 498) = $a - x$, $KI^2 = PN^2 = ax - x^2$ & (§. 253. *Geom.* & 104. *Analyſ.*)

$$AK^2 : PN^2 = AP^2 : PM^2$$
$$a^2 - 2ax + x^2 : ax - x^2 = x^2 : y^2$$

$$a^2y^2 - 2axy^2 + x^2y^2 = ax^3 - x^4$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \;\; a - x$$
$$ay^2 - xy^2 = x^3$$

hoc eſt, $(a-x)y^2 = x^3$

Theorema. In Ciſſoide *Dioclis* cubus abſciſſæ AP æquatur ſolido ex quadrato ſemiordinatæ PM in complementum diametri circuli genitoris PB.

COROLLARIUM. 1.

502. Quando punctum P cadit in B, tum fit $x = a$ & BC = y, conſequenter $y^2 = \frac{a^3}{0}$. Quare $0 : 1 = a^3 : y^2$, hoc eſt, valor ipſius y fit infinitus, adeoque Ciſſois AMOL cum BC nunquam concurrit. Eſt ergo BC Ciſſoidis aſymptotus.

COROLLARIUM 2.

503. E Ciſſois eſt linea ſecundi generis.

SCHOLION.

504. *Veteres tam Conchoide, quam Ciſſoide uſi ſunt ad inveniendas duas medias continue proportionales inter duas rectas datas.*

DEFINITIO 48.

Tab. VI. Fig. 64. 505. Si recta AX dividatur in partes quotcunque æquales, ipſique in punctis diviſionum A, P, *p* &c. jungantur rectæ AN, PM, *pm* &c. continue proportionales; puncta N, M, *m* &c. in curva exiſtunt, quæ *Logiſtica*, itemque *Logarithmica* vocari ſolet.

COROLLARIUM 1.

506. Sunt ergo abſciſſæ AP, A*p* &c. ſemiordinatarum PM, *pm* &c. logarithmi (§. 302. *Arithm.*).

COROLLARIUM 2.

507. Hinc ſi AP $= x$, A*p* $= v$, PM $= y$, *pm* $= z$, & logarithmi ipſorum y & z, $= ly$ & lz; erit $x = ly$ & $v = lz$, conſequenter $x : v = ly : lz$, hoc eſt, denominatores rationum AN : PM & AN ; *pm* ſunt inter ſe ut abſciſſæ AP & A*p*.

COROLLARIUM 3.

508. Quamobrem infinitas alias logiſticas excogitare licet, ſi fiat $x^m : v^m = ly : lz$, ut nempe abſciſſarum poteſtates aut radices quæcunque (*m* nempe numerum fractum denotante) ſint ſemiordinatarum logarithmi.

COROLLARIUM 4.

509. Cum ſemiordinatæ *pm* continuo decreſcant, ratione AN ad *pm* cum abſciſſis continuo creſcente (§. 506. *Analyſ.* & §. 189. *Arithm.*) curva ad axem AX continuo propius accedit. Quodſi *pm* ponatur fieri nihilo æqualis, ratio ipſius AN in infinitum augetur, conſequenter & abſciſſa AP (§. 507). Quare logiſtica nonniſi infinito intervallo cum axe concurrit, adeoque AX eſt ejus aſymptotus.

DEFINITIO 49.

510. Si quadrans circuli in partes quotcunque æquales in punctis P, *p*, *p* &c. dividatur & ex radiis CP, C*p*, C*p* &c. reſecentur CM, C*m*, C*m* &c. continue proportionales; puncta M, *m*, *m* &c. erunt in *Logiſtica ſpirali*. Tab. VI. Fig. 65.

COROLLARIUM 1.

511. Sunt ergo arcus AP, A*p* &c. logarithmi ordinatarum CM, C*m* &c.

COROLLARIUM 2.

512. Unde liquet, infinitas logiſticas ſpirales excogitari poſſe (§. 508).

DEFINITIO 50.

513. Si quadrans BCD bifariam dividatur in G & arcus BG, GD denuo ſubdividantur bifariam in E & F, atque ita porro; axis AC arbitrariæ longitudinis aſſumtus eodem modo dividatur in partes æquales A*h*, *hi*, *ik*, *k*C, tandemque in punctis *h*, *i*, *k*, *c* applicentur normales *eh*, *ig*, *kf*, *cd* ipſis HE, IG, KF, CD æquales; puncta *a*, *e*, *g*, *f* *d* erunt in Linea, a *Leibnitio* inventore *Linea Sinuum* dicta. Tab. VI. Fig. 66.

COROLLARIUM.

514. Cum HE, IG, KF, CD ſint ſinus

nus arcuum BE, BG, BF, BD (§. 2. *Trigon.*) erunt abſciſſæ Ah, Ai, Ak, AC ut arcus ſeu anguli; Semiordinatæ eh, ig, kf, Cd, ut ſinus eorundem arcuum ſeu angulorum.

DEFINITIO 51.

515. Iisdem factis quæ in definitione præcedente fieri præcepimus, fiant eh, ig, kf &c. tangentibus BE, BM, BN &c. vel ſecantibus CE, CM, CN &c. æquales; Curvæ adhuc aliæ gignentur, quas *Lineas Tangentium* & *Secantium* appellare libet.

COROLLARIUM.

516. In linea tangentium abſciſſæ ſunt ut arcus ſeu anguli, ſemiordinatæ ut eorundem tangentes; in ſecantium vero linea abſciſſæ itidem ſunt ut arcus ſeu anguli, ſemiordinatæ ut eorundem ſecantes.

DEFINITIO 52.

517. Quadrans arcus ANB dividatur in partes quotcunque æquales in N, n &c. per continuam biſectionem; in totidem dividatur radius AC per puncta P, p &c. Ducantur radii CN, cn &c. denique ex punctis P, p &c. erigantur perpendiculares PM, pm &c. iſtis in punctis M, m &c. occurrentes: erunt puncta M, m &c. in curva, quam *Dinoſtrates* inventor *Quadratricem* appellavit.

COROLLARIUM.

518. Eſt ergo AB : AN = AC : AP. Quare ſi fiat AB $= a$, AC $= b$, AN $= x$, AP $= y$; erit $ax = by$.

DEFINITIO 53.

519. Si quadrans ANB & ejus radius in partes æquales dividantur ut in definitione præcedente, & ex punctis P, p &c. agantur rectæ PM, pm &c. ipſi CB; & ex punctis N, n &c. rectæ NM, nm &c. ipſi AC parallelæ: puncta M, m &c. ſunt in *Quadratrice Tſchirnhuſiana*, a Dn. *de Tſchirnhauſen* ad imitationem alterius excogitata. *Tab. VI. Fig. 68.*

COROLLARIUM.

520. Cum etiam hic ſit AB : AN = AC : AP; quadratrix quoque Tſchirnhuſiana continetur ſub æquatione $ax = by$.

DEFINITIO 54.

521. Peripheria circuli APpA dividatur in partes quotcunque æquales in puncto p per continuam biſectionem. In totidem partes dividatur radius CA, fiatque CM parti uni, Cm vero duabus &c. partibus radii æqualis. Erunt puncta M, m, m &c. in linea curva, quam ab inventore *Archimede* dicunt *ſpiralem* vel *Helicem Archimedeam*. Dicitur autem *Spiralis prima*, quia continuari poteſt, circulo duplo radio deſcripto; immo *ſecunda* continuatur, deſcripto *Tab. VII. Fig. 69.*

pto

pto radio circulo triplo & ita porro in infinitum.

COROLLARIUM 1.

522. Eſt ergo AP ad peripheriam ut Cm ad radium. Quare ſi peripheria dicatur p, radius $AC=r$, $AP=x$, $PM=y$, erit $CM=r-y$, conſequenter ob $p:r=x:r-y$ habebimus $pr-py=rx$.

COROLLARIUM 2.

523. Si $CM=y$; erit $rx=py$: quam æquationem cum quadratrice tam *Dinoſtratis*, quam *Tſchirnhuſii* communem habet ſpiralis.

COROLLARIUM 1.

524. Quare pro infinitis ſpiralibus & quadraticibus erit $r^n x^m = p^n y^m$.

DEFINITIO 55.

525. *Cyclois* vel *Trochois* eſt curva, quam deſcribit punctum a in peripheria circuli, ſi circulus ſuper recta AC rotatur.

Tab. VII. Fig. 70.

COROLLARIUM 1.

526. Recta igitur AC peripheriæ; AD ſemiperipheriæ circuli æqualis eſt, & in quocunque circuli genitoris ſitu Ad arcui Pd.

COROLLARIUM 2.

527. Si PL ducatur cum AD parallela; erit PM arcui circuli genitoris BM æqualis. Eſt enim $Pd=Ad$ & hinc $Pb=dD$ (§. 526). Quare cum $NL=Dd$ (§ 215. *Geom.*), $PN=ML$ (§. 12. *Trigon.*); erit etiam $PN+NM=PM=ML+NM=NL=Dd$, conſequenter ob $Dd=Pb=MB$ *per demonſtr.* $PM=MB$. Sumto igitur arcu MB pro abſciſſa, PM pro ſemiordinata, ſi $BM=x$, $PM=y$; erit $x=y$.

DEFINITIO 56.

528. *Epicyclois* deſcribitur, ſi circulus non ut in præcedente definitione ſuper recta, ſed ſuper peripheria alterius circuli incedat. Dicitur *Epicyclois ſuperior*, ſi circulus genitor per peripheriæ Convexitatem rotatur: *Epicyclois inferior*, ſi ejus concavitatem emetitur.

SCHOLION 1.

529. *Logarithmica, logiſtica ſpiralis, linea ſinuum, linea tangentium, linea ſecantium, quadratrix Dinoſtratis, quadratrix Tſchirnhuſiana, Spiralis Archimedea, Cyclois, Epicyclois ſunt lineæ tranſcendentes: neque enim per æquationes algebraicas explicari poſſunt. Tradidimus equidem pro aliquibus earum æquationes; veruntamen cum in his aſſumſerimus arcus circulares in numerum indeterminatarum, æquationes algebraicæ non ſunt. Suppoſuimus enim ſuperius, æquationes algebraicas relationem, quam habent puncta curvarum ad axem vel diametros, ſolis lineis rectis explicare debere.*

SCHOLION 2.

530. *Innumeræ autem curvæ aliæ tam algebraicæ, quam tranſcendentes excogitari poſſunt & actu excogitatæ ſunt a Geometris. Sed de his omnibus agere minime conſultum eſt. Trademus autem in analyſi infinitorum methodos generales, quibus non modo curvarum hactenus explicatarum, ſed etiam aliarum quarumcunque ſymptomata, ſi quando iis opus habemus, erui poſſunt.*

CAP.

CAP. VI.

DE LOCIS GEOMETRICIS.

DEFINITIO 57.

531. *Locus Geometricus* eſt linea, per quam conſtruitur problema indeterminatum. In ſpecie *Locus ad rectam* dicitur, ſi linea recta æquationi conſtruendæ ſufficit; *Locus ad circulum*, ſi circulo utendum & ita porro.

DEFINITIO 58.

532. Loca ad lineam rectam & circulum veteres dixere *Loca plana*: quæ vero ſunt ad parabolam, ellipſin aut hyperbolam, *Loca ſolida*. Commodius Loca in ordines diſtinguuntur ſecundum numerum dimenſionum, ad quem aſſurgunt quantitates indeterminatæ. Sic *Locus primi ordinis* eſt, ſi æquatio $x = ay : c$. *Locus ſecundi ſeu quadratici ordinis*, ſi e. gr. $y^2 = ax$. vel $y^2 = a^2 - x^2$ &c. *Locus tertii ſeu cubici ordinis*, ſi e. gr. $y^3 = a^2 x$, vel $y^3 = ax^2 - x^3$ &c.

PROBLEMA 213.

533. *Conſtruere loca ad rectam.*

Si $y = ax : b$, $y = ax : b + c$, $y = ax : b - c$, $y = c - ax : b$; Locus ſemper eſt ad rectam. Sit enim angulus datus CAB, in quo fiat $I = b$, $IE = a$: ductis ipſi EI parallelis quibuscunque PM, *pm* &c. erit $AP = x$, $PM = y$. Eſt enim (§. 253. *Geom.*)

$$AI : IE = AP : PM$$
$$b : a = x : y$$

Ergo $ax : b = y$

Quodſi EI continuetur in G, ita ut ſit $IG = c$, per G agatur DF ipſi AB & ex A AD ipſi EI parallela, erit $AP = DQ = x$, QM, *qm* &c. $= y$. Eſt enim $PM = ax : b$, *per demonſtr.* PQ, *pq* &c. $= c$ (§. 242. *Geom.*). Ergo QM ſeu $qm = ax : b + c = y$.

Si $LG = b$, $GE = a$ & LQ vel $Lq = x$: erit QM vel $qm = ax : b$, *per demonſtr.* Fiat $IG = c$ & per I ducatur ipſi DF parallela AB, erit $PQ = pq = c$ (§. 242. *Geom.*), conſequenter PM vel $pm = ax : b - c$.

Denique ſit $AC = c$, & $AD = b$; ducatur per D EF ipſi AC parallela fiatque $DE = a$. Ducatur recta AL & per C ipſi AL parallela CB. Quodſi alia parallela MN ad EF agatur: erit $PM = y$. Eſt enim (§. 253. *Geom.*) Tab. VII. Fig. 72.

$AD : DE = AP : PN$

$b : a = x : \frac{ax}{b}$

Sed $MN = AC = c$ (§. 242 *Geom.*). Ergo $PM = c - ax : b$.

PROBLEMA 214.

Tab. III. Fig. 38. 534. *Conſtruere loca ad circulum.* Si $y^2 = a^2 - x^2$: a eſt radius circuli AC, $x = PC$ & $y = PM$ (§. 341).

Si $y^2 = ax - x^2$; a eſt diameter circuli AB, $x = AP$ & $y = PM$ (§. *cit.*).

Si $y^2 - by = ax - x^2$. Ablatis ſecundis terminis by & ax æquatio reducitur ad caſum primum (§. 306).

Sit nempe $y = t + \frac{1}{2}b$

$$\begin{aligned} \text{erit } y^2 &= t^2 + bt + \tfrac{1}{4}bb \\ -by &= -bt - \tfrac{1}{2}bb \\ \hline y^2 - by &= t^2 - \tfrac{1}{4}bb \end{aligned}$$

Sit porro $x = v + \frac{1}{2}a$

$$\begin{aligned} \text{erit } -x^2 &= -v^2 - av - \tfrac{1}{4}aa \\ +ax &= +av + \tfrac{1}{2}aa \\ \hline ax - x^2 &= \tfrac{1}{4}aa - v^2 \end{aligned}$$

Quare $t^2 - \frac{1}{4}bb = \frac{1}{4}aa - v^2$

$$t^2 = \tfrac{1}{4}bb + \tfrac{1}{4}aa - v^2$$

Tab. VII. Fig. 73. Eſt ergo æquatio ad caſum primum reducta. Unde ita conſtruitur: Sit $CD = \frac{1}{2}b$ & $GD = \frac{1}{2}a$: erit $CG = \sqrt{(\frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}aa)}$. Hoc intervallo deſcribatur circulus ex centro C & per idem C agatur AB ipſi GR parallela; erit $CP = v$, $PM = t$, *per caſ. 1.* conſequenter $GR = v + \frac{1}{2}a = x$ & $MR = t + \frac{1}{2}b = y$.

PROBLEMA 215.

535. *Conſtruere loca ad Parabolam.*

I. Si $y^2 = ax$: evidens eſt, a eſſe parametrum ſive axis, ſive diametri Parabolæ, x abſciſſam AP, vel FM, y ſemiordinatam PM vel FN (§. 352. 376).

II. Si $y^2 = ax + bb$. In parabola parametro a (§. 357. 363) deſcripta, fiat $AL = bb : a$, erit $LP = x$ & $PM = y$. Quoniam enim $AP = x + bb : a$; erit (§. 352) $y^2 = ax + bb$. Non abſimili modo fit coſtructio, ſi a pro parametro diametri aſſumatur (§. 376).

III. Si $y^2 = ax - bb : a$. Fiat in parabola parametro a deſcripta $AO = bb : a$, & $OP = x$, $PM = y$. Nam $AP = x - bb : a$. Ergo (§. 352) $y^2 = ax - bb : a$.

IV. Si $y^2 = bb : a - xx$. Fiat in parabola parametro a deſcripta $AQ = bb : a$: erit $PQ = x$, $PM = y$. Eſt enim $AP = bb : a - x$. Ergo (§. 352) $y^2 = bb - ax$.

Reliqui caſus ad præcedentes reducuntur ſublato, ſi adfuerit, ſecun-

ſecundo termino: quod uno alteroque exemplo oſtendere liber.

V. Sit $yy + ay = bx - \frac{1}{4}aa$. Fiat

$y = t - \frac{1}{2}a$ (§. 306.)

$$\begin{aligned} \text{erit } y^2 &= t^2 - at + \tfrac{1}{4}aa \\ ay &= + at - \tfrac{1}{2}aa \end{aligned}$$

$$t^2 - \tfrac{1}{4}aa = bx - \tfrac{1}{4}aa$$

$$t^2 = bx$$

Quodſi ergo parametro b parabola deſcribatur; erit $AP = x$, $PM = t$, conſequenter ducta $AB = \frac{1}{2}a$ ipſi PM, & BS ipſi AP parallela; erit $MS = t - \frac{1}{2}a = y$.

VI. Eodem modo, ſi fuerit $yy - ay = bx - \frac{1}{4}aa$, reperietur $MQ = y$. Si enim $AD = \frac{1}{2}a$; parameter $= b$: erit $PM = y - \frac{1}{2}a$; conſequenter (§. 352) $y^2 - ay + \frac{1}{4}aa = bx$ ſeu $y^2 - ay = bx - \frac{1}{4}aa$.

VII. Sit $yy - ay = bx + cc$. Fiat

$y = t + \frac{1}{2}a$ (§. 306).

$$\begin{aligned} \text{erit } y^2 &= t^2 + at + \tfrac{1}{4}aa \\ -ay &= -at - \tfrac{1}{2}aa \end{aligned}$$

$$t^2 - \tfrac{1}{4}aa = bx + cc$$

$$t^2 = bx + cc + \tfrac{1}{4}aa.$$

Reductus adeo eſt caſus præſens ad ſecundum. Nimirum fiat in parabola parametro b deſcripta $AR = (cc + \frac{1}{4}aa) : b$, erit $PR = x$; $PM = t$, conſequenter ductis $RN = \frac{1}{2}a$ ipſi PM & DQ ipſi AP parallelis: erit $QM = t + \frac{1}{2}a = y$.

Nam $AP = (cc + \frac{1}{4}aa) : b + x$, $PM = y - \frac{1}{2}a$, conſequenter $cc + \frac{1}{4}aa + bx = y^2 - ay + \frac{1}{4}aa$ (§. 352), hoc eſt, $cc + bx = y^2 - ay$.

VIII. Sit $y^2 - axy : b = cx - aaxx : 4bb$. Sublato ſecundo termino $axy : b$, æquatio reducitur ad caſum primum.

Sit nempe $y = v + ax : 2b$

$$\begin{aligned} \text{erit } y^2 &= v^2 + avx : b + a^2x^2 : 4b^2 \\ -axy : b &= -avx : b - a^2x^2 : 2b^2 \end{aligned}$$

$$y^2 - axy : b = v^2 - a^2x^2 : 4b^2$$

Ergo $v^2 - a^2x^2 : 4b^2 = cx - a^2x^2 : 4b^2$, h. e. $v^2 = cx$.

Parametro c deſcribatur parabola, erit $AP = x$, $PM = v$. Ducatur utcunque recta AT, fiatque $AR = 2b$, $RO = a$, cum AP ſit x, erit $PT = ax : 2b$ (§. 530), conſequenter $TM = v + ax : 2b = y$. Nam $PM = y - ax : 2b$, $AP = x$. Quare (§. 352) $cx = y^2 - axy : b + aaxx : 4bb$, hoc eſt, $cx - aaxx : 4bb = y^2 - axy : b$.

COROLLARIUM.

536. Hinc ſimul conſtat, quomodo æquationes locales ad parabolam inveniantur; nimirum origo ipſius x ſtatuen-

tuenda eſt vel in A, vel in K, vel in R, vel in L, vel in D, vel in N, vel in I, vel in B, vel in H &c. & aſſumtis lineis, quibus origo ipſius x ab axe promovetur, pro determinatis; inveniendus eſt valor ipſius PM. Unde haud difficulter eruitur æquatio ad parabolam (§. 352).

SCHOLION

537. *Exempla in problematis reſolutione jam tradidimus: neque jam obſcurum eſſe poteſt, quomodo primum* (k) Johannes Craigius *& poſt ipſum Illuſtr. Marchio* Hoſpitalius (l), *aliique ad Theoremata univerſalia conſtruendi omnia loca ſolida ad parabolam pervenerint: quæ in problemate ſubſequente addere juvat.*

PROBLEMA 216.

538. *Invenire theoremata generalia conſtruendi omnes æquationes locales ad parabolam.*

Duo theoremata nobis inveſtiganda: in quorum altero y refertur ad concavitatem, in altero autem ad convexitatem parabolæ.

Tab. VII. Fig. 75. Sit KA $=n$, DH $=p$, LH $=q$, DK $=r$, DL $=ſ$, & parametro t deſcribatur parabola AM, cujus axis vel diameter AP. Sit porro DQ $=x$, QM $=$ y: erit (§. 253. *Geom.*)

$$\text{DH} : \text{DL} = \text{DQ} : \text{DN}\ (=\text{PK})$$
$$p : ſ = x : \frac{ſx}{p}$$

$$\text{DH} : \text{LH} = \text{DQ} : \text{QN}$$
$$p : q = x : \frac{qx}{p}$$

Ergo AP $=$ PK-KA $= ſx : p - n$ & PM $=$ QM - KD - QN $= y - r - qx : p$. Quare cum ſit PM² $= t$. AP, (§. 352, 376); erit

$$y^2 - 2ry + r^2 - \frac{2qxy}{p} + \frac{2rqx}{p} + \frac{q^2x^2}{p} = \frac{tſx}{p} - tn$$

hoc eſt,

$$y^2 - \frac{2qxy}{p} + \frac{q^2x^2}{p^2} - 2ry + \frac{2rqx}{p} + r^2 = 0$$
$$- \frac{tſx}{p} + tn$$

Sit denuo in caſu altero KA $= n$, DH $=p$, LH $=q$, DK $=$ PN (§. 242 *Geom.*) $=r$, DL $=ſ$, IM $=$ DQ $=$ y, QM $=x$. Parabola AM denuo parametro t deſcribatur. Erit (§. 253. *Geom.*)

$$\text{DH} : \text{DL} = \text{DQ} : \text{DN}$$
$$p : ſ = y : \frac{ſy}{p}$$

$$\text{DH} : \text{HL} = \text{DQ} : \text{QN}$$
$$p : q = y : \frac{qy}{p}$$

Ergo AP $=$ DN - AK $= ſy : p - n$ & PM $=$ QM - QN - PN $= x - qy : p - r$. Qua-

k) In Tractatu de figurarum curvilinearum quadraturis & locis geometricis p. 62. & ſeqq.

l) Traité analytique des ſections coniques lib. 7. p. 206 & ſeqq.

Quare cum ſit $PM^2 = t.AP$; erit (§. 352. 376).

$$x^2 - \frac{2qxy}{p} + \frac{q^2y^2}{p^2} - 2rx + \frac{2rqy}{p} + r^2 = \frac{tſy}{p} - tn$$

hoc eſt,

$$x^2 \frac{2qxy}{p} + \frac{q^2y^2}{p^2} - 2rx + \frac{2rqy}{p} + r^2 = 0$$
$$- \frac{tſy}{p} + tn$$

Sit e. gr. $y^2 - ax = 0$, erit $- \frac{2q}{p} = 0$ adeoque $\frac{q^2}{p^2} = 0$, & $ſ = p$, porro $r = 0$ & $-tſ:p = -a$, hoc eſt, $a = t$. Cadit ergo punctum D in A & Q in P, atque parametro a deſcribenda eſt parabola, uti docuimus in problemate præcedente.

Sit $y^2 + ay - bx + \frac{1}{4}aa = 0$; erit $q:p = 0$, conſequenter H cadit in L, adeoque $ſ = p$. Porro $a = -2r$: ergo $-\frac{1}{2}a = r$. Item: $-t = -b$, adeoque $t = b$. Parametro itaque b deſcribenda parabola, & ab ordinata PM ſubtrahi debet $\frac{1}{2}a$, ut habeatur y, prorſus ut in problemate præcedente factum.

Sit $yy - ay - bx - cc = 0$, erit $q:p = 0$, $q = ſ$ &

$$\frac{-2r = -a}{r = \frac{1}{2}a} \qquad \frac{-t = -b}{t = b} \qquad \frac{r^2 + tn = -cc}{\frac{tn = -c^2 - \frac{1}{4}aa}{n = \frac{-c^2 - \frac{1}{4}aa}{b}}}$$

Parametro ergo b deſcribenda parabola, & quia KA eſt quantitas negativa, auferenda eſt ex AP, ita ut origo indeterminatæ x ſtatuatur in R vel O. Denique ob $DK = \frac{1}{2}a$; origo quantitatis indeterminatæ y ſtatuenda in N.

Sit $x^2 + ay - bb = 0$: erit vi theorematis ſecundi $p:q = 0$, $p = ſ$, $r = 0$, &

$$\frac{-t = +a}{t = -a} \qquad \frac{tn = -bb}{n = \frac{-bb}{-a}}$$

ſeu $n = \frac{bb}{a}$.

Facile itaque conſtructio abſolvitur, ut in problemate præcedente.

SCHOLION

539. *Notandum probe, quoties valor alicujus quantitatis negativus occurrit, eandem ſumendam eſſe in latere oppoſito: cujus exemplum in caſu penultimo dedimus. Hinc & in caſu ultimo, ubi parameter negativa, parabola in loco oppoſito, nempe non ſurſum, ſed deorſum tendens deſcribenda circa diametrum* AK.

PROBLEMA 217.

540. *Loca ad Ellipſin conſtruere*

 Sit

Tab. III. Fig. 44. I. Sit $x^2 = aa\text{-}byy : c$. Sumatur $b : c$ pro ratione diametri ad parametrum, a pro ſemiaxe vel ſemidiametro AC, & $2ac : b$ pro parametro, deſcribaturque ellipſis: erit PC $= x$, PM $= y$. Nam AP $= a\text{-}x$, PB $= a + x$, coſequenter AP. PB $= a^2\text{-}x^2$. Quare (§.)

$$b : c = aa - xx : y^2$$

$$aac - cxx = by^2$$

$$aa - xx = by^2 : c$$

$$xx = aa - byy : c.$$

II. Sit $x^2 + dx = aa\text{-}byy : c$. Ablato ſecundo termino, æquatio reducitur ad caſum primum. Fiat nempe

$$x = v - \tfrac{1}{2}d$$

erit $x^2 = v^2 - dv + \tfrac{1}{4}dd$
$+ dx = + dv - \tfrac{1}{2}dd$

$$v^2 - \tfrac{1}{4}dd = aa - byy : c$$

$$v^2 = aa + \tfrac{1}{4}dd\text{-}byy : c$$

Conſtruetur adeo locus, ſi pro ratione diametri ad parametrum ſumatur $b : c$, pro ſemidiametro AC, $\surd(\tfrac{1}{4}dd + aa)$ & ellipſis deſcribatur; erit enim PC $= v$, PM $= y$. Unde quia $x = v - \tfrac{1}{2}d$, facile intelligitur, originem ipſius x a centro C in oppoſitum ipſius AB promovendam eſſe quantitate dimidia ipſius d.

III. Sit $y^2 - dxy : f = aa - bxx : c$. Ad tollendum ſecundum terminum $dxy : f$ fiat

$$y = v + dx : 2f$$

erit $y^2 = v^2 + dxv : f + d^2x^2 : 4f^2$
$- dxy : f = - dxv : f - d^2x^2 : 2f^2$

$$v^2 - dx^2 : 4f = aa - bxx : c$$

$$v^2 = aa - bx^2 : c - dx^2 : 4f^2$$

h. e. $v^2 = aa - (4bffx^2 + cd^2x^2) : 4f^2c$

Ponatur porro $-4bff + cdd = p$,
$(4ffc = q$

erit $v^2 = aa - px^2 : q$.

Reductus adeo eſt caſus præſens ad primum. Quodſi ergo, ut in caſu primo, diametro $2a$ & parametro $2aq : p$ ellipſis deſcribatur, erit CP $= x$, PM $= v$. Quare ſi ulterius fiat CD $= 2f$, DF ipſi QM parallela $= d$; ducaturque recta CQ; erit PQ $= dx : 2f$, conſequenter QM $= v + dx : 2f = y$. Enimvero cum in hac conſtructione indeterminatæ x & y non in eodem puncto Q terminentur; ellipſis conſtruenda eſt alia, in qua ſit CQ $= x$, QM $= y$. Ut igitur inveniantur diameter & parameter hujus ellipſis; inferatur (§. 253 Geom).

CF:

$$CF : CD = CQ : CP$$
$$2f : r = x : \frac{rx}{2f}$$

Unde $CP^2 = r^2x^2 : 4f^2$. Ut adeo æquatio $v^2 = aa - px^2 : q$, ſeu $qv^2 : p = a^2q : p - x^2$ reducatur ad aliam, in qua loco x^2 habeatur $r^2x^2 : 4f^2$; æquatio propoſita multiplicanda per $r^2 : 4f^2$, quo facto, habemus: $r^2qv^2 : 4pf^2 = a^2r^2q : 4pf^2 - r^2x^2 : 4f^2$. Jam cum ſit $qr^2 : 4pf^2 = \frac{ar^2q}{4pf^2} - \frac{r^2x^2}{4f^2} : v^2$, & $PC^2 = r^2x^2 : 4f^2$, ſi $ar^2q : 4pf^2$ ſumatur pro AC^2, erit $qr^2 : 4pf^2$ ratio diametri ad parametrum, ceu patet ex caſu primo. Ellipſis itaque deſcribenda diametro $= 2V(ar^2q : 4pf^2) = \frac{r}{f} V \frac{aq}{p}$ & parametro $\frac{4pf}{qr} V \frac{aq}{p} = \frac{4f}{r} V \frac{ap^2q}{pq^2} = \frac{4f}{r} V \frac{ap}{q}$. Reperitur nempe parameter quærendo ad qr^2, $4pf^2$ & $\frac{r}{f} V \frac{aq}{p}$ quartam proportionalem.

SCHOLION.

541. *Quoniam locorum ad ellipſin caſus admodum multi exiſtunt; hic inprimis conſultum eſt, ut theorema generale inveniatur: id quod in problemate ſequente præſtitimus.*

PROBLEMA 218.

542. *Invenire theorema generale conſtruendi omnia loca ſolida ad ellipſin.*

Circa diametrum AB deſcripta ſit ellipſis AMB, ſintque KD & LH ſemiordinatæ PM, DL diametro AB parallelæ. Sit $KD = PN = n$, $KC = p$, $DH = q$, $LH = r$, $DL = f$, ſemidiameter AC vel $CB = m$, parameter $= t$, $DQ = x$, $QM = y$. Erit (§. 253. *Geom.*) $KP = DN$ & (§. 242. *Geom.*) Tab. VII. Fig. 78.

$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$
$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : f = x : \frac{fx}{q}$$

Quare $CP = DN - KC = fx : q - p$ & $PM = QM - QN - PN = y - rx : q - n$. Jam ex natura ellipſis (§. 378. 415.)

$$t : 2m = PM^2 : AP.PB.$$

Eſt vero $PM^2 = y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2$, $AP = m + \frac{fx}{q} - p$ & $PB = m - \frac{fx}{q} + p$, adeoque $AP.PB = m^2 - p^2 + \frac{2pfx}{q} - \frac{f^2x^2}{q^2}$. Ergo (§. 379). $y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = \frac{tm^2}{2m} - \frac{tp^2}{2m} + \frac{2tpfx}{2mq} - \frac{tf^2x^2}{2mq^2}$.

Unde tandem habetur

y^2-

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$$
$$+\frac{t\text{ſ}^2x^2}{2mq^2} \qquad -\frac{2tp\text{ſ}x}{2mq} \qquad -\frac{tm^2}{2m} + \frac{tp^2}{2m}$$

Sit e. gr. $y^2 + \frac{cx^2}{b} - \frac{aac}{b} = 0$. Quia in æquatione non habentur xy, y & x; erunt $r:q = 0$, $q = \text{ſ}$, $n = 0$, $p = 0$ & hinc $t:2m = c:b$, hoc eſt, $c:b$ exprimit rationem parametri ad diametrum, prorſus ut aſſumſimus in problemate præcedente. Erit porro $-\frac{tm^2}{2m} = -\frac{aac}{b}$, hoc eſt, ſubſtituto pro $t:2m$ valore ipſius ante invento $c:b$, $\frac{m^2c}{b} = \frac{aac}{b}$. Quare $m^2 = aa$: & hinc ſemidiameter $m = a$, quemadmodum denuo aſſumſimus in problemate præcedente.

Sit $y^2 + \frac{cx^2}{b} + \frac{cdx}{b} - \frac{aac}{b} = 0$. Quia in æquatione non habentur xy & y, erit $r:q = 0$, $n = 0$, conſequenter $\text{ſ} = q$. Quare $\frac{t}{2m} = \frac{c}{b}$, adeoque ratio diametri AB ad parametrum eſt $= b:c$, ut in problemate præcedente aſſumſimus. Porro $\frac{2tp}{2m} = \frac{cd}{b}$, hoc eſt, ob $t:2m = c:b$, $2p = d$, ſeu $p = \frac{1}{2}d$. Denique $-\frac{tm^2}{2m} + \frac{tp^2}{2m} = -\frac{aac}{b}$, hoc eſt, ob $t:2m = c:b$, $m^2 + p^2 = aa$, ſeu $m^2 = aa + \frac{1}{4}dd$. Eſt itaque ſemidiameter denuo, ut in problemate præcedente, $\sqrt{(aa + \frac{1}{4}dd)}$.

COROLLARIUM.

543. Cum in ellipſi ſit $b:a = y^2 : ax - x^2$ (§. 378); ſi $b = a$, hoc eſt, ſi parameter diametro æqualis, erit $y^2 = ax - x^2$, ſeu $y^2 - ax + x^2 = 0$, quæ eſt æquatio ad circulum (§. 341). Æquatio itaque localis ad ellipſin degenerat in æquationem localem ad circulum, ſi ponatur $t = 2m$ & angulus ad P rectus: quo facto erit

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$$
$$+\frac{\text{ſ}^2x^2}{q^2} \qquad -\frac{2p\text{ſ}x}{q} \qquad -m^2 + p^2$$

Cæterum cum ex comparatione formulæ propoſitæ cum generali demum intelligatur, num $t = 2m$; eadem formula pro conſtruendis locis ad ellipſin atque ad circulum ſufficit.

Ponamus e. gr. $y^2 + x^2 - by - cx = 0$. Quoniam xy deeſt, erit $r:q = 0$, conſequenter $\text{ſ} = q$. Quare $t:2m = 1$, hoc eſt, $t = 2m$. Locus adeo planus eſt ad circulum. Porro

$$-2n = -b \qquad -2tp:2m = -c$$
$$n = \tfrac{1}{2}b \qquad 2p = c, \text{ ob } t = 2m,$$
$$p = \tfrac{1}{2}c$$

Eſt ergo

Eſt ergo $CD = \frac{1}{2}b$, $GD = \frac{1}{2}c$, conſequenter $AC = \surd(\frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc)$, prorſus ut ſupra (§. 534).

PROBLEMA 219.

544. *Conſtruere loca ad hyperbolam æquilateram.*

I. Si $xx + ax = yy$: erit a ſemidiameter transverſa AC, $AP = x$, $PM = y$ (§. 463).

II. Si $xx - aa, = yy$: ſumatur $AC = a$, $CP = x$, $PM = y$: erit $AP = a - x$, $PB = a + x$, conſequenter ob $AP.PB = PM^2$ (§. 463) $aa - xx = yy$.

III. Sit $x^2 + ax = y^2 + by$. Sublato utrinque ſecundo termino (§. 306), caſus præſens reducitur ad ſecundum. Fiat ergo

$$x = z - \tfrac{1}{2}a$$

$$\begin{aligned} \text{erit } x^2 &= z^2 - az + \tfrac{1}{4}aa \\ +ax &= \quad + az - \tfrac{1}{2}aa \\ \hline x^2 + ax &= z^2 - \tfrac{1}{4}aa \end{aligned}$$

Fiat porro $y = v - \frac{1}{2}b$

$$\begin{aligned} \text{erit } y^2 &= v^2 - bv + \tfrac{1}{4}bb \\ +by &= \quad + bv - \tfrac{1}{2}bb \\ \hline y^2 + by &= v^2 - \tfrac{1}{4}bb \end{aligned}$$

Quamobrem $z^2 - \frac{1}{4}aa = v^2 - \frac{1}{4}bb$

$$z^2 + \tfrac{1}{4}bb - \tfrac{1}{4}aa = v^2$$

Ponatur $\surd(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb) = c$
erit: $z^2 - c^2 = v^2$

Sumi adeo debet pro ſemidiametro AC $\surd(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb)$, eritque $CP = z$, $PM = v$, conſequenter cum $x = z - \frac{1}{2}a$ & $y = v - \frac{1}{2}b$, patet, ducta ipſi AP parallela, quæ ex PM auferat partem $GP = \frac{1}{2}b$, indeterminatam y ex PM abſcindi, & originem indeterminatæ $x = KR$ non eſſe in centro hyperbolæ C, ſed ab eodem removeri intervallo $\frac{1}{2}a = CR$. Tab. VIII. Fig. 79.

PROBLEMA 220.

545. *Conſtruere loca ad hyperbolam ſcalenam.* Tab. VIII. Fig. 79.

I. Sit $xx + ax = byy:c$. Sumatur pro ratione diametri ad parametrum $b:c$ & pro diametro a: erit $AP = x$, $PM = y$. Nam $PB = a + x$, conſequenter $PB.AP = ax + xx$ & (§. 417)

$$c:b = y^2 : ax + x^2$$

$$\overline{}$$

$$by^2 : c = ax + x^2$$

II. Sit $xx - aa = byy:c$. Aſſumatur pro diametro $2a$ & pro ratione ejus ad parametrum $b:c$, ita ut parameter ſit $2ac:b$; erit $CP = x$, $PM = y$. Nam $AP = x - a$, $PB = x + a$, conſequenter $PA.PB = x^2 - a^2$ & hinc (§. 417)

$$c:b = y^2 : x^2 - a^2$$

$$\overline{}$$

$$by^2 : c = x^2 - a^2$$

III. Sit $xx - ax = byy:c$. Auferatur

ratur ſecundus terminus ax (§. 306). Fiat nimirum

$$x = v - \tfrac{1}{2}a$$

erit
$$\begin{aligned} x^2 &= v^2 + av + \tfrac{1}{4}aa \\ -ax &= \quad\; - av - \tfrac{1}{2}aa \\ \hline & v^2 - \tfrac{1}{4}aa = byy:c \end{aligned}$$

Reducta itaque eſt formula ad præcedentem.

Quodſi ergo conſtructio fiat ut in caſu præcedente, niſi quod pro diametro AP tantum a ſumatur; erit $CP = v$, $PM = y$, conſequenter $AP = x$.

PROBLEMA 221.

Tab. XIX. Fig. 80. 546. *Invenire theorema generale conſtruendi omnia loca ad hyperbolam circa diametrum deſcriptam.*

Diametro transverſa $AB = 2m$ & parametro t deſcripta ſit hyperbola AM ductisque KD & LH cum QM, DL vero cum BP parallelis, fiat $KD = PN = n$, $KC = p$, $DH = q$, $LH = r$, $DL = ſ$, $DQ = x$, $QM = y$; erit (§. 242. *Geom.*) $KP = DN$ & (§. 253. *Geom.*)

$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$
$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : ſ = x : \frac{ſx}{q}$$

Quare $CP = DN - KC = \frac{ſx}{q} - p$ & $PM = QM - QN - PN = y - rx : q - n$

Jam (§. 417. 458.)
$$t : 2m = PM^2 : AP.PB$$
Eſt vero $PM^2 = y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2$. $AP.PB = (CP - CA)(CP + CA) = CP^2 - CA^2$ (§. 73) $= \frac{ſ^2x^2}{q^2} - \frac{2pſx}{q} + p^2 - m^2$. Unde habetur:

$$\frac{tſ^2x^2}{2mq^2} - \frac{2tpſx}{2mq} + \frac{tp^2}{2m} - \frac{tm^2}{2m} = y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2.$$

Quare æquatio generalis pro quovis loco hyperbolico

$$\begin{array}{l} y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0 \\ \qquad\quad\;\; - \frac{tſ^2x^2}{2mq^2} \qquad\qquad + \frac{2tpſx}{2mq} + \frac{tm^2}{2m} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\; - \frac{tp^2}{2m} \end{array}$$

Quando contingit, reperiri $t = 2m$; hyperbola eſt æquilatera (§. 462).

Eadem formula reperitur, ſi hyperbola ad diametrum conjugatam refertur, niſi quod $tm^2 : 2m$ ſigno $-$ afficiatur.

Sit e. gr. $y^2 - \frac{cx^2}{b} + \frac{aac}{b} = 0$. Cum in æquatione non habeantur xy, y & x; erit $r : q = 0$, $n = 0$, $p = 0$, $ſ = q$, conſequen-

ſequenter $-t:2m=-c:b$, adeoque ratio parametri t ad diametrum $2m=c:b$, ut aſſumſimus in problemate præcedente. Porro $tm^2:2m=aac:b$, hoc eſt, ob $t:2m=c:b$, $m^2=aa$. Diameter adeo hyperbolæ $2a$, quemadmodum rurſus aſſumſimus in problemate præcedente.

Sit $y^2-\frac{c^2x^2}{b}+\frac{acx}{b}=0$. Quoniam in æquatione deſiderantur xy, y & quantitas pure cognita; erit $r:q=0$, $n=0$ & quia ob $r=0$, DL coincidit cum DH, $ſ=q$. Quamobrem $-t:2m=-c:b$, hoc eſt, ratio parametri t ad diametrum $2m$ denuo $=c:b$. Porro $2tp:2m=ac:b$, hoc eſt, ob $t:2m=c:b$, $2p=a$ ſeu $p=\frac{1}{2}a$: Denique quia ultimus terminus deficit, erit $n^2+\frac{tm^2}{2m}-\frac{tp^2}{2m}=0$ ſeu $m^2-p^2=\frac{1}{4}aa$.

Habemus ergo denuo omnia ut in problemate præcedente.

Sit $y^2-x^2+by-ax=0$. Quia xy deſideratur; erit $r:q=0$, conſequenter $ſ=q$. Quare $-t:2m=1$, hoc eſt, $t=2m$. Eſt itaque locus ad hyperbolam æquilateram. Porro

$$-2n=+b \qquad 2tp:2m=-a$$

$$n=-\tfrac{1}{2}b \qquad 2p=-a, \text{ ob } t=2m$$

$$p=-\tfrac{1}{2}a.$$

$$n^2+\frac{tm^2}{2m}=\frac{tp^2}{2m}$$

$$n^2+m^2=p^2$$

$$m^2=p^2-n^2$$

hoc eſt, $m^2=\frac{1}{4}aa-\frac{1}{4}bb$

Omnia hic denuo prodeunt ut ſupra in conſtructione hujus loci (§. 544) aſſumſimus.

PROBLEMA 222.

547. *Conſtruere locum ad hyperbolam intra aſymptotos.* Tab. V. Fig. 54.

I. Si $xy=ab$: evidens eſt, ſi factis CF $=a$, FA $=b$ & intra angulum QCR per verticem A deſcribatur hyperbola, cujus aſymptoti QC & CR, fore CT $=x$ & TN $=y$. Eſt enim his poſitis (§. 460) $xy=ab$.

II. Sit $ab=cxy:d+fy$

$$\text{erit } abd=cxy+fdy$$

$$\frac{abd}{c}=xy+\frac{fdy}{c},$$

$$\text{Fiat } x+\frac{fd}{c}=v$$

$$\text{erit } \frac{abd}{c}=vy, \text{ ut in caſu primo.}$$

Quod ſi ergo fiat CF $=fd:c$, CD $=ab:c$ & DL $=d$, atque intra aſymptotos QCR per L deſcribatur hyperbola, erit FT $=x$, TN $=y$. Nam CT $=x+fd:c$, adeoque ob CD.DL $=$CT,

$= CT.TN$ (§. 443); $xy + fdy : c = abd : c.$

III. Sit $ax = xy - by$. Ponatur $x - b = v$; erit $xy - by = vy$ &, ob $x = v + b$, $av + ab = ax$, conſequenter $vy - av = ab$. Ponatur porro $y - a = z$: erit $vz = ab$. Quare ſi intra angulum QCD fiat $CD = b$, $DL = a$ & per L hyperbola deſcribatur; erit $CT = v$ & $TN = z$, ut in caſu primo. Quodſi jam NT producatur in K ita ut $TK = a$; erit $KN = y$. Agatur per K cum aſymptoto CQ parallela HK producenda ultra H in S, donec $HS = CD = b$, erit $SK = x$. Ita nimirum habebimus $HK = x - b$ & $TN = y - a$, conſequenter $TN.TC = yx - by - ax + ab = CD.DL = ab$. Quare $yx - by = ax$

Tab. V. Fig. 54.

PROBLEMA 223.

Tab. VI. Fig. 81.

548. *Invenire theorema generale conſtruendi omnia loca ſolida ad hyperbolam intra aſymptotos.*

Sint SA & AR aſymptoti hyperbolæ MI. Ducatur DL uni earum AR parallela & huic jungatur utcunque recta DH. Sint denique KD, QM, IR, LH, alteri aſymptotorum SA parallelæ. Ponamus denuo $KD = PN = n$, $KA = p$, $DH = q$, $LH = r$, $DL = ſ$, $DQ = x$, $QM = y$, $RI = m$, $AR = DL = ſ$: erit (§. 253. *Geom.*)

$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$

$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : ſ = x : \frac{ſx}{q}$$

Ergo $AP = DN - AK = \frac{ſx}{q} - p$ &

$PM = QM - PN - NQ = y - n - rx : q$.

Quare, ob $AR.RI = AP.PM$ (§. 460.)

$$mſ = \frac{ſyx}{q} - \frac{ſrx^2}{q^2} - py - \frac{ſnx}{q} + \frac{prx}{q} + pn$$

$$rmſq = ſyx - \frac{ſrx^2}{q} - pqy - ſnx + prx + pnq$$

$$rmq = xy - \frac{rx^2}{q} - \frac{pqy}{ſ} - nx + \frac{prx}{ſ} + \frac{pnq}{ſ}$$

$$xy - \frac{rx^2}{q} - \frac{pqy}{ſ} + \frac{prx}{ſ} + \frac{pnq}{ſ} = 0.$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad -nx \qquad -mq$$

Invenitur adhuc regula alia pro locis ad hyperbolam intra aſymptotos, ſi valor ipſius x ponatur eſſe QM.

Tab. VIII. Fig. 82.

Sit nimirum IM hyperbola, cujus aſymptoti RA & AS. Ducantur DT, HL & QN cum aſymptoto AS, DL vero cum altera KR & DH ipſi TM parallela. Sit ut ante AK

te $AK=p$, $KD=PN=n$, $DH=q$, $DL=AR=ſ$, $HL=r$, $RI=m$, $QM=x$, $DQ=TM=y$. Erit (§. 253. *Geom.*)

$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : ſ = y : \frac{ſy}{q}$$

$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = y : \frac{ry}{q}$$

Ergo $AP=DN-AK=ſy : q-p$ & $PM=QM-QN-NP=x-ry : q-n$.

Quare, ob $AR.RI=AP.PM$ (§. 460)

$$mſ=\frac{ſxy}{q}-\frac{rſy^2}{q^2}-\frac{ſny}{q}-px+\frac{pry}{q}+pn.$$

Unde tandem eodem modo, quo ante uſi ſumus, reperitur

$$xy-\frac{ry^2}{q}-\frac{pqx}{ſ}+\frac{pry}{ſ}+\frac{pnq}{ſ}=0.$$
$$-ny \quad -mq$$

Sit e. gr. $xy+\frac{ſdy}{c}-\frac{abd}{c}=0$: erit $r : q=0$, adeoque $r=0$ & hinc $q=ſ$, quia L cadit in H. $-pq : ſ=+ſd : c$, hoc eſt, ob $q=ſ$, $p=-ſd : c$. Porro $+pr : ſ-n=0$, quia x in æquatione præſente deficit, & hinc, ob $r : s=r : q=0$, $n=0$. Denique $pnq : s-mq=-abd : c$. Sed $pnq : s=0$; ergo $mq=mſ=abd : c$. Quare ſi $ſ=ab : c$; erit $m=d$. Omnia igitur eodem modo determinata ſunt ac in problemate præcedente.

Sit $xy-\frac{b}{a}xx-cy=0$. Erit $-r : q=-b : a$, hoc eſt, $r=b$, $q=a$. Porro $-p$ $q : ſ=-c$. Ergo $p=ſc : a$. Cum x in æquatione deſit; $pr : ſ-n=0$, ſeu $pr : ſ=n$, hoc eſt, $bc : a=n$. Denique quoniam terminus ultimus itidem deficit, $pnq : s-mq=0$, ſeu $pnq : s=mq$, vel $pn : ſ=m$, hoc eſt, $bcc : aa=m$ Cognitis valoribus rectarum AK, KD, DH, HL, AR, RI; conſtructio loci manifeſta eſt.

SCHOLION.

549. *Ut uſus hujus doctrinæ appareat; exempla aliquot problematum indeterminatorum in medium afferenda. Antequam tamen id fiat, tradenda ſunt criteria, unde judicium fieri poſſit, cum quanam formularum antecedentium comparanda ſit æquatio ad conſtruendum propoſita. Nimirum duo occurrere poſſunt caſus: aut enim in æquatione propoſita habetur* xy, *aut minus. Si in priori caſu quadratorum indeterminatorum neutrum occurrat, locus eſt hyperbola intra aſymptotos; ſi quadrata indeterminatorum* x^2 *&* y^2 *diverſis ſignis afficiuntur, locus eſt hyperbola circa diametrum deſcripta; ſi eadem quadrata eodem ſigno afficiantur, ſitque coefficiens dimidius facti* xy *æqualis coefficienti quadrati* x^2*, locus eſt parabola; ſi major, hyperbola; ſi minor, ellipſis. In caſu poſteriori ſi unum tantum quadratorum indeterminatorum adſit; locus eſt parabola; ſi utrumque eodem ſigno afficiatur, ellipſis vel circulus; ſi ſignis diverſis gaudeant, hyperbola. Nempe in caſu ultimo hyperbola eſt æquilatera; in penultimo circulus, ſi* x^2 *a fractione libera. Quæ omnia manifeſta ſunt ex accurata formularum generalium contemplatione.*

PROBLEMA 224.

550. *Conſtruere rhomboidem ea conditione, ut rectangulum ex lateribus ſit æquale quadrato dato.*

Sit

Tab. IV. Fig. 51. Sit quadratum datum a^2, ſint latera rhombi x & y: erit per conditionem problematis $xy = a^2$. Conſtruenda itaque eſt hyperbola intra aſymptotos CG & CR, cujus potentia AI $= a$. Erit CQ latus unum rhomboidis, QM alterum (§. 446).

PROBLEMA 225.

551. *Quadratum conſtruere, quod ſit æquale rectangulo, cujus latera differunt recta data.*

Sit recta data $= b$, latus unum rectanguli $= x$, erit alterum $= b + x$. Unde per conditionem problematis $y^2 = bx + x^2$: qui eſt locus ad hyperbolam æquilateram, cujus parameter $= b$ (§. 544).

Id etiam ex formula generali elicitur. Quoniam enim $y^2 - x^2 - bx = 0$, erit (§. 546) $2r:q = 0$, adeoque $q = ſ$, $r^2 : q^2 = 0$; porro $2n = 0$ & hinc $2nr : q = 0$, $n^2 = 0$. Eſt vero $-tſ^2 : 2mq^2 = -1$, hoc eſt, ob $q^2 = ſ^2$, $t : 2m = 1$ ſeu $t = 2m$. Unde apparet, locum eſſe ad hyperbolam æquilateram. Eſt præterea $2tpſ : 2mq = -b$, hoc eſt, ob $t = 2m$ & $ſ = q$, $2p = -b$, unde $p = -\frac{1}{2}b$. Denique $tm^2 : 2m - tp^2 : 2m = 0$, quia quantitas mere cognita in formula data non habetur, hoc eſt $m^2 - p^2 = 0$, ſeu $m^2 = p^2 = \frac{1}{4}bb$. Unde $m = \frac{1}{2}b$.
Tab. IIX. Fig. 80. Conſtructio ex conſtructione generali haud difficulter elicitur. Nimirum pro diametro transverſa AB $= m$ pone b. Quia KC $= -\frac{1}{2}b$, punctum K cadet in partem contrariam & quidem in A, quia ſemidiametro in hoc caſu æqualis. Unde origo indeterminatæ x erit in A, nam ob DK $=$ PN $= 0$, punctum D in K, conſequenter in noſtro caſu in A cadit. Porro ob HL $= 0$ puncta H & L, adeoque & puncta Q & N, & ob PN $= 0$, puncta N & P, conſequenter Q & P coincidunt: unde origo alterius indeterminatæ y eſt in P.

PROBLEMA 226.

Tab. IIX. Fig. 83. 552. *Super data recta* AB *triangulum conſtruere, ita ut quadrata laterum* AC *&* CB *ſint in ratione data.*

Sit ratio data $= b:c$, DB $= x$
AB $= a$, DC $= y$
erit AD $= a - x$

Quoniam (§. 394 *Geom.*) $AC^2 = y^2 + a^2 - 2ax + x^2$ & $CB^2 = x^2 + y^2$; erit per conditionem problematis

$$b:c = y^2 + a^2 - 2ax + x^2 : x^2 + y^2$$

$$bx^2 + by^2 = cy^2 + a^2c - 2acx + cx^2$$

$$by^2 - cy^2 + bx^2 - cx^2 + 2acx - a^2c = 0$$

$$y^2 + x^2 + \frac{2ac}{b-c}x - \frac{a^2c}{b-c} = 0$$

Hæc æquatio comparanda eſt cum æquatione generali locorum ad elli-

ad ellipſin, quia deeſt xy & y^2 atque x^2 eodem ſigno afficiuntur (§. 549). Reperitur adeo (§. 542.)

$\frac{2r}{q} = 0$ $\quad -2n = 0 \quad r^2 : q^2 + tſ^2 : 2mq^2 = 1$

hinc:

$t : 2m = 1$

$r = 0 \;\&\; q = ſ \quad 2nr : q = 0$ h. e. $t = 2m$

Cum diameter $2m$ parametro æqualis ſit; locus ad conſtruendum propoſitus eſt circulus.

Porro

$\frac{2nr}{q} - \frac{2tpſ}{2mq} = -\frac{2ac}{b-c} \qquad n^2 - \frac{tm^2}{2m} + \frac{tp^2}{2m} = -\frac{a^2c}{b-c}$

h. e. $2p = \frac{2ac}{b-c} \qquad p^2 - m^2 = -\frac{a^2c}{b-c}$

$p = \frac{ac}{b-c} \qquad p^2 + \frac{a^2c}{b-c} = m^2$

$\frac{a^2c^2}{(b-c)^2} + \frac{a^2c}{b-c} = m^2$

h. e. $\frac{a^2c^2 + a^2bc - a^2c^2}{(b-c)^2} = m^2$

$\frac{a^2bc}{(b-c)^2} = m^2$

$\frac{a\sqrt{bc}}{b-c} = m$

Eſt ergo radius circuli $= a\sqrt{bc} : (b-c)$. Quodſi igitur AL $= ac : (b-c)$ & radio CL $= a\sqrt{bc} : (b-c)$ deſcribatur circulus ECF: erit AD $= x$, DC $= y$. Nam ponatur brevitatis gratia AL $= p$, LF $= m$; erit DL $= p - x$, ED $= m - p + x$ & DF $= m + p - x$, conſequenter, ob ED.DF $=$ DC², $m^2 - p^2 + 2px - x^2 = y^2$

$y^2 + x^2 + px + p^2 = 0$
$\qquad\qquad\qquad\quad - m^2$

hoc eſt, ſubſtitutis valoribus p & $p^2 - m^2$, erit $y^2 + x^2 + \frac{2ac}{b-c}x - \frac{a^2c}{b-c} = 0$.

PROBLEMA 227.

553. *Duas rectas* AB *&* CD *ita ſecare in* E *&* F, *ut* AE.EB $=$ CF FD. Tab. VIII Fig. 80.

Sit AB $= a$, AE $= x$
CD $= b$, CF $= y$
erit EB $= a - x$
FD $= b - y$
Quare $ax - xx = by - yy$

$y^2 - x^2 - by + ax = 0$

Hæc æquatio comparanda cum æquatione locali pro hyperbola. Eſt nempe

$\frac{2r}{q} = 0$ & hinc $q = ſ$, $r^2 : q^2 = 0 \quad 2nr :$
$q^2 = ſ^2 \qquad (q = 0$.

$-\frac{tſ^2}{2mq^2} = -1 \qquad -2n = -b \qquad \frac{2tpſ}{2mq} = a$

$n = \frac{1}{2}b$

$t : 2m = 1 \qquad 2p = a$

$t = 2m \qquad p = \frac{1}{2}a$

$n^2 + \frac{tm^2}{2m} - \frac{tp^2}{2m} = 0$

$n^2 +$

$$n^2+m^2-p^2=0$$

$$m^2=p^2-n^2$$

hoc eſt, $\frac{1}{4}aa-\frac{1}{4}bb$

$$m=V(\tfrac{1}{4}aa-\tfrac{1}{4}bb)$$

Quoniam $t=2m$, hoc eſt, parameter diametro æqualis; hyperbola eſt æquilatera (§. 462), diametro $=V(\frac{1}{4}aa-\frac{1}{4}bb)$ conſtruenda.
Tab. IIX. Fig. 79. Cum diametro determinata AB agatur parallela HN & cum MN altera GH ita ut ſit GH $=$ PN $=\frac{1}{2}b$ & IH $=\frac{1}{2}a$, erit HN $=x$ & MN $=y$. Eſt enim IN $=$ CP $=x-\frac{1}{2}a$; PM $=y-\frac{1}{2}b$, & AC $=V(\frac{1}{4}aa-\frac{1}{4}bb)$. Quare, ob AP.PB $=$ PC^2 - AC^2 $=$ PM^2,

$$x^2-ax+\tfrac{1}{4}aa-\tfrac{1}{4}aa+\tfrac{1}{4}bb=y^2-by+\tfrac{1}{4}bb$$

$$x^2-ax=y^2-by$$

$$y^2-x^2-by+ax=0.$$

PROBLEMA 228.

Tab. IIX. Fig. 85. 554. *Super recta* AB *deſcriptus ſit ſemicirculus* ANB *& alius minor* ERD. *Ex puncto quocunque* N *demittatur ad* AB *perpendicularis* PN, *ductoque radio* CN, *ex puncto* R *perpendicularis alia* RM. *Determinare locum, in quo ſunt omnia puncta* M *eodem modo determinata.*

Sit AB $=a$ ED $=d$, AP $=x$, PM $=y$: erit PB $=a-x$, PN $=V(ax-xx)=v$ (§. 341), PC $=\frac{1}{2}a-x$ NR $=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}d$ & (§. 213. *Geom*).

NC : NP = NR : NM

$$\tfrac{1}{2}a : v = \tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{2}d : \frac{\frac{1}{2}(a-d)v}{\frac{1}{2}a}$$

Quare PM $= v-\dfrac{\frac{1}{2}av+\frac{1}{2}dv}{\frac{1}{2}a} = \dfrac{\frac{1}{2}av-\frac{1}{2}av+\frac{1}{2}dv}{\frac{1}{2}a} = \dfrac{\frac{1}{2}dv}{\frac{1}{2}a}$ conſequenter PM$^2=y^2=\frac{1}{4}d^2v^2:\frac{1}{4}a^2$. Unde habetur $\frac{1}{4}a^2y^2=\frac{1}{4}d^2(ax-x^2)$, ſubſtituto nimirum valore ipſius v^2, quæ æquatio in ſequentem reſolvitur analogiam:

$$y^2 : \tfrac{1}{4}d^2 = ax-x^2 : \tfrac{1}{4}a^2$$

h. eſt, PM^2 : FC^2 $=$ AP.PB : AC^2

Unde intelligitur locum punctorum M eſſe ellipſin, cujus axes conjugati AB & ED (§. 389).

SCHOLION.

555. *Apparet adeo, curvam, quam fornicibus conſtruendis aptam prædicat* Serlius (m) *eſſe ellipſin.*

COROLLARIUM.

556. Quoniam PN $=v$, PM $=\frac{1}{2}dv:\frac{1}{2}a$; erit PN:PM $= v : \dfrac{\frac{1}{2}dv}{\frac{1}{2}a}$

hoc eſt (§. 104) $\frac{1}{2}av : \frac{1}{2}dv$
$\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}d$
CG : CF

PRO-

(m) Architect. lib. I. c. I. f. m. 9. b.

PROBLEMA 229.

557. *Super recta* HI *deſcribatur ſemicirculus* HGI. *Sit recta quæcunque* AB *bifariam diviſa in* C *&* *ex* C *erecta perpendicularis* CD = GF. *Erecta perpendiculari* LN *fiat* DC : AC = HL : AP *& in* P *erigatur perpendicularis* PM = NL. *Determinare locum, in quo ſunt omnia puncta* M *eodem modo inventa.*

Sit HF = GF = DC = d, AC = a, AP = x, PM = y : erit ex hypotheſi

$$AC : DC = AP : HL$$
$$a : d = x : \frac{dx}{a}$$

Quare LI = $2d - dx : a = (2ad - dx) : a$, & hinc LN² = $(2addx - ddxx) : aa$ (§. 341). Habemus itaque ex hypotheſi;

$$y^2 = (2addx - ddxx) : aa$$

adeoque, $aa : 2ax - xx = dd : y^2$.

Eſt igitur locus quæſitus ellipſis, cujus ſemiaxes conjugati AC & CD (§. 389).

SCHOLION.

558. *Evidens adeo eſt, curvam, quam* Albertus Durerus *& cum ipſo* Daniel Hartmannus (n) *fornicibus conſtruendis aptam prædicant, eſſe ellipſin Apollonianam.*

PROBLEMA 230.

559. *Rectam* DB *ita ſecare in* P *ſimulque invenire aliam rectam* y, *ita ut rectangulum ex* y *in datam* CA *ſit æquale rectangulo ex ſegmentis partium* DP *&* PB.

Sit DB = a, AC = b, DP = x, erit PB = $a - x$, conſequenter per conditionem problematis

$$ax - xx = by$$
$$x^2 - ax + by = 0.$$

Eſt itaque locus ad parabolam (§. 549).

Quodſi cum æquatione locali ad parabolam generali modo inventam compares; erit (§. 538),

$$\frac{-2q}{p} = 0 \qquad -2r = -a \qquad ts : p = b$$
$$\text{hinc } p = s \qquad r = \tfrac{1}{2}a \qquad t = -b$$
$$rr + tn = 0$$
$$\tfrac{1}{4}aa - bn = 0$$
$$\tfrac{1}{4}aa = bn$$
$$\tfrac{1}{4}aa : b = n$$

Eſt adeo parameter = $-b$. Quare parametro b deſcribenda eſt parabola deorſum tendens & in ea AK = $\tfrac{1}{4}aa : b$, KB = $\tfrac{1}{2}a$. Ducta igitur PM ipſi AK parallela, erit PB = x, PM = y. Nam KP = RM = $\tfrac{1}{2}a - x$ & AR = $\tfrac{1}{4}aa : b - y$. Quare (§. 352) $\tfrac{1}{4}aa - ax + xx = \tfrac{1}{4}aa - by$, conſequenter $x^2 - ax + by = 0$

(n) In der bürgerlichen Bau-Kunſt f. 7. & ſeqq.

PROBLEMA 231.

560. *Datam rectam* MN *in tres partes continue proportionales ſecare.*

Sit $MN = a$, pars prima $= x$, ſecunda $= y$, erit tertia $= yy : x$ & per conditionem problematis

$$x + y + yy : x = a$$

$$\overline{\hspace{4em}} \; x$$

$$xx + xy + yy = ax$$

$$yy + xy + xx - ax = 0$$

Cum locus ſit vel ad ellipſin, vel ad circulum (§. 542); æquatio comparanda eſt cum formula generali ad ellipſin. Erit ergo $\frac{-2r}{q} = 1$, hoc eſt, $\frac{r}{q} = -\frac{1}{2}$, nempe $r = -1$ & $q = 2$. Ponamus DHL eſſe triangulum rectangulum: quoniam habetur valor ipſius r negativus, triangulum contraria ratione conſtruendum, adeoque angulus L erit rectus, conſequenter, ob $DH = 2$ & $LH = 1$, $DL = \sqrt{(4-1)} = \sqrt{3}$ (§. 394 *Geom.*) $= ſ$ & hinc $ſ^2 = 3$. Porro vi formulæ univerſalis

Tab. VII. Fig. 78.

$$\frac{r^2}{q^2} + \frac{tſ^2}{2mq^2} = 1 \qquad \text{hinc} \qquad 2n = 0.$$

$$\frac{1}{4} + \frac{3t}{8m} = 1 \qquad\qquad \frac{2nr}{q} = 0$$

$$\frac{3t}{8m} = \frac{3}{4} \qquad\qquad n^2 = 0$$

$$t : 2m = 1 \qquad \frac{-2tpſ}{2mq} = -a$$

$$t = 2m \qquad p\sqrt{3} = a \quad \text{ob } t = 2m, \; q = 2, ſ = \sqrt{3}$$

$$p = a : \sqrt{3} = m$$

Quoniam $t = 2m$, parameter nempe diametro æqualis; locus eſt circulus, cujus radius $a : \sqrt{3}$. Et quia $n = PN = 0$; punctum N in P cadit, hoc eſt, recta DL cum diametro coincidit. Porro ob $KC = p = AC$; punctum D in A cadit. Deſcribatur ergo radio $AC = a : \sqrt{3}$ ſemicirculus, fiat $HL : AL = 1 : \sqrt{3}$, ducaturque recta AHR. Quodſi inter C & B erigatur perpendicularis PM: erit $AQ = x$, $QM = y$. Nam (§. 253. *Geom.*)

Tab. VII. Fig. 78.

Tab. VIII. Fig. 88.

$$AH : HL = AQ : QP$$
$$2 : 1 = x : \tfrac{1}{2}x$$

Unde $PM = y + \frac{1}{2}x$ & $PM^2 = y^2 + xy + \frac{1}{4}x^2$.

Porro $AH : AL = AQ : AP$

$$2 : \sqrt{3} = x : \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Unde $PB = AB - AP = \frac{2a}{\sqrt{3}} - \frac{x\sqrt{3}}{2}$ & $AP.PB = ax - \frac{3}{4}x^2$. Habemus adeo (§. 341)

$$y^2 + xy + \tfrac{1}{4}xx = ax - \tfrac{3}{4}x^2$$

$$y^2 + xy + x^2 - ax = 0.$$

SCHOLION

561. *Eodem modo æquationes locales inveniri poſſunt pro Curvis ſuperiorum generum ad conſtruenda loca hyperſolida.*

CAP.

CAP. VII.

DE CONSTRUCTIONE ÆQVATIONUM SUPERIORUM.

PROBLEMA 232.

562. **Æ***Quationem quamcunque geometrice conſtruere.*

1. Introducatur in æquationem datam nova indeterminata, &
2. Hujus ope æquatio in alias locales ad diverſas curvas transformetur, in quibus nempe ſint duæ indeterminatæ.
3. Conſtruantur duæ æquationes locales. Communis enim interſectio radices determinabit.

SCHOLION

563. *Genuinum hoc æquationes conſtruendi artificium primus aperuit* Renatus Franciſcus Sluſius, *Canonicus Leodienſis*, (o): *quem poſtea ſecuti ſunt alii de hac materia commentati. Ut autem methodi vim intelligamus; eam exemplis cubicarum inprimis & quadrato-quadraticarum æquationum illuſtrabimus, quoniam ad has conſtruendas ſufficiunt, quæ de locis planis & ſolidis in capite præcedente tradidimus.*

PROBLEMA 233.

564. *Conſtruere æquationem cubicam* $y^3 + aby = aac$.

Æquatio propoſita in hanc reſolvitur analogiam

$$a : y = yy + ab : ac$$

ut nova indeterminata in æquationem introducatur, & ejus ope æquationes locales ad diverſas curvas eliciantur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$, Hinc $x = y^2 : a$

Porro $y . x = yy + ab : ac$ (§. 156. *Arithm.*)

hoc eſt, $ax + ab : ac$

ſeu (§. 104) $x + b : c$

II. $x^2 + bx = cy$

$ax = y^2$ | $ax = y^2$

$x^2 + bx = cy$ | $cy = x^2 + bx$

III. $ax - x^2 - bx = y^2 - cy$ | IV. $ax - cy = y^2 - (x^2 - bx$

$x^2 + bx = cy$ | $y^3 + aby = aac$ (: a)

$x^2 + \frac{by^2}{a} = cy$ | $\frac{y^3}{a} + by = ac$

V. $\frac{y^2}{b} + \frac{ax^2}{b} = acy$ | VI. $xy + by = ac$

Habemus adeo æquationes locales:

 I. y^2-

o) Meſolabo Part. 2. integra.

I. $y^2 - ax = 0$

II. $x^2 + bx - cy = 0$

III. $y^2 + x^2 - cy + \begin{matrix} bx \\ -ax \end{matrix} = 0$

IV. $y^2 - x^2 + cy - \begin{matrix} ax \\ -bx \end{matrix} = 0$

V. $y^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} = 0$

VI. $xy + by - ac = 0$

Locus primus & ſecundus ſunt ad parabolam; tertius ad circulum; quartus ad hyperbolam æquilateram; quintus ad ellipſin; ſextus ad hyperbolam intra aſymptotos.

Equidem conſtructio æquationis abſolvi poteſt, duobus quibuscunque locis combinatis; præſtat tamen nonniſi circulum cum una ex ſectionibus conicis combinari, non tam quod circulus ſit locus planus (ut vulgo cum *Carteſio* ſentiunt); ſed quia facilius deſcribitur ſectionibus coni.

Agedum itaque, conſtruamus æquationem propoſitam primum ope æquationis ad parabolam $y^2 - ax = 0$ & alterius ad circulum $y^2 + x^2 - cy + bx - ax = 0$

Tab. IX. Fig. 89. Locus prior conſtruitur, ſi parametro a parabola deſcribatur; erit origo indeterminatæ x in vertice, nempe $AP = x$, $PM = y$ (§. 538).

Pro circulo erit vi theorematis generalis (§. 543.)

$2r = 0$ & hinc $q = s$ $\quad 2n = c \quad -2p = b - a$

$(r^2 + s^2) : q^2 = 1 \quad n = \frac{1}{2}c \quad -p = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$

ſeu $s = 1$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

$$\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb = m^2$$

$$V(\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb) = m$$

Quodſi ergo radio $AL = m$ ſemicirculus AMB deſcribatur, fiatque $LK = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$ & $KD = \frac{1}{2}c$, atque DQ ipſi AB, QM vero inter K & A ob valorem ipſius p negativum, quia $b > a$, ipſi KD parallela ducatur: erit (§. 542. 543) origo indeterminatæ x in D, nempe $DQ = x$ & $QM = y$. Tab. IX. Fig. 90.

Si jam circulus cum parabola combinandus, quo eadem ſit indeterminatarum origo, punctum D in A & DQ ſuper AP cadere debet. Quare ſi fiat perpendicularis $AK = \frac{1}{2}c$ & altera $KL = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$: erit centrum circuli L & radius LA. Quodſi deſcribatur, ſecabit parabolam in unico puncto M. Dico, ſemiordinatam parabolæ PM eſſe radicem veram æquationis, radices duas reliquas non niſi imaginarias. Fig. 90. & 89.

Eſt nimirum $AK = PR = \frac{1}{2}c$, $KL = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, adeoque $LA = V(\frac{1}{4}bb - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc)$, qui eſt radius circuli per ſuperius demonſtrata, &, ſi $PM = y$, $MR = y - \frac{1}{2}c$. Porro $AP = KR = yy : a$ (§. 355), conſequenter

LR

$LR = y^2 : a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$ & hinc ob LM^2 ſeu $LA^2 = LR^2 + MR^2$ (§. 394. *Geom.*) $\frac{1}{4}bb - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc = \frac{y^4}{aa} + \frac{by^2}{a} + \frac{1}{4}bb - y^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa + y^2 - cy + \frac{1}{4}cc$, hoc eſt,

$$\frac{y^4}{aa} + \frac{by^2}{a} - cy = 0$$

$$y^4 + aby^2 - aacy = 0$$

$$y^3 + aby - aac = 0$$

Conſtruamus porro eandem æquationem combinato circulo cum ellipſi. Quoniam locus ad ellipſin eſt $y^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} = 0$; erit (§. 542)

$\frac{2r}{q} = 0$ hinc $q = ſ$ $n^2 = \frac{tm^2}{2m}$

$\frac{t}{2m} = \frac{a}{b}$ $n^2 = \frac{am^2}{b}$

$2n = \frac{ac}{b}$ $\frac{bn^2}{a} = m^2$

$n = \frac{ac}{2b}$ $\frac{a^2bc^2}{4ab^2} = m^2$

$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{ac^2}{b}} = m$

Eſt itaque ratio parametri t ad diametrum $2m$ ut a ad b: ellipſis diametro $AB = \sqrt{\frac{ac^2}{b}}$ deſcribenda & in centro G erecta perpendiculari $CF = ac : 2b$, ductisque FQ ipſi AC & QM ipſi CF parallelis, erit $FQ = x$ & $QM = y$, origo nempe indeterminatæ x in F. Circulus itaque ita combinandus cum ellipſi, ut punctum D in F & DK ſuper FC cadat, hoc eſt, $FC = \frac{ac}{2b}$ continuetur in K, donec fiat $FK = \frac{1}{2}c$ (eſt enim $b > a$, hinc $bc > ac$, conſequenter $c > ac : b$) & in K erigatur perpendicularis $KL = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$: erit enim per præcedentia L centrum, LF radius circuli, qui deſcriptus ellipſin in M ſecabit. Dico QM eſſe radicem æquationis. Tab. IX. Fig. 91.

Ponamus enim $QM = y$. Quoniam $CF = PQ = ac:2b$ & $FQ = CP = x$, $AC = \frac{1}{2}\sqrt{(ac^2:b)}$; erit $PM = QM - PQ = y - ac:2b$ & ex natura ellipſis (§. 291).

$$b : a = \frac{ac^2}{4b} - x^2 : y^2 - \frac{acy}{b} + \frac{a^2c^2}{4b^2}$$

$$\frac{a^2c^2}{4b^2} - \frac{ax^2}{b} = y^2 - \frac{acy}{a} + \frac{a^2c^2}{4b^2}$$

$$y^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} = 0$$

$$\frac{ax^2}{b} = \frac{acy}{b} - y^2$$

$$x^2 = cy - by^2 : a$$

Porro $KR = QF = x$, $KL = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, $KF = GF = \frac{1}{2}c$, adeoque $MR = MQ - QR = y -$

$=y-\frac{1}{2}c$, RL$=x+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a$, conſequenter (§. 394. *Geom.*) $LF^2 = ML^2 = KL^2+KF^2 = \frac{1}{4}bb-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}cc = MR^2+RL^2 = y^2-cy+cc+x^2+bx+\frac{1}{4}bb-ax-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}aa$. Unde habemus

$$y^2+x^2-cy+bx-ax=0$$

hoc eſt, ob $x^2=cy-by^2:a$

$$y^2+cy-\frac{by^2}{a}-cy+bx-ax=0$$

$$\frac{ay^2-by^2}{a}+bx-ax=0$$

ſeu $\frac{ay^2-by^2}{a}=ax-bx$

$a-b$

$$\frac{y^2}{a}=x$$

$$\frac{y^4}{aa}=x^2$$

$$\frac{y^4}{aa}=\frac{cy-by^2}{a}$$

aa

$$y^4=aacy-aby^2$$

y

$$y^3=aac-aby$$

$$y^3+aby-aac=0.$$

Conſtruamus denique eandem æquationem combinatis loco ad hyperbolam intra aſymptotos $xy+by-ac=0$ & loco ad circulum $y^2+x^2-cy+bx-ax=0$. Poſterioris conſtructionem jam tradidimus: alterius conſtructio elicitur comparatione æquationis propoſitæ cum formula generali pro locis ad hyperbolam intra aſymptotos inſtituta. Eſt nempe (§. 548)

$\frac{r}{q}=0$ $p=0$ $-n=b$ $-mq=-ac$ Tab. IX. Fig. 92.
hinc
$q=f$ $\frac{pr}{f}=0$ $n=-b$ hinc $m=c$ $q=a$

Jungantur ipſi AR$=a$ recta RI $=c$ & indefinita AS ad angulos rectos, quæ erunt aſymptoti hyperbolæ æquilateræ per punctum I deſcribendæ (§. 466). Fiat AD $=b$, quia valor ipſius b negativus; erit NM$=$DT$=x$, TM$=y$ (§. *cit*). Quodſi jam circulus cum hyperbola combinari debet; punctum D in D & recta DQ ſuper DT cadere debet. Scilicet ex D in K transferatur DK $=\frac{1}{2}c$ A H & ex K in L, $\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$. Radio DL deſcribatur circulus & ex puncto interſectionis circuli atque hyperbolæ M demittatur perpendicularis TM: dico hanc eſſe radicem æquationis. Tab. IX. Fig. 90 & 92.

Quoniam enim AR$=a$, RI$=c$, AD$=$PN$=b$, NM$=$DT$=x$, TM$=y$; erit AT$=b+x$ & ob AR. RI$=$AT.TM (§.466) $by+xy=ac$, conſequenter $x=\frac{ac}{y}-b$. Porro

ro $KR = NM = x$, $LK = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, $DK = TR = \frac{1}{2}c$. Ergo $LR = x + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, $RM = y - \frac{1}{2}c$, & ob $LM^2 = LR^2 + RM^2$ (§. 394 *Geom.*) $x^2 + bx + \frac{1}{4}bb - ax - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}a^2 + y^2 - cy + \frac{1}{4}c^2 = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc$, hoc eſt,

$$y^2 - cy = ax - x^2 - bx$$

ſeu $(a - x - b)x$

$$y^2 - cy = \left(a - \frac{ac}{y} + b - b\right)\left(\frac{ac}{y} - b\right)$$

$$= \left(a - \frac{ac}{y}\right)\left(\frac{ac}{y} - b\right)$$

hoc eſt,

$$y^2 - cy = \frac{aac}{y} - \frac{a^2c^2}{y^2} - ab + \frac{abc}{y} \qquad y^2$$

$$y^4 - cy^3 = a^2cy - a^2c^2 - aby^2 + abcy$$

$$y - c \qquad y^3 = a^2c - aby$$

$$y^3 + aby - a^2c = 0$$

SCHOLION.

565. *Mirabuntur forte, qui tyrones ſunt in altioribus, quod tam operoſe conſtruxerimus æquationem, quæ per regulam* Carteſii *ope circuli & parabolæ admodum facile conſtruitur. Sed notent velim, geometricas æquationum conſtructiones nullius fere in praxi eſſe uſus, cum eidem ſatisfaciat methodus extrahendi radicem per approximationem. Faciunt vero ad exercendam ingenii vim & recludendos inventionum fontes. Quamobrem methodus inveniendi conſtructiones iſtiusmodi quam maxime explicari debet.*

PROBLEMA 234.

566. *Conſtruere æquationem cubicam,* $y^3 - aby = aac$.

Æquatio propoſita in hanc reſolvitur analogiam:

$$a : y = yy - ab : ac$$

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur & æquationes locales diverſæ inde eliciantur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit

I. $ax = y^2$ & hinc $y^2 : a = x$

Porro $y : x = yy - ab : ac$

hoc eſt, $ax - ab : ac$

ſeu (§. 104) $x - b : c$

II. $x^2 - bx = cy$

$ax = y^2$ $\qquad ax = y^2$

$x^2 - bx = cy$ $\qquad cy = x^2 - bx$

III. $ax - x^2 + bx = y^2 - cy$ $\qquad$ IV. $ax - cy = y^2 - x^2 + bx$

$x^2 - bx = cy$ $\qquad y^3 - aby = aac \quad a$

$x^2 - \frac{by^2}{a} = cy$ $\qquad \frac{y^3}{a} - by = ac$

V. $\frac{ax^2}{b} - y^2 = \frac{acy}{b}$ $\qquad$ VI. $xy - by = ac$ (I)

Habemus adeo æquationes locales

I. $y^2 - ax = 0$

II. $x^2 - bx - cy = 0$

III. $y^2 + x^2 - cy - bx - ax = 0$

IV. $y^2 - x^2 + cy + bx - ax = 0$

V. $y^2 - \frac{ax^2}{b} + \frac{acy}{b} = 0$.

VI. $xy - by - ac = 0$.

Locus primus & ſecundus ſunt ad pa-

ad parabolam ; tertius ad circulum ; quartus ad hyperbolam æquilateram ; quintus ad hyperbolam ſcalenam ; ſextus ad hyperbolam intra aſymptotos.

Cum æquationes locales nonniſi ſignis differant ab iis, in quas æquationem problematis præcedentis reſolvimus; æquatio præſentis eodem fere modo conſtruitur quo præcedentem conſtruximus. Id quod in unico caſu, quo circulus cum parabola combinatur, oſtendiſſe ſuffecerit.

Tab. IX. Fig. 93. Locus ad parabolam $y^2 - ax = 0$ conſtruitur ut in problemate præcedente, ſi parametro a parabola deſcribatur: erit origo indeterminatæ x in vertice, nempe $AP = x$, $PN = y$.

Pro loco ad circulum $y^2 + x^2 - cy - bx - ax = 0$ erit vi theorematis generalis (§. 542) $2r = 0$ & hinc $q = ſ$

$2n = c$ $\quad 2p = b + a$ $\quad (r^2 + ſ^2) : q^2 = 1$

$n = \frac{1}{2}c$ $\quad p = \frac{b + a}{2}$ ſeu $ſ = 1$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

$$\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa = m^2$$

$$V(\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa) = m$$

Quia ergo in circulo origo indeterminatæ x diſtat a centro quantitate $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a$ & alterius y quantitate $\frac{1}{2}c$; fiat $AD = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ & perpendicularis $DH = \frac{1}{2}c$ atque radio AH deſcribatur per verticem parabolæ A circulus, erit PM radix vera æquationis. QN & qn erunt falſæ.

Nam $AH^2 = MH^2 = HD^2 + DA^2 = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc$ (§. 394. *Geom.*), $AP = yy : a$, (§. 355) $PD = HR = \frac{yy}{a} - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, $MR = y - \frac{1}{2}c$, conſequenter ob $HM^2 = HR^2 + MR^2$ (§. 394. *Geom.*) $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc = \frac{y^4}{aa} - y^2 + \frac{1}{4}aa - \frac{byy}{a} + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + y^2 - cy + \frac{1}{4}cc$, hoc eſt,

Tab. IX. Fig. 93.

$$\frac{y^4}{aa} - \frac{byy}{a} - cy = 0$$

$$y^4 - abyy - aacy = 0$$

$$y^3 - aby - aac = 0.$$

PROBLEMA 235.

567. *Conſtruere æquationem cubicam* $y^3 - aby = - aac$.

Æquatio propoſita $y^3 - aby = -aac$, hoc eſt, $aac = aby - y^3$ in hanc reſolvitur analogiam:

$$a : y = ab - yy : ac$$

ut nova indeterminata introducatur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$. Hinc $x = y^2 : a$

Porro

Porro $y : x = ab\text{-}yy : ac$

hoc eſt, $ab - ax : ac$

ſeu (§.104) $b - x : c$

$$\text{II. } bx - xx = cy$$

$$ax = y^2 \qquad ax = y^2$$

$$bx - x^2 = cy \qquad cy = bx - x^2$$

$$\text{III. } ax - bx + x^2 - y^2 \;(-cy \qquad \text{IV. } ax - cy = y^2 - (bx + x^2$$

$$bx - x^2 = cy \qquad aac = aby - y^3$$

$$\frac{by^2}{a} - x^2 = cy \qquad ac = by - \frac{y^3}{a}$$

$$\frac{b}{a}$$

$$\text{V. } y^2 - \frac{ax^2}{b} = \frac{acy}{b} \qquad \text{VI. } ac = by - xy$$

Habemus adeo æquationes locales:

I. $y^2 - ax = 0$

II. $x^2 - bx + cy = 0$

III. $y^2 - x^2 - cy + bx = 0$
$\qquad\qquad\qquad\quad - ax$

IV. $y^2 + x^2 + cy - bx = 0$
$\qquad\qquad\qquad\quad - ax$

V. $y^2 - \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} = 0$

VI. $xy - by - ac = 0$

Locus primus & ſecundus ſunt ad parabolam, tertius ad hyperbolam æquilateram, quartus ad circulum, quintus ad hyperbolam ſcalenam, ſextus ad hyperbolam intra aſymptotos.

Æquationes locales denuo nonniſi ſignis differunt ab iis, quas in problemate 233 (§. 564) reperimus. Quare denuo nobis ſuffecerit, conſtructionem ope parabolæ & circuli oſtendiſſe.

Quoniam locus ad parabolam $y^2 = ax$; parabola denuo con- Tab. IX.
ſtruitur parametro a & origo inde- Fig.
terminatæ x eſt in vertice axis A. 94.

Pro circulo, cujus æquatio $y^2 + x^2 + cy - bx - ax = 0$, vi theorematis generalis:

$$2r = 0 \qquad -2n = c \qquad -2p = -b-a$$

hinc

$$q = f \qquad n = -\tfrac{1}{2}c \qquad p = \frac{b+a}{2}$$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

$$\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}bb = m^2$$

$$V(\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}bb) = m$$

Deſcribatur ergo radio AC $= m$ Tab.
ſemicirculus, ductaque FLS inter- IX.
vallo CL $= \tfrac{1}{2}c$ diametro AB paral- Fig.
lela; erit FQ $= x$, QM $= y$. 95.

Quamobrem ſi circulus cum pa- Tab.
rabola combinatur, punctum F ſu- IX.
per A & FL ſuper AD cadet. Qua- Fig.
re ſi fiat AD $= \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b$ & erigatur 94.
perpendicularis DH $= \tfrac{1}{2}c$; erit AH $= V(\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}bb + \tfrac{1}{4}cc)$ radius circuli per verticem deſcribendi & PM radix vera æquationis, QN & qn vero radices ſunt falſæ.

Nam AP $= yy : a$ (§. 355), hinc DP $=$ HR $= yy : a - \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b$. Porro MR $= y + \tfrac{1}{2}c$. Quare ob HM² $=$ MR² $+$ HR² (§. 394 *Geom.*), $\tfrac{1}{4}aa +$

$$\tfrac{1}{2}ab+\tfrac{1}{4}bb+\tfrac{1}{4}cc=\frac{y^4}{aa}-y^2+\tfrac{1}{4}aa-\frac{byy}{a}$$
$+\tfrac{1}{2}ab+\tfrac{1}{4}bb+y^2+cy+\tfrac{1}{4}cc$, hoc eſt,

$$\frac{y^4}{aa}-\frac{byy}{a}+cy=0$$

$$y^4-abyy+aacy=0$$

$$y^3-aby+aac=0$$

COROLLARIUM.

568. Si circulus parabolam tangit; duæ interſectiones coincidunt, adeoque æquatio duas habet radices æquales. Si eam nec tangit, nec ſecat; radices omnes ſunt impoſſibiles.

SCHOLION.

569. *Conſtructiones per circulum & parabolam, quas dedimus, coincidunt cum iis, quas habet* Carteſius (o).

PROBLEMA 236.

570. *Conſtruere æquationem cubicam* $y^3+ay^2-aby=aac$.

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur, fiat

$$a:y=y:x$$

erit I. $ax=y^2$ Hinc $x=y^2:a$

Subſtituatur ax pro y^2 in æquatione data

erit $$axy+aax-aby=aac$$

$$\text{II. } xy+ax-by=ac$$

$$xy^2+axy-by^2-a^2x+aby=acy-a^2c$$
$$-axy$$

$$xy^2-by^2-a^2x=acy-aby-a^2c$$

$$ax^2-abx^2-a^2x=acy-aby-a^2c \quad \text{(I)}$$

III. $x^2-bx-ax=cy-by-ac$
$ax=y^2$

IV. $2ax-x^2+bx=y^2-cy+by+ac$
$x^2-bx-ax=cy-by-ac$
$ax=y^2$

V. $x^2-bx=y^2+cy-by-ac$
$$x^2-\frac{by^2}{a}=ax+cy-by-ac$$

VI. $$\frac{ax^2}{b}-y^2=\frac{a^2x}{b}+\frac{acy}{b}-ay-\frac{a^2c}{b}$$

Habemus adeo æquationes locales:

I. $y^2-ax=0$

II. $xy+ax-by-ac=0$

III. $x^2-bx-cy+ac=0$
$\quad -ax+by$

IV. $y^2+x^2-cy-2ax+ac=0$
$\quad +by-bx$

V. $y^2-x^2+cy+bx-ac=0$
$\quad -by$

VI. $y^2-\frac{ax^2}{b}+\frac{acy}{b}-\frac{a^2c}{b}=0$
$\quad -ay$

Locus primus & tertius ſunt ad parabolam; ſecundus ad hyperbolam intra aſymptotos; quartus ad

(o) Geometr. lib. 3. p. 85. & ſeqq.

ad circulum; quintus ad hyperbolam æquilateram; ſextus ad hyperbolam ſcalenam.

Conſtruamus æquationem combinando circulum cum parabola. [ab. X. ig. 6.] Locus ad parabolam $y^2 - ax = 0$ conſtruitur, ſi parametro a parabola deſcribitur; cujus vertex A origo ipſius x.

Pro circulo $y^2 + x^2 - cy + by - 2ax - bx + ac = 0$ erit vi theorematis generalis (§. 543).

$$2r = 0 \qquad -2n = -c + b \qquad -2p = -2a - b$$

$$\int^2 : q^2 = 1 \qquad n = \tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{2}b \qquad p = a + \tfrac{1}{2}b$$

$$\int^2 = q^2 \qquad n^2 + p^2 - m^2 = ac$$

$$\int = q \qquad n^2 + p^2 - ac = m^2$$

$$\tfrac{1}{4}c^2 - \tfrac{1}{2}bc + \tfrac{1}{4}bb + a^2 + ab + \tfrac{1}{4}bb - ac = m^2$$

$$\sqrt{[\tfrac{1}{4}bb + (a + \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}c)^2]} = m$$

Jungatur ipſi $IL = a$ ad angulos rectos LR ipſi æqualis & reſecetur [ab. X. ig. 7.] $LH = PN = \tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{2}b$; erit $HR = a + \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}c$. Fiat $DL = HC = \tfrac{1}{2}b$; erit $CR = m$, adeoque radius circuli quo deſcripto habebitur $IP = x$ & $PM = y$.

Si jam circulus cum parabola combinatur, punctum I in verticem parabolæ A & IP ſuper AP cadit. [Tab. X. Fig. 6.] Quare fiat $AL = a$; erit $LR^2 = aa$ (§. 352), hoc eſt, $LR = a$. Fiat porro $LH = \tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{2}b$; erit $HR = a + \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}c$. Fiat denique $DL = HC = \tfrac{1}{2}b$; erit CR radius circuli per punctum parabolæ R ex centro C deſcribendi & ſemiordinata PM radix æquationis.

Nam $PN = LH = \tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{2}b$: hinc $NM = y + \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}c$. Ex natura parabolæ $y^2 : a = AP$: unde $DP = CN = \frac{y^2}{a} - a - \tfrac{1}{2}b$. Quare cum ſit (§. 394 Geom.) $CM^2 (= CR^2) = CN^2 + CM^2$; $\tfrac{1}{4}b^2 + a^2 + ab + \tfrac{1}{4}bb - ac - \tfrac{1}{2}bc + \tfrac{1}{4}cc = \frac{y^4}{aa} - 2y^2 + aa - \frac{by^2}{a} + ab + \tfrac{1}{4}bb + y^2 + by + \tfrac{1}{4}bb - cy - \tfrac{1}{2}bc + \tfrac{1}{4}cc$, hoc eſt,

$$\frac{y^4}{aa} - y^2 + \frac{by^2}{a} + by - cy - ac = 0$$

$$\frac{y^4 - a^2y^2 + aby^2 + a^2by - a^2cy - a^3c = }{y - a}\ aa$$

$$y^3 + ay^2 - aby - a^2c = 0.$$

SCHOLION.

571. *Satis liquet, quomodo æquationum cubicarum caſus reliqui conſtrui debeant, ut adeo plura addere ſupervacaneum judicemus.*

PROBLEMA 237.

572. *Æquationem biquadraticam* $y^4 + aby^2 + a^2cy = a^3d$ *conſtruere.*

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$. Hinc $x = y^2 : a$

Hoc valore in æquatione data ſubſtituto prodibit

$$\frac{a^2x^2 + aby^2 + a^2cy = a^3d}{ab}$$

 II. y^2

II. $y^2 + \frac{ax^2}{b} + \frac{acy}{b} = \frac{a^2d}{b}$

Item $a^2x^2 + a^2bx + a^2cy = a^3d$ ($:a^2$)

$x^2 + bx + cy = ad$

III. $x^2 + bx = ad - cy$

$ax = y^2$

IV. $x^2 + bx + ax = y^2 + ad - cy$

$ax = y^2$

$x^2 + bx = ad - cy$

V. $ax - x^2 - bx = y^2 - ad + cy$

Habemus adeo æquationes locales

I. $y^2 - ax = 0$

II. $y^2 + \frac{ax^2}{b} + \frac{acy}{b} - \frac{a^2d}{b} = 0$

III. $x^2 + bx + cy - ad = 0$

IV. $y^2 - x^2 - cy - bx + ad = 0$
$\quad - ax$

V. $y^2 + x^2 + cy + bx - ad = 0$
$\quad - ax$

Locus primus & tertius eſt parabola, ſecundus ellipſis, quartus hyperbola æquilatera, quintus denique circulus.

Conſtruamus primum æquationem, circulo cum parabola $ax = y^2$ combinato.

Pro circulo $y^2 + x^2 + cy + bx - ax - ad = 0$ erit vi theorematis generalis (§. 543)

$r = 0 \quad \frac{f^2}{q^2} = 1 \quad -2n = c \quad -2p = b - a$

$f = q \quad n = -\frac{1}{2}c \quad p = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$

$n^2 + p^2 - m^2 = -ad$

$n^2 + p^2 + ad = m^2$

$\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + ad = m^2$

$\sqrt{(\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + ad)} = m$

Ducatur recta indefinita AB & aſſumto quolibet puncto C fiat KC $= \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$ & erecta perpendiculari DK verſus dexteram ob valorem ipſius negativum $= \frac{1}{2}c$; erit (§. 394. *Geom.*) DC $= \sqrt{(\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb)}$. Fiat porro DI $= a$ & continuata DC in H, donec HD $= d$, quæratur media proportionalis DL (§. 312 *Geom.*) quæ erit $\sqrt{ad}$: conſequenter LC $= \sqrt{(\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + ad)}$ (§. 394. *Geom.*) eſt radius circuli ex centro C per L deſcribendi. Ducatur indefinita DQ ipſi AB parallela; erit D origo indeterminatæ x. Quare cum ejusdem origo ſit in vertice parabolæ, quæ circulum in M & N interſecabit: erit QM radix æquationis vera, RN falſa. Tab. X. Fig. 98.

Eſt enim PM $= y + \frac{1}{2}c$, DQ $=$ KP $= y^2 : a$ (§. 355), CP $=$ KP $-$ KC $= \frac{y^2}{a} - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$. Quare (§. 394. *Geom.*) ob MC² ſeu CL² $=$ PM² $+$ PC², $\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + ad = y^2 +$

$$y^2 + cy + \tfrac{1}{4}cc + \frac{y^4}{aa} - y^2 + \tfrac{1}{4}aa + \frac{by^2}{a}$$
$$- \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}bb,$$ hoc eſt,
$$\frac{y^4}{aa} + \frac{by^2}{a} + cy = ad$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad aa}$$
$$y^4 + aby^2 + aacy = a^3d$$

Combinemus eundem circulum cum ellipſi, quam definit æquatio ſuperius reperta $y^2 + \frac{a}{b}x^2 + \frac{ac}{b}y - \frac{a^2d}{b} = 0$. Erit vi theorematis generalis (§. 542.)

$\frac{r}{q} = 0 \quad \frac{t}{2m} = \frac{a}{b} \quad -2n = \frac{ac}{b} \quad p = 0$

hinc $q =$ ſ

$$n = -\frac{ac}{2b}$$
$$n^2 - \frac{tm^2}{2m} = -\frac{a^2d}{b}$$
$$\frac{a^2c^2}{4b^2} - \frac{am}{b} = -\frac{a^2d}{b}$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad \tfrac{a}{b}}$$
$$\frac{ac^2}{4b} + ad = m$$
$$\sqrt{\left(\frac{ac^2}{4b} + ad\right)} = m$$

Tab. X. Fig. 99. Conſtruatur locus ad circulum, ut ante, nempe ut ſit $DK = \frac{1}{2}c$, $KC = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, $DI = a$, $DH = d$ adeoque $DL = \sqrt{ad}$ (§. 312 Geom.), conſequenter $LC = \sqrt{(\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + ad)}$ (§. 394. Geom.).

Jam cum origo indeterminatæ x ſit in D, & valor ipſius n in ellipſi etiam negativus & $p = 0$; ex DK reſecetur $DG = ac : 2b$ & per G ducatur AB ipſis DQ & KP parallela, fiatque $AG = BG = \sqrt{(ad + ac^2 : 4b)}$. Tandem circa AB tanquam axem deſcribatur ellipſis AMB: dico QM eſſe radicem æquationis veram. Eſt enim $GR = DQ = x$, $MR = MQ + QR = MQ + DG = y + ac : 2b$; ratio diametri ad parametrum $= b : a$; $AG = \sqrt{(ad + ac^2 : 4b)}$. Quare ex natura ellipſis (§.)

$$a : b = RM^2 : AG^2 - GR^2 = (BR.RA)$$
$$y^2 + \frac{acy}{b} + \frac{a^2c^2}{4b^2} : ad + \frac{ac^2}{4b} - x^2$$
$$\frac{by^2}{a} + cy + \frac{ac^2}{4b} = ad + \frac{ac^2}{4b} - x^2$$
$$x^2 = ad - \frac{by^2}{a} - cy$$

Porro $PM = MQ + QP = MQ + DK = y + \frac{1}{2}c$; $CP = KP - KC = DQ - CK = x - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.

Quamobrem ob $MC^2 = LC^2 = PM^2 + PC^2$ (§. 394 Geom.) $\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + ad = y^2 + cy + \frac{1}{4}cc + x^2 - ax + \frac{1}{4}aa + bx - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb$, hoc eſt,

$$y^2 + x^2 + cy - ax + bx = ad$$

$$x^2 = ad + ax - bx - y^2 - cy$$

Habemus ergo

$$\frac{ad - by^2}{a} - cy = ad + ax - bx - y^2 - cy$$

$$bx - ax = \frac{by^2}{a} - y^2 \quad -b-a$$

$$x = y^2 : a$$

$$x^2 = y^2 : aa$$

hoc eſt, $\frac{y^2}{a^2} = ad - \frac{by^2}{a} - cy$, vi ſuperiorum.

$$y^2 = a^3 d - aby^2 - a^2 cy \quad a^2$$

$$y^3 + aby^2 + a^2 cy = a^3 d$$

PROBLEMA 238.

573. *Conſtruere æquationem biquadraticam*

$$y^4 + aby^2 - a^2 cy = -a^3 d$$

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $yy = ax$. Hinc $x = y^2 : a$

Si valor ipſius y^2 in æquatione propoſita ſubſtituatur; prodibit

$$a^2 x^2 + aby^2 - a^2 cy = -a^3 d \quad ab$$

II. $\frac{ax^2}{b} + y^2 - \frac{ac}{b} y = -\frac{a^2 d}{b}$

Item $a^2 x^2 + a^2 bx = a^2 cy - a^3 d$

III. $x^2 + bx = cy - ad$

$$ax = y^2$$

IV. $x^2 + bx + ax = y^2 + cy - ad$

$$ax = y^2$$

$$x^2 + bx = cy - ad$$

V. $ax - x^2 - bx = y^2 - cy + ad$

Habemus adeo æquationes locales

I. $y^2 - ax = 0$

II. $y^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{ac}{b} y + \frac{a^2 d}{b} = 0$

III. $x^2 + bx - cy + ad = 0$

IV. $y^2 - x^2 + cy - bx - ad = 0$
$\quad -ax$

V. $y^2 + x^2 - cy + bx + ad = 0$
$\quad -ax$

Locus primus & tertius ſunt parabolæ; ſecundus eſt ellipſis; quartus hyperbola æquilatera; quintus denique circulus.

Dabimus conſtructionem per circulum & parabolam, cujus æquatio $y^2 - ax = 0$.

Pro circulo vi theorematis generalis (§. 543)

$r = 0$	$-2n = -c$	$-2p = -a + b$
hinc $q = f$	$n = \frac{1}{2}c$	$p = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$

$$n^2 + p^2 - m^2 = ad$$

$$n^2 + p^2 - ad = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}bb - ad)} = m$$

Ducatur recta CR & ſumatur C pro centro circuli. Erigatur CK $= \frac{1}{2}c$ Tab. X. Fig. 100

$=\frac{1}{2}c$ ad CR perpendicularis & per K ducatur AP eidem parallela. Fiat AK $=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$; erit in A origo indeterminatæ x & AC $=V(\frac{1}{4}cc+\frac{1}{4}aa-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}bb)$. Fiat AI $=d$ & AH $=A$; quæraturque media proportionalis AL $=V ad$ (§. 312 *Geom.*). Porro ſuper AC deſcribatur ſemicirculus & in eo applicetur GA $=$ AL $=V ad$; erit GC $=V(\frac{1}{4}cc+\frac{1}{4}aa-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}bb-ad)$ (§. 394 *Geom.*) adeoque radius circuli.

Quoniam in parabola, cujus æquatio $y^2-ax=0$ origo indeterminatæ x in verticem axis cadit; circa axem AP parametro a deſcribatur parabola: dico PM eſſe radicem æquationis veram.

Eſt enim MR $=$ PM - PR $=$ PM - CK $=y-\frac{1}{2}c$; AP $=y^2:a$ & CR $=$ KP $=$ AP - AK $=\frac{y^2}{a}-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$, conſequenter ob $CM^2=CG^2=CR^2+MR^2$ (§. 394. *Geom.*) $\frac{1}{4}cc+\frac{1}{4}aa-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}bb-ad=\frac{y^4}{aa}-y^2+\frac{1}{4}aa+\frac{by^2}{a}-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}bb+y^2-cy+\frac{1}{4}cc$, hoc eſt,

$$\frac{y^4}{aa}+\frac{b}{a}y^2-cy=-ad$$

$$y^4+aby^2-aacy=-a^3d$$

Cum loco ad circulum deſcripto eodem modo, quo in problemate præcedente, combinatur locus ad ellipſin. Lubet vero adhuc conſtructionem dare per circulum & hyperbolam æquilateram $y^2-x^2+cy-bx-ax-ad=0$.

Eſt autem vi theorematis generalis (§. 546.)

$$r=0 \quad -t=-1 \quad -2n=c \quad 2p=-a-b$$
$$\frac{q}{2m} \qquad n=-\frac{1}{2}c \quad p=-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$$
$$t=2m$$
$$n^2+m^2-p^2=-ad$$
$$m^2=p^2-n^2-ad$$
$$m^2=\frac{1}{4}aa+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}bb-\frac{1}{4}cc-ad$$
$$m=V(\frac{1}{4}aa+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}bb-\frac{1}{4}cc-ad$$

Conſtructo nempe circulo ut ante, ita ut ſit AK $=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$, CK $=\frac{1}{2}c$ adeoque CA $=V(\frac{1}{4}aa-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}bb+\frac{1}{4}cc)$, AH $=a$, AI $=d$, adeoque AL $=$ AG $=V ad$, conſequenter GC $=$ MC $=V(\frac{1}{4}aa-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}bb+\frac{1}{4}cc-ad)$; quia origo indeterminatæ y in hyperbola ob valorem ipſius n negativum ab axe verſus ſiniſtram diſtat intervallo $\frac{1}{2}c$, fiat KT $=\frac{1}{2}c$, ducaturque per T recta OS ipſi AP parallela & ad hanc AF perpendicularis. Tab. X. Fig. 98.

Quoniam porro ob valorem ipſius p negativum indeterminatæ x origo a centro diſtat intervallo $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$; fiat FO $=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$ & OQ $=V(\frac{1}{4}aa+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}bb-\frac{1}{4}cc-ad)$; erit O centrum & Q vertex hyperbolæ æquilateræ; quæ ſi circa axem

xem QS deſcribatur, circulum in M ſecabit. Dico PM eſſe radicem æquationis veram.

Eſt enim $CR = KP = AP - AK = x - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ & $MR = MP - RP = MP - CK = y - \frac{1}{2}c$, conſequenter ob $MC^2 = CR^2 + RM^2$ (§. 394. *Geom.*) $\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc - ad = x^2 - ax + \frac{1}{4}aa + bx - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + y^2 - cy + \frac{1}{4}cc$, hoc eſt,

$$x^2 - ax + bx + y^2 - cy = - ad$$

$$x^2 = ax - bx + cy - y^2 - ad$$

Porro $MS = MP + PS = MP + KT = y + \frac{1}{2}c$, $SO = FS + FO = AP + FO = x + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, conſequenter ob $SO^2 - QO^2 = MS^2$ (§. 495) $x^2 + ax + \frac{1}{4}aa + bx + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}bb + \frac{1}{2}cc + ad = y^2 + cy + \frac{1}{4}cc$, hoc eſt,

$$x^2 + ax + bx + ad = y^2 + cy$$

ſeu ſubſtituto valore ipſius x^2

$$ax - bx + cy - y^2 - ad + ax + bx + ad (= y^2 + cy$$

$$2ax = 2y^2 \text{ ſeu } ax = y^2$$

$$x = y^2 : a$$

$$x^2 = y^2 : aa$$

His valoribus ipſorum x^2 & x in æquatione

$x^2 + ax + bx + ad = y^2 + cy$ ſubſtitutis, prodit

$$y^2 + cy = \frac{y^2}{aa} + y^2 + \frac{by^2}{a} + ad$$

$$cy^2 = \frac{y^2}{aa} + \frac{by^2}{a} + ad$$

$$aacy = y^4 + aby^2 + a^3d$$

ſeu $y^4 + aby^2 - a^2cy = - a^3d$.

PROBLEMA 239.

574. *Conſtruere æquationem biquadraticam* $y^4 + 2by^3 + a^2cy = a^3d$.

Quoniam $y^4 + 2by^3 = a^3d - a^2cy$; æquatio data in hanc reſolvitur analogiam:

$$a^2 : y^2 = y^2 + 2by : ad - cy$$

Ut nova indeterminata introducatur, fiat

$$a : y = b + y : x$$

erit I. $ax = by + y^2$

$ax - by = y^2$, conſequen-

$a^2 : ax - by = ax + by : ad - cy$ (ter

II. $a^3d - a^2cy = a^2x^2 - b^2y^2$

Subſtituatur in hac æquatione ulterius valor ipſius y^2; prodibit

$$a^3d - a^2cy = a^2x^2 - ab^2x + b^3y$$

h. e. $a^3d - a^2cy + b^3y = a^2x^2 - ab^2x$

III. $ad - cy + \frac{b^3}{a^2}y = x^2 - \frac{b^2}{a}x$

$$yy + by = ax$$

IV. $ad - cy - \frac{b^3}{a^2}y + y^2 + by = x^2 - \frac{b^2}{a}x + ax$

$$ad - cy - \frac{b^3}{a}y = x^2 - \frac{b^2}{a}x + y^2 + by = ax$$

V. $y^2 + by - ad + cy + \frac{b^3}{a}y = ax - x^2 + \frac{b^2}{a}x$

Habe-

Habemus adeo æquationes locales

I. $y^2 + by - ax = 0$

II. $y^2 - \frac{a^2x^2}{b^2} - \frac{a^2cy}{b^2} + \frac{a^3d}{b^2} = 0$

III. $x^2 - \frac{b^2x}{a} + cy - ad = 0$
$+ \frac{b^3y}{aa}$

IV. $y^2 - x^2 - \frac{b^3y}{a^2} + \frac{b^2x}{a} + ad = 0$
$+ by - ax$
$- cy$

V. $y^2 + x^2 + \frac{b^3y}{a^2} - \frac{b^2x}{a} - ad = 0$
$+ by - ax$
$+ cy$

Conſtruamus æquationem per circulum & parabolam. Pro circulo cum ſit $y^2 + x^2 + \frac{b^3}{a^2}y + by + cy - \frac{b^2x}{a} - ax - ad = 0$; erit vi theorematis generalis (§. 543).

$r = 0$ $\frac{ſ^2}{q^2} = 1$ $-2n = \frac{b^3}{a^2} + b + c$

$ſ = q$ $n = -\frac{b^3}{2a^2} - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$

$-2p = -\frac{b^2}{a} - a$

$p = \frac{b^2}{2a} + \frac{1}{2}a$

$n^2 + p^2 - m^2 = -ad$

$n^2 + p^2 + ad = m^2$

$\sqrt{(n^2 + p^2 + ad)} = m$

Circulus ergo eodem prorſus modo conſtruitur, quo in problemate 237 (§. 572). Fit nempe DC $= p = b^2 : 2a + \frac{1}{2}a$, DO $= n = b^3 : 2a^2 + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$, HO $= a$, OI $= d$; erit OC $= \sqrt{(n^2 + p^2)}$, OL $= \sqrt{ad}$ & hinc LC $= \sqrt{(n^2 + p^2 + ad)}$; erit origo indeterminatæ x in O. [Tab. X. Fig. 102.]

Porro pro parabola, ad quam $y^2 + by - ax = 0$, erit vi theorematis generalis (§. 216)

$\frac{q}{p} = 0$ $-2r = b$ $-\frac{tſ}{p} = -a$

hinc $r = -\frac{1}{2}b$ $t = a$

$p = ſ$

$r^2 + tn = 0$

$\frac{1}{4}bb + an = 0$

$an = -\frac{1}{4}bb$

$n = -\frac{bb}{4a}$

Ob valorem itaque ipſius r negativum erigatur in O perpendicularis OK $= \frac{1}{2}b$ ducaturque per K recta AR ipſi OQ parallela, ob valorem ipſius n negativum fiat KA $= bb : 4a$; erit in A parabolæ vertex

tex parametro a circa axem AR deſcribenda, quæ circulum ſecabit in M. Dico QM eſſe radicem æquationis veram.

Si enim QM $= y$: erit MR $= y + \frac{1}{2}b$, adeoque RA $= \frac{yy + by + \frac{1}{4}bb}{a}$ (§. 355), conſequenter KR $=$ AR - AK $= \frac{yy + by}{a}$. Hinc PC $=$ OQ ſive KR - CD $= \frac{yy + by}{a} - p$ & PM $=$ QM $+$ QP $=$ QM $+$ DO $= y + n$. Quare cum ſit $LC^2 = MC^2 = PM^2 + PC^2$ (§. 394. *Geom.*); habebitur tandem $n^2 + p^2 + ad = \frac{y^4}{aa} + \frac{2by^3}{aa} + \frac{b^2y^2}{aa} - \frac{2py^2}{a} - \frac{2pby}{a} + p^2 + y^2 + 2ny + n^2$, hoc eſt, $\frac{y^4}{aa} + \frac{2by^3}{aa} + \frac{b^2y^2}{aa} - \frac{2py^2}{a} - \frac{2pby}{a} + y^2 + 2ny = ad$. Subſtituantur valores p & n ex æquatione ad circulum. Quoniam $p = \frac{1}{2}a + b^2 : 2a$ & $n = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c + b^3 : 2a^2$; prodibit $\frac{y^4}{aa} + \frac{2by^3}{aa} + \frac{b^2y^2}{aa} - y^2 - \frac{b^2y^2}{aa} - by - \frac{b^3y}{aa} + y^2 + by + cy + \frac{b^3y}{aa} = ad$ hoc eſt,

$$\frac{y^4}{aa} + \frac{2by^3}{aa} + cy = ad$$

$$y^4 + 2by^3 + a^2cy = a^3d$$

SCHOLION.

575. *Æquationes locales, in quas æquationes conſtruendas reſolvimus, ſunt ad curvam aliquam determinatam; ſed plurimum amplificatur methodus, ſi exemplo* Sluſii *ad curvam indeterminatam revocentur: tum enim non amplius ellipſis vel hyperbola unica, ſed infinitæ conſtructioni inſerviunt. Poteſt etiam æquatio localis ad curvam datam revocari, ſicque problema per ſectionem conicam datam conſtrui. Agedum itaque! videamus, quomodo utrumque præſtetur.*

PROBLEMA 240.

576. *Æquationem datam reſolvere in æquationes locales, quæ ſint ad curvas indeterminatas.*

a) Subſtituatur pro y radice æquationis $az : v$, ubi pro v recta quælibet aſſumi poteſt, & nova, quæ prodit, æquatio in locales ut ſupra reſolvatur; id quod exemplo unico oſtendiſſe ſufficit.

Sit $y^3 + aby = aac$. Quoniam $y = az : v$; erit $y^3 = a^3z^3 : v^3$, conſequenter

$$\frac{a^3z^3}{v^3} + \frac{a^2bz}{v} = aac$$

$$z^3 + \frac{v^2bz}{a} = \frac{v^3c}{a}$$

Hæc æquatio in ſequentem reſolvitur analogiam:

$$v : z = z^2 + \frac{v^2b}{a} : \frac{v^2c}{a}$$

ut

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur; fiat

$$v : z = z : x$$

erit I. $z^2 = vx$. Hinc $z^2 : v = x$

Porro $z : x = z^2 + \frac{v^2 b}{a} : \frac{v^2 c}{a}$

hoc eſt, $vx + \frac{v^2 b}{a} : \frac{v^2 c}{a}$

ſeu (§. 104) $x + \frac{vb}{a} : \frac{vc}{a}$

II. $x^2 + \frac{vbx}{a} = \frac{vcz}{a}$

$$vx = z^2$$

III. $x^2 + \frac{vbx}{a} + vx = \frac{vcz}{a} + z^2$

$$vx = z^2$$

$$x^2 + \frac{vbx}{a} = \frac{vcz}{a}$$

IV. $vx - x^2 - \frac{vbx}{a} = z^2 - \frac{vcz}{a}$

$$x^2 + \frac{vbx}{a} = \frac{vcz}{a}$$

hoc eſt, ob $x = z^2 : v$

V. $x^2 + \frac{bz^2}{a} = \frac{vcz}{a}$

$$z^3 + \frac{v^2 bz}{a} = \frac{v^3 c}{a}$$

— v

$$\frac{z^3}{v} + \frac{vbz}{a} = \frac{v^2 c}{a}$$

VI. $zx + \frac{vbz}{a} = \frac{v^2 c}{a}$

Habemus adeo æquationes locales ad infinitas ſectiones Conicas, nempe

I. $z^2 - vx = 0$
II. $x^2 + \frac{vbx}{a} - \frac{vcz}{a} = 0$ } ad infinitas parabolas.

III. $z^2 - x^2 + \frac{vcz}{a} - \frac{vbx}{a} = 0$ ad infinitas hyperbolas æquilateras.

IV. $z^2 + x^2 - \frac{vcz}{a} + \frac{vbx}{a} = 0$ ad infinitos circulos.

V. $z^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{vcz}{b} = 0$ ad infinitas ellipſes.

VI. $zx + \frac{vbz}{a} - \frac{v^2 c}{a} = 0$ ad infinitas hyperbolas intra aſymptotos.

β) Si fieret $\frac{aa}{v} : y = y : x$; locus primus $y^2 = \frac{a^2 x}{v}$ foret ad infinitas parabolas, nec radix æquationis y (id quod maxime commodum videri poterat) mutaretur in aliam: ſed cum locus ad circulum degeneret in locum ad ellipſin, ſimplicitati conſtructionis minime conſuleretur. Loca tamen ad hyperbolam & ellipſin determinatam ita reduci poſſunt

ſunt ad hyperbolas & ellipſes infinitas, ut utraque indeterminata y & x eadem maneat.

E. gr. Pro æquatione propoſita conſtruenda elicuimus ſupra (§. 564)

I. $y^2 - ax = 0$ } loca ad parabolam.
II. $x^2 + bx - cy = 0$ }

III. $y^2 + x^2 - cy - ax + bx = 0$ locum ad circulum.

Quoniam $y^2 = ax$

erit $\frac{ay^2}{v} = \frac{a^2x}{v}$

& ob $cy = x^2 + bx$

$$\frac{ay^2}{v} - cy = \frac{a^2x}{v} - x^2 - bx$$

$$y^2 - \frac{vcy}{a} = ax - \frac{vx^2}{a} - \frac{vbx}{a}$$

Item $\frac{ay^2}{v} = \frac{a^2x}{v}$

$cy = x^2 + bx$

$$\frac{ay^2}{v} + cy = x^2 + \frac{a^2x}{v} + bx$$

$$y^2 + \frac{vcy}{a} = \frac{vx^2}{a} + ax + \frac{vbx}{a}$$

En locum ad infinitas ellipſes $y^2 + \frac{vx^2}{a} - \frac{vcy}{a} + ax + \frac{vbx}{a} = 0$ & locum ad infinitas hyperbolas $y^2 - \frac{vx^2}{a} + \frac{vcy}{a} - ax - \frac{vbx}{a} = 0$: quorum uterque cum loco ad circulum $y^2 + x^2 - cy - ax + bx = 0$ conſtrui poteſt.

PROBLEMA 241.

577. *Æquationem localem reducere ad aliam ejusdem ſpeciei, quæ ſit ad curvam datam.*

1. Ex æquatione locali eliciendus eſt valor linearum, per quas datur, aut, quod perinde eſt, ratio earundem.

2. Hi valores cum ſint æquales lineis, per quas datur curva, ad quam æquatio reducenda; æquationes prodeunt, quarum reductione legitime facta prodibunt valores coëfficientium in æquatione data ſubſtituendi, ut in quæſitam degeneret.

E. gr. Æquatio ad parabolam $y^2 - ax = 0$ mutanda eſt in aliam, quæ ſit ad parabolam, cujus parameter r. Quoniam a parameter parabolæ, ad quam æquatio data exiſtit; erit $r = a$, conſequenter æquatio quæſita $y^2 - rx = 0$.

Similiter reducenda ſit æquatio $y^2 + x^2 + by - ay - cx = 0$ ad circulum, cujus radius r. Quoniam radius æquationis circuli, ad quam eſt æquatio data, $V[(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b)^2 + \frac{1}{4}cc]$;

erit $[\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b]^2 + \frac{1}{4}cc = r^2$

$$[\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b]^2 = r^2 - \tfrac{1}{4}cc$$
$$\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b = V(r^2 - \tfrac{1}{4}cc)$$

$\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}b + V(r^2 - \frac{1}{4}cc) = f$

$\frac{1}{2}b = \frac{1}{2}a - V(r^2 - \frac{1}{4}cc) = g$

$\frac{1}{2}c = V(r^2 - [\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b]^2) = h.$

His valoribus in æquatione propoſita ſubſtitutis; prodit æquatio ad circulum deſideratum

$$y^2 + x^2 + 2gy - 2fy - 2hx = 0.$$

PROBLEMA 242.

578. *Invenire regulam generalem conſtruendi omnes æquationes tam cubicas, quam biquadraticas.*

Sit deſcripta parabola & ex centro H radio AH circulus ſecans eam in N, N & M. Sit AD $= b$, DH $= d$, AQ $= c$; erit AH$^2 = dd + bb$. Sit porro PM $= x$, parameter parabolæ $= a$, erit OM $= x + c$, RM $= x + d$. Quoniam (§. 367).

a : OM + AQ = PM : AP

$a : x + 2c = x : \frac{x^2 + 2cx}{a}$

erit DP = HR $= \frac{x^2 + 2cx}{a} - b$, adeoque HR$^2 = \frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} - \frac{4bcx}{a} + bb$ & RM$^2 = x^2 + 2dx + dd$. Habemus adeo:

$$\frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} - \frac{4bcx}{a} + bb + x^2 + 2dx + dd = bb + dd$$

$$\frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{4bcx}{a} = 0$$
$$- \frac{2bx^2}{a} + 2dx$$
$$+ x^2 \qquad\qquad \frac{x}{a^2}$$

$$x^3 + 4cx^2 + 4c^2x - 4abc = 0$$
$$- 2abx + 2a^2d$$
$$+ a^2x$$

Apparet adeo, ſi habetur terminus ſecundus poſitivus, radices veras cadere verſus dextram. Sit adeo æquatio cum ea comparanda $x^3 \mp px^2 \mp qx \mp r = 0$; erit

$4c = p \qquad 4c^2 - 2ab + a^2 = q$

$c = \frac{1}{4}p \qquad 4c^2 + a^2 - q = 2ab$

$\frac{4}{16}p^2 + a^2 - q = 2ab \quad 2a$

$\frac{p^2}{8a} + \frac{1}{2}a - \frac{q}{2a} = b$

vel

$a^2 + 4c^2 - 2ab = -q$

$a^2 + \frac{4}{16}p^2 + q = 2ab \quad 2a$

$\frac{1}{2}a + \frac{p^2}{8a} + \frac{q}{2a} = b$

Porro

$2a^2d - 4abc = r$

$2a^2d = r + 4abc \quad 2a^2$

$d = \frac{r}{2a^2} + \frac{2bc}{a}$

 h. e.

h. e. $d = \frac{r}{2a^2} + \frac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} \mp \frac{pq}{4a^2}$

vel

$$2a^2d - 4abc = -r$$

$$2a^2d = 4abc - r$$

$$d = \frac{2bc}{a} - \frac{r}{2a^2}$$

h. e. $d = \frac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} \mp \frac{pq}{4a^2} - \frac{r}{2a^2}$

Tab. X. Fig. 103. Sit jam PN $= x$; reliqua ſint ut ante: erit NR = PN-RP = PN-DH $= x-d$, NO $= x-c$, PM $= x-2c$. Quoniam (§. 367.)

$$a : ON + AQ = PM : AP$$
$$a : x = x-2c : \frac{xx-2cx}{a}$$

erit DP = HR $= \frac{x^2-2cx}{a} - b$. Habemus adeo NH² = HR² + NR² (§. 394 *Geom.*)

$$\frac{x^4}{a^2} - \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} + \frac{4bcx}{a} + b^2 + x^2 - 2dx + dd = bb + dd$$

$$\frac{x^4}{a^2} - \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} + \frac{4bcx}{a} = 0$$
$$- \frac{2bx^2}{a} \quad - 2dx$$
$$+ x^2$$

$$x^3 - 4cx^2 + 4c^2x + 4abc = 0 \quad \frac{x}{a^2}$$
$$- 2abx - 2a^2d$$
$$+ a^2x$$

Apparet adeo, ſi terminus ſecundus ſit negativus, radicem æquationis veram eſſe verſus ſiniſtram. Sit adeo æquatio cum ea comparanda $x^3 - px^2 \mp qx \mp r = 0$; erit

$$-p = -4c$$

$$\frac{1}{4}p = c$$
$$4c^2 - 2ab + a^2 = q$$

$$a^2 + 4c^2 - q = 2ab \quad 2a$$

$$\frac{1}{2}a + \frac{2c^2}{a} - \frac{q}{2a} = b$$

h. e. $\frac{1}{2}a + \frac{p^2}{8a} - \frac{q}{2a} = b$

Vel

$$4c^2 - 2ab + a^2 = -q$$

$$a^2 + 4c^2 + q = 2ab \quad 2a$$

$$\frac{1}{2}a + \frac{2c^2}{a} + \frac{q}{2a} = b$$

h. e. $\frac{1}{2}a + \frac{p^2}{8a} + \frac{q}{2a} = b$

Porro

$$4abc - 2a^2d = r$$

$$4abc - r = 2a^2d$$

$$\frac{2bc}{a} - \frac{r}{2a^2} = d$$

h. e. $\frac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} \mp \frac{pq}{4a^2} - \frac{r}{2a^2} = d$

Vel

Vel

$$4abc - 2a^2d = -r$$

$$4abc + r = 2a^2d$$

$$\frac{2bc}{a} + \frac{r}{2a^2} = d$$

h. e. $\frac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} \mp \frac{pq}{4a^2} + \frac{r}{2a^2} = d.$

Eſt ergo in omnibus æquationibus cubicis completis

$$AQ = \tfrac{1}{4}p$$

$$DA = \tfrac{1}{2}a + \frac{p^2}{8a} \pm \frac{q}{2a}$$

$$DH = \tfrac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} \mp \frac{pq}{4a^2} \mp \frac{r}{2a^2}$$

Nimirum in regula q ſeu coëfficiens termini tertii ſemper afficitur ſigno contrario ejus, quod in æquatione habet. Habetur autem in regula $-r$, ſi p & r diverſis ſignis afficiuntur: alias ſemper eſt $+r$.

Quoniam coëfficientes illorum terminorum evaneſcunt, qui nihilo æquales ponuntur; evidens eſt ejuſdem regulæ ad æquationes incompletas applicatio.

Denique ſi quadratum radii MH vel HN ponatur $bb + dd \mp af$; æquatio manebit biquadratica. Quare ſi biquadratica æquatio fuerit $x^4 + px^3 \mp qx^2 \mp rx \mp ſ = 0$; reliqua omnia manebunt ut ante, ſed

$$ſ = a^3f$$

$$ſ : a^3 = f$$

Unde radius circuli invenitur ut in problemate (§. 572), ſi fuerit $+ſ$, vel ut in problemate (§ 573), ſi fuerit $-ſ$. His obſervatis, regula eadem conſtructioni æquationum biquadraticarum ſatisfacit.

SCHOLION.

579. *Atque hæc eſt regula, quam* Thomas Bakerus (p) *centralem vocat & ad omnes caſus æquationum cubicarum & biquadraticarum applicat. Sed verum ejus fundamentum latet in iis, quæ ſuperius tradidimus. Reſtat, ut uſum hujus doctrinæ aliquot exemplis illuſtremus.*

PROBLEMA 243.

580. *Inter duas lineas datas invenire duas medias continue proportionales.*

Sit datarum major $= b$, quæſitarum minor $= y$,
minor $= a$ major $= x$

erit per conditionem problematis:

$$a : y = y : x \qquad y : x = x : b$$

I. $ax = y^2$ II. $x^2 = by$

$a : y = x : b$ $ax = y^2$

III. $xy = ab$ IV. $x^2 - ax = by - y^2$

$ax = y^2$

(p) in clavi Geometrica catholica p. 6.

$ax = y^2$
$x^2 = by$

V. $x^2 + ax = y^2 + by$

$x^2 = by$

$\frac{ax^2}{v} = \frac{aby}{v}$
$ax = y^2$

VI. $\frac{ax^2}{v} + ax = \frac{aby}{v} + y^2$

$ax = y^2$
$\frac{ax^2}{v} = \frac{aby}{v}$

VII. $ax - \frac{ax^2}{v} = y^2 - \frac{aby}{v}$

Habemus adeo æquationes locales

I. $y^2 - ax = 0$ } ad parabolam,
II. $x^2 - by = 0$ }

III. $xy - ab = 0$ ad hyperbolam intra aſymptotos.

IV. $y^2 + x^2 - by - ax = 0$ ad circulum.

V. $y^2 - x^2 + by - ax = 0$ ad hyperbolam æquilateram.

VI. $y^2 - \frac{ax^2}{v} + \frac{aby}{v} - ax = 0$ ad infinitas hyperbolas ſcalenas.

VII. $y^2 + \frac{ax^2}{v} - \frac{aby}{v} - ax = 0$ ad infinitas ellipſes.

Quodſi in æquatione ad hyperbolam intra aſymptotos $xy = ab$ ſubſtituatur valor ex æquatione ad parabolam $ax = y^2$; prodibit $y^3 - a^2b = 0$.

Conſtructio itaque multis modis fieri poteſt, nimirum per circulum & hyperbolam intra aſymptotos, per circulum & hyperbolam æquilateram, per circulum & infinitas hyperbolas, per circulum & infinitas ellipſes, vel per duas hyperbolas &c. vel denique per regulam centralem *Bakeri*.

Pro circulo, ad quem eſt $y^2 + x^2 - by - ax = 0$, habetur vi theorematis generalis (§. 541)

$r = 0$ $\quad 2n = b \quad 2p = a$

$\frac{s^2}{q^2} = 1 \quad n = \frac{1}{2}b \quad p = \frac{1}{2}a$

$s = q \quad n^2 + p^2 = m^2$

$\sqrt{(\frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}aa)} = m$

Quoniam in parabola parametro a deſcripta, ad quam $ax = y^2$, origo ipſius x in vertice A exiſtit; circulus per ejus verticem deſcribendus radio $= \sqrt{(\frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}aa)}$. Fiat itaque $AD = \frac{1}{2}a$, $DH = \frac{1}{2}b$; erit centrum circuli in H & $PM = y$, $PA = x$: id quod facile oſtenditur eodem, quo ſuperius, modo. Ta I Fig 93

Pro ellipſi, ad quam eſt $y^2 + \frac{ax^2}{v} - \frac{aby}{v} - ax = 0$, habetur vi theorematis generalis (§. 542.)

$\frac{2r}{q} = 0$

$\frac{2r}{q}=0 \qquad \frac{t}{2m}=\frac{a}{v} \qquad 2n=\frac{ab}{v}$

hinc

ſ $=q \qquad n=\frac{ab}{2v}$

$\frac{2tp}{2m}=a \qquad n^2+\frac{tp^2}{2m}=\frac{tm^2}{2m}$

$\frac{2ap}{v}=a \qquad n^2+\frac{ap^2}{v}=\frac{am^2}{v} \qquad \frac{a}{v}$

$2ap=av \qquad \frac{vn^2}{a}+p^2=m^2$

$p=\frac{1}{2}v \qquad \frac{ab^2}{4v}+\frac{1}{4}v^2=m^2$

$\frac{1}{2}V\left(\frac{ab^2}{v}+v^2\right)=m$

Conſtructio itaque problematis per circulum & ellipſin hæc eſt: Jungantur DF $=b$ & $=$ DE $=a$ ad angulos rectos. Fiat DK $=\frac{1}{2}b$ & erecta perpendiculari KC $=\frac{1}{2}a$; erit DC $=V(\frac{1}{4}bb+\frac{1}{4}aa)$. Ex centro itaque C radio DC deſcribatur circulus: ita locus prior erit conſtructus atque origo indeterminatæ x in D. Quare pro ellipſi fiat DH $=ab:2v$ & per H ducatur ipſi DE parallela IN. Fiat HL $=\frac{1}{2}v$ & LI $=$ LN $=\frac{1}{2}V(ab^2:v+v^2)$; erit L centrum, IN axis ellipſis: quæ ſi deſcribatur, ſecabit circulum in M, dico eſſe DQ $=x$, QM $=y$, conſequenter DE, QM, DQ, DF quatuor continue proportionales.

Eſt enim CP $=x-\frac{1}{2}a$ & PM $=y-\frac{1}{2}b$, adeoque, ob CM^2 $=$ DC^2 $=$ CP^2 $+$ PM^2 (§ 394. *Geom.*), $\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}bb=xx-ax+\frac{1}{4}aa+yy-by+\frac{1}{4}bb$, hoc eſt, $yy+xx-by-ax=0$: qui eſt locus ad circulum. Porro OM $=y-ab:2v$, LO $=x-\frac{1}{2}v$, adeoque ob

$v:a=$ IL^2 $-$ LO^2 : OM^2 (§. 391)

$\frac{ab^2}{4v}+\frac{1}{4}v^2-x^2+vx-\frac{1}{4}v^2 : y^2 \left(-\frac{aby}{v}+\frac{a^2b^2}{4v^2}\right.$

$\frac{a^2b^2}{4v^2}-\frac{ax^2}{v}+ax=y^2-\frac{aby}{v}+\frac{a^2b^2}{4v^2}$

$y^2+\frac{a}{v}x^2-\frac{ab}{v}y-ax=0$

ſed $y^2-ax=by-x^2$

Ergo $\frac{ax^2}{v}-\frac{aby}{v}+by-x^2=0 \qquad \frac{a}{v}-1$

$x^2-by=0$

$x^2=by$

Subſtituatur hic valor in æquatione $y^2+x^2-by-ax=0$; prodibit

$y^2+by-by-ax=0$

$y^2=ax$

Quare $a:y=y:x$ & (ob $x^2=by$) $y:x=x:b$. Sunt adeo a, y, x, & b quatuor continue proportionales.

Eodem modo problema conſtruitur per circulum & infinitas hyperbolas ſcalenas.

Conſtructionem per circulum & hyperbolam intra aſymptotos adhuc apponimus. Jungantur nempe RI $= a$ & AR $= b$ ad angulos rectos, & per I deſcribatur hyperbola intra aſymptotos RAT. Fiat RD $= \frac{1}{2}b$ & in D erigatur perpendicularis DC $= \frac{1}{2}a$; tandemque ex centro C radio CK deſcribatur circulus ſecans hyperbolam in M: erit TM $= y$ & AT $= x$.

Tab. XI. Fig. 105.

Nam ex natura hyperbolæ ob AR. RI $=$ AT. TM $ab = xy$ & CK $= x - \frac{1}{2}a$, KM $= y - \frac{1}{2}b$, adeoque ob $CM^2 = CK^2 + KM^2$, $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb = xx - ax + \frac{1}{4}aa + yy - by + \frac{1}{4}bb$, conſequenter $yy + xx - ax - by = 0$ ſeu $xx - ax = by - yy$. Eſt ergo vi æquationis prioris:

$$a : x = y : b$$

Quare $x - a : a = b - y : y$ (§. 104)

Porro vi æquationis poſterioris

$$x - a : b - y = y : x$$

Ergo (§. 104) $a : y = y : x$

Eſt vero etiam $a : y = x : b$ (§. *cit.*)

Ergo $a : y = y : x = x : b$ (§. 156. *Arithm.*)

COROLLARIUM.

581. Sit latus cubi $= a$, latus cubi dupli $= y$; erit $2a^3 = y^3$, ſeu ponendo $2a = b$, $aab = y^3$. Quærendæ igitur ſunt inter latus cubi & ejus duplum duæ mediæ continue proportionales, eritque earum prima latus cubi dupli. Et in genere pro tantuplicatione cubi eſt $ma^3 = y^3$, adeoque inter a & ma quærendæ ſunt duæ mediæ.

SCHOLION.

582. *Coincidit adeo problema Deliacum de duplicando cubo, quod Deliis remedium contra peſtem quærentibus oraculum propoſuiſſe fertur, cum problemate de inveniendis duabus mediis continue proportionalibus (quod primus obſervavit* Hippocrates Chius*): unde & ipſum* problema Deliacum *appellari ſolet. Celebre hoc problema jam olim inter Geometras Græcos extitit, quos inter* Plato, Heron Alexandrinus, Apollonius Pergæus, Eratoſthenes, Pappus Alexandrinus, Sporus, Menechmus, Architas Tarentinus, Philo Byzantius, Philoponus, Diocles & Nicomedes *modis diverſis ab* Eutocio (q) *conſervatis ſolverunt.*

PROBLEMA 244.

583. *Rectam* AB *utcunque diviſam in* C *ulterius dividere in* D, *ita ut ſit* CD : DB $=$ AC^2 : CD^2. *Tab. XI. Fig. 106.*

Sit AC $= a$, CB $= b$, CD $= y$, erit DB $= b - y$, conſequenter per conditionem problematis

$$y : b - y = a^2 : y^2$$

Ut nova indeterminata introducatur, cum ob $y^3 = a^2 b - a^2 y$ problema ſolidum eſſe facile intelligatur, fiat

$a : y$

(q) in Commentariis in lib. 2. Archimedis de Sphæra & Cylindro.

$a : y = y : x$

erit I. $ax = y^2$ & hinc
$y : b\text{-}y = a^2 : ax$
$a : x$ (§. 104)

II. $xy = ab\text{-}ay$

Porro ob $y : b\text{-}y = a : x$
$y^2 : by\text{-}y^2 = a : x$ (§. 104)
$ax : by\text{-}y^2 = a : x$
$x : by\text{-}y^2 = 1 : x$ (§. cit.)

III. $x^2 = by\text{-}y^2$
$ax = y^2$ add.

IV. $x^2 + ax = by$
$ax = y^2$ add.

V. $x^2 + 2ax = by + y^2$

Denique ob $ax = y^2$ (I.)
& $x^2 = by\text{-}y^2$ (III.) ſubtr.

VI. $ax\text{-}x^2 = 2y^2\text{-}by$

Habemus adeo æquationes locales
I. $y^2\text{-}ax = 0$ ad parabolam.
II. $xy + ay\text{-}ab = 0$ ad hyperbolam intra aſymptotos.
III. $y^2 + x^2\text{-}by = 0$ ad circulum.
IV. $x^2 + ax\text{-}by = 0$ ad parabolam.
V. $y^2\text{-}x^2 + by\text{-}2ax = 0$ ad hyperbolam æquilateram.
VI. $y^2 + \frac{1}{2}x^2\text{-}\frac{1}{2}by\text{-}\frac{1}{2}ax = 0$ ad ellipſin.

Nos duas dabimus conſtructiones, alteram per parabolam & circulum; alteram per circulum & ellipſin.

Quoniam æquatio ad parabolam $y^2\text{-}ax = 0$; non alia re opus eſt, quam ut parametro a parabola deſcribatur: erit origo indeterminatæ x in vertice (§. 535).

Pro circulo, ad quem eſt $y^2 + x^2 \text{-}by = 0$, vi theorematis generalis (§. 543)

$r = 0$ $\quad 2n = b$ $\quad n^2 = m^2$

$p = 0$ $\quad n = \frac{1}{2}b$ $\quad n = m = \frac{1}{2}b$

In vertice adeo parabolæ erigatur perpendicularis AD $= \frac{1}{2}b$ & ex centro D radio AD $= \frac{1}{2}b$ deſcribatur circulus; erit PM $= y$. Tab. XI. Fig. 107.

Demiſſa enim perpendiculari DR, erit MR $=$ PM-PR $=$ PM-AD $= y - \frac{1}{2}b$ & (§. 355) AP $=$ DR $= y^2 : a$, conſequenter ob DM^2 $=$ DA^2 $=$ MR^2 $+$ DR^2 (§. 394 *Geom.*), $y^4 : aa + y^2 \text{-}by + \frac{1}{4}bb = \frac{1}{4}bb$, hoc eſt,

$$\frac{y^4}{aa} + y^2 \text{-} by = 0$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; y : aa$$

$$y^3 + a^2y - a^2b = 0$$

Pro ellipſi, ad quam $y^2 + \frac{1}{2}x^2 \text{-} \frac{1}{2}by\text{-}\frac{1}{2}ax = 0$, vi theorematis generalis (§. 542)

$2r : q = 0$ $\quad 2n = \frac{1}{2}b$ $\quad \frac{-2tp}{2m} = \frac{1}{2}a$
hinc
$q = f$ $\quad \frac{t}{2m} = \frac{1}{2}$ $\quad n = \frac{1}{4}b$ $\quad p = \frac{1}{2}a$

 $n^2 +$

$$n^2 + \frac{tp^2}{2m} = \frac{tm^2}{2m}$$

$$n^2 + \tfrac{1}{2}p^2 = \tfrac{1}{2}m^2$$

$$\tfrac{1}{16}bb + \tfrac{1}{8}a^2 = \tfrac{1}{2}m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{8}bb + \tfrac{1}{4}a^2)} = m$$

Deſcribatur ergo ellipſis, cujus axis $AB = 2\sqrt{(\frac{1}{8}bb + \frac{1}{4}a^2)}$ & parameter $= \sqrt{(\frac{1}{8}bb + \frac{1}{4}a^2)}$ ob $2m : t = 2 : 1$. Ex centro C demittatur perpendicularis $CH = n = \frac{1}{4}b$ & ducta DE per H axi AB parallela fiat $HD = p = \frac{1}{2}a$; erit in D origo indeterminatæ x.

Tab. XI. Fig. 108.

Quare circulum cum ea combinaturus erige perpendicularem $DL = \frac{1}{2}b$ & ex L radio DL deſcribatur circulus: erit $QM = y$, $DQ = x$.

Eſt enim $QH = DQ - DH = x - \frac{1}{2}a$, $PM = y - \frac{1}{4}b$, conſequenter ob $t : 2m = 1 : 2$ (§. 391)

$$1 : 2 = PM^2 : AC^2 - PC^2$$

$$1 : 2 = y^2 - \tfrac{1}{2}by + \tfrac{1}{16}bb : \tfrac{1}{8}bb + \tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{4}aa \;(+ ax - xx$$

$$2y^2 - by + \tfrac{1}{8}bb = \tfrac{1}{8}bb + ax - xx$$

$$2y^2 - by = ax - xx$$

Porro $RM = y - \frac{1}{2}b$, $LR = DQ = x$, $LM = \frac{1}{2}b$, conſequenter ob $LM^2 = LR^2 + RM^2$ (§. 394. *Geom.*)

$$\tfrac{1}{4}bb = y^2 - by + \tfrac{1}{4}bb + xx$$

$$y^2 - by = -xx$$

Quo valore ipſius $y^2 - by$ in æquatione ſuperiore ſubſtituto, prodit

$$y^2 - xx = ax - xx$$

$$y^2 = ax$$

$$y^2 : a = x$$

$$y^4 : aa = x^2$$

Hinc ob $y^2 - by + x^2 = 0$

$$\frac{y^4}{aa} + y^2 - by = 0$$

$$y^3 + a^2y - a^2b = 0. \quad (y : aa)$$

PROBLEMA 245.

584. *Dato parallelepipedo cubum æqualem conſtruere.*

Sint latera parallelepipedi a, b & c; latus cubi ſit y; erit (§. 475 *Geom.*)

$$abc = y^3$$

hoc eſt, $a : y = y^2 : bc$

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur; fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$

& ob $a : y = ax : bc$

II. $xy = bc$

Porro

Porro $y : x = ax : bc$

$ax^2 = bcy$

III. $x^2 = bcy : a$
$ax = y^2$ ſubtr.

IV. $x^2 - ax = bcy : a - y^2$
V. $x^2 + ax = y^2 + \frac{bcy}{a}$

Denique ob $x^2 = bcy : a$
$2ax = 2y^2$

VI. $2ax - x^2 = 2y^2 - bcy : a$
& VII. $2ax + x^2 = 2y^2 + bcy : a$

Habemus adeo æquationes locales

I. $y^2 - ax = 0$ ad parabolam.

II. $xy - bc = 0$ ad hyperbolam intra aſymptotos.

III. $x^2 - \frac{bcy}{a} = 0$ ad parabolam.

IV. $y^2 + x^2 - \frac{bcy}{a} - ax = 0$ ad circulum.

V. $y^2 - x^2 + \frac{bcy}{a} - ax = 0$ ad hyberbolam æquilateram.

VI. $y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{bc}{2a}y - ax = 0$ ad ellipſin.

VII. $y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{bc}{2a}y - ax = 0$ ad hyperbolam ſcalenam.

Pro loco ad circulum, ad quem $y^2 + x^2 - \frac{bc}{a}y - ax = 0$, vi theorematis generalis (§. 543)

$2n = bc : a \qquad 2p = a$

$n = bc : 2a \qquad p = \frac{1}{2}a$
$n^2 + p^2 = m^2$

$\sqrt{\left(\frac{b^2c^2}{4a^2} + \frac{1}{4}aa\right)} = m$

Cum in parabola, ad quam $y^2 - ax = 0$, parametro a deſcripta origo indeterminatæ x ſit in vertice A, fiat $AD = \frac{1}{2}a$, $DH = n = bc : 2a$; erit H centrum circuli radio HA deſcribendi: qui ſi deſcribatur, ſecabit parabolam in M, eritque $MP = y$. Tab. IX. Fig. 93.

Eſt enim $AH^2 = AD^2 + DH^2 = \frac{1}{4}aa + b^2c^2 : 4a^2$, $PA = yy : a$ (§. 355) & hinc $DP = HR = yy : a - \frac{1}{2}a$, $MR = y - bc : 2a$. Quare ob $AH^2 = HM^2 = HR^2 + MR^2 = \frac{1}{4}aa + b^2c^2 : 4a^2 = \frac{y^4}{aa} - yy + \frac{1}{4}aa + y^2 - \frac{bcy}{a} + \frac{bbcc}{4aa}$ hoc eſt, $\frac{y^4}{aa} - \frac{bc}{a}y = 0$

$\qquad\qquad y : aa$

$y^3 - abc = 0$

Jungantur $RI = b$ & $RA = c$ ad angulos rectos, ducatur indefinita AS ipſi RI parallela & intra aſymptotos RA & AS per I deſcribatur hyperbola; erit origo indeterminatæ x in A. Porro ut circulus cum ea combinetur, fiat $AD = n = bc : 2a$ & DC ad AD perpendicularis $= p = \frac{1}{2}a$; ex centro C radio AC deſcribatur circulus hyperbolam in Tab. XI. Fig. 105.

 M in-

M interſecans, erit TM ipſi AR parallela $=y$.

Eſt enim ob AR.RI$=$AT.TM (§.460) $bc=xy$. Præterea $AC^2=CM^2=AL^2+CL^2$ (§.394. *Geom.*) $=\frac{1}{4}aa+b^2c^2:4aa$ $CK=LT=AT-AL=x-\frac{1}{2}a$ & $MK=TM-TK=TM-AD=y-bc:2a$; unde ob $CM^2=CK^2+KM^2$ elicitur $\frac{1}{4}aa+b^2c^2:4aa=x^2-ax+\frac{1}{4}aa+y^2-\frac{bc}{a}y+\frac{bbcc}{4aa}$, hoc eſt, $y^2-\frac{bc}{a}y+x^2-ax=0$,

ſeu $y^2-\frac{bc}{a}y=ax-x^2$

Subſtituatur pro bc valor ipſius xy: prodibit

$$y^2-\frac{xy^2}{a}=ax-x^2$$

$$ay^2-xy^2=aax-axx \quad | \ a-x$$

$$y^2=ax$$

$$y^4=a^2x^2,$$

$$y^4:a^2=x^2$$

Quare ob $y^2-\frac{bc}{a}y+x^2-ax=0$,

$$ax-\frac{bc}{a}y+\frac{y^4}{a^2}-ax=0$$

$$\frac{y^4}{aa}-\frac{bc}{a}y=0$$

$$y^3-abc=0.$$

Pro ellipſi, ad quam eſt $y^2+\frac{1}{2}x^2-\frac{bc}{2a}y-ax=0$, vi theorematis generalis (§.542)

$\frac{r}{q}=0$ hinc $q=ſ$ $\quad \frac{t}{2m}=\frac{1}{2}$ $\quad \frac{-2tp}{2m}=-a$

$2n=\frac{bc}{2a}$ $\quad \frac{2p}{2}=a$

$n=\frac{bc}{4a}$ $\quad p=a$

$$n^2+\frac{tp^2}{2m}=\frac{tm^2}{2m}$$

$$n^2+\frac{1}{2}p^2=\frac{1}{2}m^2$$

$$2n^2+p^2=m^2$$

$$V\left(\frac{b^2c^2}{8aa}+aa\right)=m$$

Deſcribatur ergo ellipſis, cujus axis $AB=2V(a^2+b^2c^2:8aa)$, parameter $V(a^2+b^2c^2:8aa)$, quia eſt ad axem in ratione ſubdupla. Ex centro C demittatur perpendicularis $CH=\frac{bc}{4a}$ & per H agatur DE ipſi AB parallela. Fiat $DH=a$; erit D origo indeterminatæ x. Ut circulus cum eadem combinetur, fiat $DI=bc:2a$ & $IL=\frac{1}{2}a$ & radio LD ex centro L deſcribatur circulus, qui ellipſin ſecabit in M. Dico QM eſſe $=y$ & $DQ=x$. Tab. XI. Fig. 109.

Eſt enim $CP=HQ=DQ-DH=x-a$

$x-a$ & PM = QM-PQ = QM - DK = $y-bc:4a$. Ex natura ellipſis (§. 391)

$$2:1 = AC^2 - CP^2 : PM^2$$

$$\frac{b^2c^2}{8aa} + a^2 - x^2 + 2ax - aa : y^2 - \frac{bcy}{2a} + \frac{b^2c^2}{16a^2}$$

$$\frac{b^2c^2}{8aa} - x^2 + 2ax = 2y^2 - \frac{bcy}{a} + \frac{b^2c^2}{8a^2}$$

$$2ax - x^2 = 2y^2 - \frac{bcy}{a}$$

Porro MR = QM - RQ = QM - DI = $y-bc:2a$, LR = DQ - IL = $x-\frac{1}{2}a$. Quare ob $DL^2 = LM^2 = LR^2 + RM^2$ $\frac{1}{4}aa + b^2c^2 : 4a^2 = x^2 - ax + \frac{1}{4}aa + y^2 - bcy : a + b^2c^2 : 4a^2$, hoc eſt,

$$x^2 - ax + y^2 - bcy : a = 0$$

ſeu $y^2 - \frac{bc}{a}y = ax - x^2$

Subſtituto valore ipſius $ax-x^2$ in æquatione ſuperiori, prodit

$$ax + y^2 - \frac{bc}{a}y = 2y^2 - \frac{bc}{a}y$$

$$ax = y^2$$

$$x = y^2 : a$$

$$x^2 = y^4 : a^2$$

His valoribus ipſorum x & x^2 denuo in æquatione ſuperiore ſubſtitutis prodit

$$2y^2 - y^4 : a^2 = 2y^2 - \frac{bc}{a}y : a$$

$$\frac{y^4}{aa} = \frac{bc}{a}y$$

$$y^3 = abc \quad \text{—} y : aa$$

Non abſimili modo fit conſtructio per circulum & hyperbolam.

PROBLEMA 246.

585. *Datum angulum* ACB *triſecare.* Tab. XI. Fig. 109.

Concipiamus angulum ACB eſſe trifariam ſectum in ACE, ECD & DCB ducanturque arcuum æqualium ſubtenſæ cognomines AE, ED, DB, quæ æquales ſunt (§. 274. *Geom.*). Sit AC = b, AB = a, AE = y, EG = x.

Jam anguli EAB menſura eſt arcus DB (§. 299. *Geom.*). Anguli vero ACE menſura cum ſit arcus AE (§. 55. *Geom.*) ipſi DB æqualis *per hypoth.* anguli EAG & ACE æquales ſunt (§. 135. *Geom.*). Quoniam itaque præterea angulus AEC utrique triangulo EAG & EAC communis; erit (§. 252. *Geom.*)

AC : AE = AE : EG   AC : EC = AE : AG

$b : y = y : x$ ſed AC = EC

AE = AG

$$yy = bx$$

Ducatur EF ipſi DC parallela: erit EFH = DHB (§. 222. *Geom.*) = GHC (§. 150. *Geom.*) = EDC (§. 297. & 222. *Geom.*). Porro EGF = HGC (§. 150.

150. *Geom.*) = CED (§. 297 & 222. *Geom.*). Eſt igitur (§. 252. *Geom.*).

$$EC : ED = EG : GF$$
$$b : y = x : \frac{xy}{b}$$

Quoniam DB = ED = AE, & DB = BH, EA = AG, *per demonſtr.* ED = FH (§. 242. *Geom.*); erit AE + ED + DB = AG + BH + GH + FG, hoc eſt, 3AE = AB + FG, conſequenter

$$3y = a + xy : b$$

II. $3by = ab + xy$ ſeu $3by - xy = ab$ quæ æquatio in hanc reſolvitur analogiam:

$$b : y = 3b - x : a$$
$$y : x = 3b - x : a \quad (§. 156. \textit{Arithm.})$$

III. $ay = 3bx - xx$
$yy = bx$ add.

IV. $ay + yy = 4bx - xx$
$ay = 3bx - xx$
$yy = bx$ ſubtr.

V. $ay - yy = 2bx - xx$
$ay = 3bx - xx$
$2yy = 2bx$ add.

VI. $2yy + ay = 5bx - xx$
$ay = 3bx - xx$
$2yy = 2bx$ ſubtr.

VII. $ay - 2yy = bx - xx$

Habemus adeo æquationes locales

I. $yy - bx = 0$ ad parabolam.

II. $xy - 3by + ab = 0$ ad hyperbolam intra aſymptotos.

III. $xx - 3bx + ay = 0$ ad parabolam.

IV. $yy + xx + ay - 4bx = 0$ ad circulum.

V. $yy - xx - ay + 2bx = 0$ ad hyperbolam æquilateram.

VI. $yy + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}ay - \frac{5}{2}bx = 0$ ad ellipſin.

VII. $yy - \frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}bx = 0$ ad hyperbolam ſcalenam.

Pro circulo, ad quem eſt $yy + xx + ay - 4bx = 0$, vi theorematis generalis (§. 543)

$$-2n = b \qquad -2p = -4b$$
$$n^2 = -\tfrac{1}{2}a \qquad p = 2b$$
$$n^2 + p^2 = m^2$$
$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}aa + 4bb)} = m$$

Quare parabola, ad quam $yy - bx = 0$, parametro b deſcripta, fiat AD = $2b$, DH = $\frac{1}{2}a$ & ex centro H radio DH deſcribatur circulus; erit QN = y, AQ = x. Ta[b.] IX. Fig. 93.

Eſt enim his poſitis $ax = y^2$ (§. 352), conſequenter $x = y^2 : a$; atque hinc DQ = RH = $2b - y^2 : b$. Porro RN = QN + QR = QN + DH = $y + \frac{1}{2}a$. Quare ob $HN^2 = RH^2 + RN^2 = \frac{1}{4}aa + 4bb = 4bb - 4y^2 + \frac{y^4}{bb} + yy + ay + \frac{1}{4}aa$, hoc eſt,

$$\frac{y^4 - 3y^2 + ay = 0}{bb}$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \; y{\cdot}bb$$
$$y^3 - 3bby + abb = 0$$

Eadem vero æquatio prodit, ſi in ſuperius inventa ſecunda æquatione $3y = a + xy : b$ ſubſtituitur valor ipſius $x = y^2 : b$ ex prima. Eſt nempe $3y = a + y^3 : bb$, hoc eſt, $y^3 - 3bby + abb = 0$.

Conſtructio per circulum & hyperbolam intra aſymptotos ita abſolvitur; Jungantur $KL = 2b$ & $CL = \frac{1}{2} a$ ad angulos rectos; erit $CK = V.(4bb + \frac{1}{4} aa)$ radius circuli ex centro C per K deſcribendi. Producatur CL in I, donec $LI = 2CL = a$ & KL in T, donec $LT = b$, ſeu $KT = 3b$. Intra aſymtotos KTS per I deſcribatur hyperbola. Dico QM eſſe radicem veram quæſitam ſeu ſubtenſam trientis arcus, qui metitur angulum triſecandum, radio b deſcripti; ſeu $QM = y$ & $KQ = x$.

Eſt enim $QT = KT - KQ = 3b - x$, adeoque ob $IL.LT = QT.QM$ (§.459), $3by - xy = ab$. Porro $PC = QL = KL - KQ = 2b - x$ & $PM = y + \frac{1}{2} a$, adeoque ob $KC^2 = MC^2 = PM^2 + PC^2$ (§.394. *Geom.*), $\frac{1}{4} aa + 4bb = y^2 + ay + \frac{1}{4} aa + 4bb - 4bx + xx$, hoc eſt, $y^2 + ay = 4bx - x^2$.

Æquatio prior ad hyperbolam in hanc reſolvitur analogiam:

$$3b - x : b = a : y$$

Ergo $4b - x : b = a + y : y$ (§.204.)
$$4b - x : a + y = b : y$$

Æquatio poſterior ad circulum hanc ſuppeditat analogiam:

$$4b - x : y + a = y : x$$

Quare $b : y = y : x$ (§.156. *Arithm.*) Unde $bx = y^2$ & $y^2 : b = x$, $y^4 : b^2 = x^2$, ſubſtitutis his valoribus in æquatione ad circulum $y^2 + ay = 4bx - x^2$, prodit

$$y^2 + ay = 4y^2 - y^4 : b^2$$
$$\overline{ay = 3y^2 - y^4 : b^2} \; y : b^2$$
$$ab^2 = 3b^2y - y^3$$

ſeu $y^3 - 3b^2y + ab^2 = 0$ ut ante.

Notandum vero eſt, cum eadem æquatio prodeat, ſi ponatur $qm = y$ eſſe qm trientis complementi ad circulum ſubtenſam AI. *Tab. XI. Fig. 110. 111.*

Conſtructiones reliquas facile proprio Marte addent, qui ſuperiora rite perceperunt.

PROBLEMA 247.

586. *Numerum irrationalem datum per lineam exprimere.*

Sit potentia imperfecta quæcunque x & radix ex ea extracta irrationalis $x^{1:m}$.

Ponatur $\quad x^{1:m} = y$
$$\overline{\qquad\qquad}$$
erit $\quad x = y^m$

hoc eſt, a pro unitate aſſumta

$$a^{m-1} x = y^m$$

quæ eſt æquatio ad infinita parabolarum genera (§. 475). Quare ſi parametro a parabola primi generis ſit deſcripta & abſciſſa ſit ad parametrum ut numerus ſub ſigno radicali, e. gr. ut 3 ad 1, ſi $\sqrt{3}$ deſideretur, vel ut 3 ad 2, ſi quæratur $\sqrt{\tfrac{3}{2}}$; ejus ſemiordinata exprimet numerum quæſitum, ſeu ejus ad parametrum ratio erit numerus quæſitus. Eodem modo patet, deſcribendam eſſe parabolam ſecundi generis ſeu cubici ordinis, ſi radices cubicæ dentur; parabolam vero tertii generis ſeu biquadratici ordinis, ſi radices dentur biquadraticæ & ita porro.

Sed poſſunt etiam parabolæ inferiores ſatisfacere radicibus ſuperioribus. Sit enim e. gr. quærenda linea y, quæ eandem habeat rationem ad lineam datam a, quam habet 1 ad $\sqrt[3]{5}$. Per conditionem problematis erit

$$1 : \sqrt[3]{5} = a : y$$

$$a\sqrt[3]{5} = y$$

$$5a^3 = y^3$$

Conſtruetur adeo problema per parabolam primi generis & circulum, quærendo nempe inter a & $5a$ duas medias continue proportionales.

PROBLEMA 248.

587. *Invenire puncta quotcunque, quæ ſint in curva datæ æquationis.*

1. Ducta linea recta, quæ pro axe curvæ deſcribendæ aſſumatur, pro arbitrio determinentur abſciſſæ quotcunque:
2. Erigantur perpendiculares indeterminatæ ad ſingulas abſciſſas.
3. Quoniam abſciſſa determinata eſt, æquatio data pro determinata recte habetur. Conſtruatur itaque per methodum ſupra expoſitam: ita enim invenietur ſemiordinata abſciſſæ reſpondens.

E. gr. Sit conſtruenda parabola ſecundi generis ſeu cubici ordinis $aav = y^3$. Aſſumta igitur pro abſciſſa v recta determinata, nova quædam indeterminata introducatur. Fiat nempe

$$a : y = y : x$$

$$\text{I. } ax = y^2$$

Æquatio propoſita in hanc reſolvitur analogiam:

$$a : y = y^2 : av$$

hoc eſt $ax : av$

ſeu $x : v$ (§. 104)

Quare $y : x = x : v$ (§. 156. Arithm.)

$$x^2 = vy$$

addatur $y^2 = ax$

erit II. $y^2 + x^2 - vy - ax = 0$

Ope

Ope igitur æquationis ad parabolam $y^2-ax=0$ & alterius ad infinitos circulos (quia v infinitis modis determinari poteſt & debet) $y^2+x^2-vy-ax=0$ puncta quotcunque in paraboloide cubicali inveniuntur. Eſt enim pro circulo vi theorematis generalis (§. 543.)

$$2n=v \qquad 2p=a$$

$$n=\tfrac{1}{2}v \qquad p=\tfrac{1}{2}a$$

$$v^2+p^2=m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}vv+\tfrac{1}{4}aa)}=m$$

ab. I. g. 12. Quare, parabola parametro a deſcripta, fiat portio axis AK $=\frac{1}{2}a$ & erecta perpendiculari indefinita KG, ex ejus puncto quocunque C per verticem A deſcribatur circulus, erit QM ſemiordinata reſpondens abſciſſæ in paraboloide cubicali, quæ eſt ipſius KC dupla. Ut igitur plures ſemiordinatæ determinentur, ex quotcunque aliis punctis rectæ KG per verticem parabolæ ducendi ſunt circuli alii in punctis adhuc aliis parabolam interſecantes.

Nam ſi KC $=\frac{1}{2}v$ & QM $=y$; erit AQ $=yy:aa$, KQ $=$ CP $=$ AQ-AK $=yy:aa-\frac{1}{2}a$, PM $=y-\frac{1}{2}v$. Quamobrem ob $AC^2=AK^2+KC^2=CM^2=CP^2+PM^2$ (§. 394. *Geom.*), $\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}vv=y^4:aa-y^2+\frac{1}{4}aa+y^2-vy+\frac{1}{4}vv$, hoc eſt,

$$y^4:aa=vy$$

$$\overline{\qquad\qquad} \; y:aa$$

$$y^3=aav$$

Eſt ergo 2KC abſciſſa & QM ipſi reſpondens ſemiordinata in paraboloide cubicali.

Sit conſtruendus circulus ſecundi generis, ad quem eſt $y^3=av-v^3$. Æquatio in hanc abit analogiam:

$$v:y=y^2:av-v^2$$

Cum in conſtructione v determinetur, introducatur nova indeterminata x; ponendo

$$v:y=y:x$$

erit I. $vx=yy$
Porro $v:y=vx:av-v^2$
hoc eſt $y:x=x:a-v$ (§. 104)

Itaque $ay-yv=xx$
Addatur $vx=yy$

erit II. $yy+xx+vy-ay-vx=0$.

Ope itaque æquationis prioris ad infinitas parabolas & poſterioris ad infinitos circulos determinantur quotcunque ſemiordinatæ ad abſciſſas quotcunque in circulo ſecundi generis aſſumtas. Ipſa tamen conſtructio moleſtior eſt antecedente, quia continuo nova parabola deſcribenda, ob indeterminatam parametrum v.

Finis Analyſeos finitorum.

ELEMENTORUM ANALYSEOS MATHEMATICÆ PARS II.

ELEMENTA ANALYSEOS INFINITORUM TRADIT.

Sectio I DE CALCULO DIFFERENTIALI.

CAPUT I. DE NATURA CALCULI DIFFERENTIALIS.

DEFINITIO 1.

1 *Calculus differentialis* eſt methodus quantitates differentiandi, hoc eſt, inveniendi quantitatem infinite parvam, quæ infinities ſumta datam adæquat.

DEFINITIO 2.

2. *Infiniteſima* ſeu *quantitas infinite parva* eſt particula quantitatis adeo exigua, ut eidem incomparabilis exiſtat, ſeu quæ omni aſſignabili minor.

COROLLARIUM 1.

3. Infiniteſima itaque reſpectu ejus quantitatis, cui incomparabilis exiſtit, pro nihilo habenda. Si enim negligitur, error committitur omni aſſignabili minor, hoc eſt, nullus.

COROLLARIUM 2.

4. Hinc duæ quantitates infiniteſima differentes æquales ſunt. Cum enim infiniteſima neglecta nullum producat errorem in quantitatibus (§. 3.); una alteri ſubſtitui poteſt. Sunt igitur æquales (§. 15. *Arithm.*).

SCHOLION.

5. *Ut natura infiniteſimarum rite intelligatur; ad ſequentia animum advertiſſe juvat. Ponamus, te dimetiri montis altitudinem; dum vero per dioptras collineas, ſlatu venti pulviſculum abigi: montis ergo altitudo diametro unius pulviſculi cenſetur imminuta. Enimvero quoniam eadem altitudo montis invenitur, ſive pulviſculum illud vertici adhæreat, ſive abigatur; quantitas ejus diametri in præſente negotio pro nihilo habenda, hoc eſt, infinite parva exiſtit. Similiter in Aſtronomia diameter*

ter Telluris reſpectu fixarum habetur pro puncto ſeu infiniteſima: idem enim obſervaretur motus primus, ſi tellus eſſet punctum individuum. Eodem etiam modo in eclipſibus lunaribus computandis, terra pro ſphæra perfecta, conſequenter montium, multoque magis ædium ac turrium altitudines pro infiniteſimis habentur: neque enim aliter nobis appareret umbra telluris ſuper diſco Lunæ, ſi terra ſphæra perfecta eſſet. Idem vero in abſtractis quantitatibus locum habere, dudum agnovere veteres & inter eos demonſtratores rigidiſſimi, Euclides (a) *atque* Archimedes (b). *E. gr. ſi a linea data auferatur ipſius dimidium, ut habet* Euclides, *ſeu, quod perinde eſt, pars alia quantacunque, & a reſiduo rurſus ipſius dimidium aut pars alia ſimilis primum ablatæ atque ita porro: devenietur tandem ad aliquam quantitatem qualibet data minorem, hoc eſt, ad infiniteſimam. Apparet adeo hinc, nomen infiniteſimæ eſſe reſpectivum: involvit nempe relationem ad aliam quantitatem datam, cujus reſpectu infiniteſima dicitur. E. gr. diameter telluris in eclipſibus lunaribus eſt infinite magna reſpectu altitudinis montium; ſed eadem tamen eſt infinite parva reſpectu diſtantiæ fixarum in ordine ad motum primum. Cavendum vero, ne cum illis, qui imaginaria cum realibus confundunt, propterea quod diſtinctæ continui ac infiniti notione deſtituti neſcio quæ phantaſmata ſibi fingunt, infiniteſimas & infiniteſimarum infiniteſimas pro entibus realibus habeas: a quo ipſe calculi infiniteſimalis inventor, illuſtris* Leibnitius, *alienus.* (c)

DEFINITIO 3.

6. Infiniteſimæ dicuntur *differentialia*, item *quantitates differentiales*, ſi ſpectantur ut differentiæ duarum quantitatum. Vir ſummus *Newtonus* (quem Angli ſequuntur) infiniteſimas *Fluxiones* vocat, quia eas conſiderat veluti momentanea quantitatum incrementa, e. gr. lineæ fluxu puncti, aut ſuperficiei fluxu lineæ, aut ſolidi fluxu ſuperficiei genita.

COROLLARIUM.

7. Cum itaque tantum quantitates variabiles continuo augeantur, vel minuantur, conſtantibus vero nihil accedat, (§. 339. *Analyſ. finit.*); differentiale quantitatis conſtantis nullum eſt, ſed variabiles tantum aliquod admittunt.

HYPOTHESIS.

8. *Quantitatum differentialia exprimantur per eandem litteram, quibus variabiles denotantur, præfixa tamen littera d.* E. gr. differentiale ipſius x dicatur dx; differentiale ipſius y dicatur dy. *Eſt autem* dx *quantitas poſitiva, ſi* x *continuo creſcit; negativa, ſi decreſcit.*

SCHOLION.

9. *Angli cum* Nevvtono *pro* dx *ſcribunt* $\dot{x}$; *pro* dy *vero* $\dot{y}$; *ſed commodior eſt* Leibnitiana *differentialium deſignatio, qua omnes reliqui utuntur, quia ſi differentialia denuo differentiantur facile oritur punctorum confuſio: ut taceam typothetas facilius puncta negligere, quam litteram* d *omittere.*

(a) Element lib. 10. prop. 1.
(b) in præfatione ad quadraturam parabolæ & in ſcriptis ejus omnibus.
(c) Vide Acta Eruditorum A. 1712. p. 167.

COROLLARIUM 1.

10. Quoniam quantitates conſtantes primis alphabeti litteris indigitamus (§. 340. *Analyſ. finit.*); erit $da=0$, $db=0$, $dc=0$ (§. 7).

COROLLARIUM 2.

11. Quare $d(x+y-a)=dx+dy$ & $d(x-y+a)=dx-dy$. Facilis adeo eſt differentiatio quantitatum per additionem aut ſubtractionem compoſitarum.

PROBLEMA 1.

12. *Differentiare quantitates ſe mutuo multiplicantes.*

RESOLUTIO.

Tab. I. Fig. I. I. Si quantitates duæ ſe mutuo multiplicent, ut xy; differentiale unius factoris ducatur in factorem alterū; ſumma duorum factorum, quæ hac ratione prodeunt, $xdy+ydx$ erit differentiale quæſitum, hoc eſt, $d(xy)=xdy+ydx$.

DEMONSTRATIO.

xy repræſentat rectangulum ABDC, cujus latus unum $AC=x$, alterum $DC=y$. Si concipiamus latus utrumque augeri quantitate differentiali, nempe ut CA degeneret in $CL=x+dx$ & CD in $CE=y+dy$; rectangulum CABD abit in majus CLGE. Differentiale adeo ipſius xy eſt differentia inter rectangulum CABD & CLGE (§. 6). Quare $d(xy)=xy+ydx+xdy+dxdy-xy=ydx+xdy+dxdy$, nempe ALBH + DBFE + BHGF. Quodſi in rectangulo $ALHB=ydx$ $AL=dx$ ſumatur pro conſtante; erit $HGFB=dxdy$ differentiale ejus (§. 6). Eodem modo patet, eſſe idem rectangulum BHGF differentiale ipſius DEFB. Quamobrem HBFG ſeu $dxdy$ reſpectu rectangulorum ALHB & DBEF, ſeu ydx & xdy, habetur pro nullo; conſequenter differentia inter rectangula CABD & CLGE, ſeu differentiale ipſius xy eſt $ydx+xdy$. Q. e. d.

II. Si plures quantitates ſe mutuo multiplicent, e. gr. ſi fuerit vxy; fiat $vx=t$, erit $vxy=ty$, conſequenter $d(vxy)=tdy+ydt$, *per caſ.* 1. Sed $dt=vdx+xdv$, *per caſ.* 1. Ergo his valoribus in differentiali antecedente $tdy+ydt$ ſubſtitutis, prodit $d(vxy)=vxdy+vydx+xydv$. Patet adeo factum ex binis ducendum eſſe in differentiale tertii.

III. Eodem modo reperitur, quid factu opus ſit, ſi plures quantitates ſe mutuo multiplicent. Sit enim e. gr. quantitas differentianda $vxyz$. Fiat $vxy=t$, erit $vxyz=tz$, conſequenter $d(tz)=zdt+tdz$, *per caſ.* 1. Sed $dt=d(vxy)=vxdy+vydx+xydv$, *per caſ.* 2. $d(vxyz)=zdt+tdz$

$+ tdz = zvxdy + zvydx + zxy\,dv + vxydz.$

IV. Quod ſi creſcente una variabili altera y decreſceret; evidens eſt, fore $ydx - xdy$ differentiale ipſius xy.

COROLLARIUM 1.

13. Ergo $d(x^2) = xdx + xdx = 2x\,dx$, $d(x^3) = x^2dx + x^2dx + x^2dx = 3x^2dx$ &c. & in genere $d(x^m) = mx^{m-1}dx$. Unde patet, quomodo potentiæ differentientur.

COROLLARIUM 2.

14. Cum exponentes dignitatum x^1, x^2, x^3, x^4 &c. 1, 2, 3, 4 &c. ſint earundem logarithmi, poſito logarithmo unitatis $= 0$. (§. 302. *Arithm.*); logarithmi vero dignitatum decreſcentium $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^4}$ &c. ſint -1, -2, -3, -4 &c. (§. 317 *Arithm.*); erit $\frac{1}{x} = x^{-1}$, $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$, $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$ &c. & in genere $\frac{1}{x^m} = x^{-m}$, conſequenter $d(1 : x^m) = -mx^{-m-1}dx$ (§. 13.).

COROLLARIUM 3.

15. Et quia $\sqrt[m]{x^n} = x^{n:m}$ (§. 50. *Analyſ. finit.*) & $1 : \sqrt[m]{x^n} = 1 : x^{n:m} = x^{-n:m}$ (§. *cit.* & *præc.*); erit $d\sqrt[m]{x^n} = \frac{n}{m} x^{n:m-1}dx = \frac{n}{m} x^{(n-m):m}dx = \frac{n}{m} x\, \sqrt[m]{x^{n-m}}$ & $d(1 : \sqrt[m]{x^n}) = -\frac{n}{m} x^{-n:m-1}dx = -\frac{n}{m} x^{(-n-m):m}dx = -ndx : m\sqrt[m]{x^{n-m}}$

SCHOLION

16. *Quodſi cuipiam non ſatis manifeſtum videatur, quomodo corollaria duo poſteriora ex priore inveniantur; is differentialia potentiarum imperfectarum alio adhuc modo inveſtigare poteſt, quem in ſequente problemate exponimus, inprimis cum ejusdem methodi uſus eſſe poſſit, quoties in formulis compoſitis differentiandis aqua hæret.*

PROBLEMA 2.

17. *Differentiare* $1 : x^m$, *item* $\sqrt[m]{x^n}$ & $1 : \sqrt[m]{x^n}$.

RESOLUTIO.

I. Fiat $1 : x^m = v$

erit $1 = x^m v$

(§. 10, 12.) $0 = mx^{m-1}vdx + x^m dv$

$-mx^{m-1}vdx = x^m dv$

$\frac{-mx^{m-1}vdx}{x^m} = dv$

$\frac{-mx^{m-1}dx}{x^{2m}} = dv$ (§. 41. 48. *part.* 1.)

h. e. $-mx^{-m-1}dx = dv$ (§. 49. *part.* 1.)

II. Fiat

II. Fiat $\sqrt[m]{x^n} = y$

$x^n = y^m$

$nx^{n-1}dx = my^{m-1}dy$ (§. 13.)

hoc eſt, $nx^{n-1}dx = \frac{my^m dy}{y}$ (§. 49. part. 1.)

$\times y : my^m$

$\frac{nyx^{n-1}dx}{y^m} = dy$

ſeu $\frac{nx^{n:m}x^{n-1}dx}{mx^n} = dy$

$\frac{n}{m} x^{n:m} x^{-1} dx = dy$ (§. 49. part. 1.)

h. e. $\frac{n}{m} x^{(n-m):m} dx = dy$

III. Fiat denique $1 : \sqrt[m]{x^n} = z$

erit $1 = z \sqrt[m]{x^n} = zx^{n:m}$

$0 = \frac{n}{m} x^{(n-m):m} zdx + x^{n:m} dz$ (II. 12.)

$-\frac{n}{m} x^{(n-m):m} zdx = x^{n:m} dz$

$-\frac{n x^{(n-m):m} dx}{mx^{n:m}} = x^{n:m} dz$

$\frac{-nx^{(n-m):ndx}}{mx^{2n:m}} = dz$ (§. 41. 48 part. 1.)

$-\frac{n}{m} x^{(-n-m):m} dx = dz$ (§. 49. part. 1.)

h. e. $\frac{-ndx}{m \sqrt[m]{x^{n+m}}} = dz$ (§. 14.).

En in omnibus caſibus easdem formulas, quas ſuperius elicuimus (§. 14. 15.).

SCHOLION.

18. *Me non monente clarum eſſe arbitror, formulas in problemate repertas ſubire vicem regularum, juxta quas in caſibus ſimilibus inſtituitur differentiatio.*

PROBLEMA 3.

19. *Differentiare quantitates ſe mutuo dividentes* $x : y$.

RESOLUTIO.

I. Sit $x : y = v$

erit $x = vy$

$dx = vdy + ydv$ (§. 12)

$dx - vdy = ydv$

h. e. $dx - \frac{xdy}{y} = ydv$

$: y$

$\frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = dv$

ſeu $(ydx - xdy) : y^2 = dv$

Regula. 1. Differentiale diviſoris ducatur in dividendum & contra differentiale dividendi in diviſorem. 2. Factum

2. Factum prius ex poſteriore auferatur.

3. Reſiduum per quadratum diviſoris dividatur. Quotus eſt differentiale quantitatum ſe mutuo dividentium.

II. Si fuerit $xy : vz$ differentianda: ponatur $xy = t$ & $vz = w$; erit $xy : vz = t : w$. Sed $d(t : w) = (wdt - tdw) : w^2$ *per caſ.* 1. & $dt = xdy + ydx$, $dw = vdz + zdv$ (§. 12). Ergo $d(t : w) = d(xy : vz) = (vzxdy + vzydx - xyvdz - xyzdv) : v^2z^2$. Patet adeo, regulam præcedentem huic quoque caſui ſatisfacere.

CAPUT II.

DE USU CALCULI DIFFERENTIALIS IN TANGENTIBUS CVRVARUM DETERMINANDIS.

PROBLEMA 4.

20. *Invenire ſubtangentem in curva Algebraica quacunque.*

RESOLUTIO.

Tab. I. Fig. 2. Sit ſemiordinata pm alteri PM infinite propinqua, erit Pp differentiale abſciſſæ, & demiſſa perpendiculari $MR = Pp$ (§. 215. *Geom.*) Rm differentiale ſemiordinatæ. Ducatur tangens TM: arculus infinite exiguus Mm non differet a linea recta, adeoque MmR triangulum rectilineum rectangulum: quod *triangulum curvæ characteriſticum* appellari ſolet, quia lineæ curvæ per illud a ſe invicem diſtinguuntur. Ob parallelismum rectarum PM & pm angulus $MmR = TMP$ (§. 222. *Geom.*). Quare $\triangle MmR \sim \triangle TMP$ (§. 252. *Geom.*). Sit itaque $AP = x$, $PM = y$: erit $Pp = MR = dx$ & $Rm = dy$ (§. 8.), conſequenter (§. 252. *Geom.*)

$$Rm : MR = PM : PT$$
$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Quodſi ex æquatione curvæ cujuscunque data in expreſſione ſubtangentis PT generali $ydx : dy$ valor ipſius dx ſubſtituatur; quantitates differentiales evaneſcunt proditque valor ſubtangentis in quantitatibus communibus.

Idem valor eruitur, ſi convexitas curvæ refertur ad axem AT. Tab. I. Fig. 4.

COROLLARIUM 1.

21. Pro parabola Apolloniana eſt: $ax = y^2$ (§. 352. *part* 1.)

Hinc $adx = 2ydy$ (§. 12)

$$dx = 2ydy : a$$

$PT = ydx : dy = 2y^2dy : ady = 2y^2 : a = 2ax : a = 2x$, prorſus ut ſupra (§. 372. *part.* I.)

COROLLARIUM 2.

22. Pro infinitis parabolis eſt (§. 475. *Part.* I.)

$$a^{m-1}x = y^m$$

$$a^{m-1}dx = my^{m-1}dy \quad (\S. 12)$$

$$dx = my^{m-1}dy : a^{m-1}$$

$PT = ydx : dy = my^m dy : a^{m-1}dy = my^m : a^{m-1} = ma^{m-1}x : a^{m-1} = mx$.

E. gr. Cum in paraboloide cubicali $m = 3$; erit ſubtangens $= 3x$; cum in ſurdeſolidali $= 4$; erit ſubtangens $= 4x$.

COROLLARIUM 3.

23. Pro circulo eſt (§ 341. *part.* I.)

$$ax - xx = yy$$

$$adx - 2xdx = 2ydy$$

$$dx = 2ydy : (a - 2x)$$

$PT = ydx : dy = 2y^2dy : (a-2x)dy = 2y^2 : (a-2x) = (2ax - 2xx) : (a-2x) = (ax-xx) : (\frac{1}{2}a - x)$, hoc eſt, $PC : PB = AP : PT$.

Ergo $AT = (ax-xx) : (\frac{1}{2}a - x) - x = (ax - xx - \frac{1}{2}ax + xx) : (\frac{1}{2}a - x) = \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a - x)$ hoc eſt, $PC : PA = CA : AT$.

COROLLARIUM 4.

24. Pro infinitis circulis eſt (§. 473. *part.* I.)

$$ax^m - x^{m+1} = y^{m+1}$$

$$max^{m-1}dx - (m-1)x^m dx = (m+1)y^m dy$$

$$\frac{dx = (m+1)y^m dy}{max^{m-1} - (m-1)x^m}$$

$PT = ydx : dy = (m+1)y^{m+1} : (max^{m-1} - [m-1]x^m) = (m+1)(ax^m - x^{m+1}) : (max^{m-1} - [m-1]x^m) = (m+1)(ax - x^2) : (ma - mx - x)$ & $AT = (m+1) : (ax - x^2) : (ma - [m-1]x) - x = (max + ax - mx^2 - x^2 - max + mx^2 + x^2) : (ma - [m-1]x) = ax : ma - [m-1]x)$. Cum itaque in circulo ſecundi generis $m = 2$; erit $AT = ax : (2a - 3x)$ & $PT = (3ax - 3x^2) : (2a - 3x)$.

COROLLARIUM 5.

25. Pro ellipſi Apolloniana eſt (§. 378. *part.* I.)

$$ay^2 = abx - bx^2$$

Hinc $2aydy = abdx - 2bxdx$

$$2aydy : (ab - 2bx) = dx$$

$PT = ydx : dy = 2ay^2 : (ab - 2bx) = (2abx - 2bx^2) : (ab - 2bx) = (2ax - 2x^2) : (a - 2x)$, prorſus ut ſupra (§. 400. *part.* I.)

COROLLARIUM. 6.

26. Pro infinitis ellipſibus eſt (§. 478. *part.* I.)

$$ay^{m+n} = bx^m(a-x)^n$$

$$(m+n)ay^{m-1}dy = mbx^{m-1}(a-x)^n dx - nbx^m(a-x)^{n-1}dx$$

$$\frac{(m+n)ay^{m-1}dy}{mbx^{m-1}(a-x)^n - nbx^m(a-x)^{n-1}} = dx$$

PT =

$PT = ydx : dy = (m+n)ay^m$

$\overline{mbx^{m-1}(a-x)^n - nbx^m(a-x)^{n-1}}$

$= (m+n)bx^m(a-x^n) : (mbx^{m-1}[a-x]^n - nbx^m[a-x]^{n-1}) =$ (diviſione per $bx^{m-1}[a-x]^{n-1}$ facta) $(m+n)(ax-x) : (ma-mx-nx)$ & hinc

$AT = (max - mxx + nax - nxx) : (ma-mx-nx) - x = (max - mx^2 + nax - nx^2 - max + mx^2 + nx^2) : (ma - mx - nx) = nax : (ma-[m-1]x)$.

Cum adeo in elliptoide cubicali ſit $m = 2, n = 1$; erit $PT = (3ax - 3x^2) : (2a - 3x)$ & $AT = ax : (2a - 3x)$.

COROLLARIUM 7.

27. Pro hyperbola Apolloniana eſt (§. 417. part. 1.)

$$ay^2 = abx + bxx$$

$$2aydy = abdx + 2bxdx$$

$$2aydy : (ab + 2bx) = dx$$

$PT = ydx : dy = 2ay^2 : (ab + 2bx) = (2abx + 2bxx) : (ab + 2bx) = (2ax + 2xx) : (a + 2x)$ prorſus ut ſupra (§. 449. *part.* 1.).

COROLLARIUM 8.

28. Pro infinitis hyperbolis cum ſit $ay^{m+n} = bx^m(a+x)^n$ (§. 480. *part.* 1.); reperietur ut ante pro infinitis ellipſibus $PT = (m+n)(ax+x^2) : (ma + [m+1]x)$ & $AT = nax : (ma + [m+1]x)$.

COROLLARIUM 9.

29. Pro hyperbola intra aſymptotos eſt (§. 446. part. 1.)

$$xy = aa$$

$$xdy + ydx = 0$$

$$ydx = -xdy$$

$PT = ydx : dy = -xdy : dy = -x$

Quoniam valor ſubtangentis eſt negativus, id indicio eſt, ſubtangentem PT eſſe ſumendam in oppoſitum originis abſciſſæ AP. Differentiale enim ipſius xy eſſe debebat $ydx - xdy$ (§. 12.). Tab. I. Fig. 4.

COROLLARIUM 10.

30. Pro infinitis hyperbolis intra aſymtotos eſt.

$$a^{m+n} = x^n y^m$$

$$0 = nx^{n-1}y^m dx + mx^n y^{m-1} dy$$

$$-mx^n y^{m-1} dy : nx^{n-1} y^m = dx$$

$PT = ydx : dy = -mx^n y^m : nx^{n-1} y^m = -\frac{m}{n} x$.

COROLLARIUM 11.

31. Pro Ciſſoide *Dioclis* eſt (§. 501. part. 1.)

$$y^2 = x^3 : (a-x)$$

$$2ydy = (3ax^2dx - 3x^3dx + x^3dx) : (a-x)^2$$

$2y(a-x)^2dy : (3ax^2 - 2x^3) = dx$

$PT = ydx : dy = 2y^2(a-x)^2 : (3ax^2 - 2x^3)$

$2x^3) = x^3(a-x) : (3ax^2-2x^3 = (ax-xx) : (3a-2x)$.

COROLLARIUM. 12.

32. Denique pro omnibus curvis algebraicis eſt (§. 349. *part. 1.*)

$$ay^m + bx^n + cy^r x^s + d = 0$$

$$may^{m-1}dy + nbx^{n-1}dx + scy^r x^{s-1} dx (+ rcy^{r-1}x^s dy = 0$$

$$nbx^{n-1}dx + scy^r x^{s-1}dx = -may^{m-1}dy - rcy^{r-1}x^s dy$$

$$dx = \frac{-may^{m-1}dy - rcy^{r-1}x^s dy}{nbx^{n-1} + scy^r x^{s-1}}$$

$$PT = \frac{ydx}{dy} = \frac{-may^m - rcy^r x^s}{nbx^{n-1} + scy^r x^{s-1}}$$

Sit e. gr. $y^2 - ax = 0$, erit comparatione cum formula generali facta,

$$\frac{ay^m = y^2}{a = 1 \quad m = 2} \qquad \frac{bx^n = -ax}{b = -a \quad n = 1}$$

$$\frac{cy^r x^s = 0}{c = 0 \quad r = 0} \qquad f = 0. \qquad s = 0$$

His valoribus in formula ſubtangentis generaliſſima ſubſtitutis, prodit ſubtangens parabolæ primi generis $(-2.1y^2 - 0.0y^0x^0) : (1. -ax^{1-1} + 0.0y^0x^0) = -2y^2 : -a = 2y^2 : a$, ut ſupra (§. 21).

Sit $y^3 - x^3 - axy = 0$, erit

$$\frac{ay^m = y^3}{a = 1 \quad m = 3} \qquad \frac{bx^n = -x^3}{b = -1 \quad n = 3}$$

$$\frac{cy^r x^s = -axy}{c = -a \quad r = 1} \qquad f = 0 \qquad s = 1$$

His valoribus in formula ſubtangentis generali ſubſtitutis, prodit ſubtangens curvæ, ad quam eſt æquatio data, $PT = (-3.1y^3 - 1. -ayx) : (3. -1x^{3-1} + 1. -a yx^{1-1}) = (-3y^3 + ayx) : (-3x^2 - ay) = (3y^3 - axy) : (3x + ay)$, conſequenter $AT = (3y^3 - axy) : (3x^2 + ay) - x = (3y^3 - axy - 3x^3 - axy) : (3x^2 + ay) = (3axy - 2axy) : (3x^2 + ay)$, ſubſtituto nempe ex æquatione ad curvam ipſius $y^3 - x^3$ valore, hoc eſt, $axy : (3x^2 + ay)$.

COROLLARIUM 13.

33. Quia $PT = ydx : dy$, $PM = y$; erit (§. 394. *Geom.*) $TM = \sqrt{(y^2dx^2 : dy^2 + y^2)} = y\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dy$. Tab. I. Fig. 2.

PROBLEMA 5.

34. *Determinare ſubnormalem* PH *in linea Algebraica quacunque.*

RESOLUTIO.

Sit $PM = y$, $AP = x$, erit $TP = ydx : dy$ (§. 20) & $PT : PM = PM : PH$ (§. 371. *part.* 1.) Tab. I. Fig. 2.

hoc eſt, $\frac{ydx}{dy} : y = y : \frac{ydy}{dx}$

Quodſi ut in problemate præcedente in expreſſione ſubnormalis PH generali valor ipſius dy ſubſtituatur; differentiales quantitates evaneſcunt & valor ſubnormalis in quantitatibus ordinariis prodit.

COROL.

COROLLARIUM I.

35. in parabola *Apolloniana* $dy = adx : 2y$, (§. 21). Ergo PH $= ydy : dx = aydx : 2ydx = \frac{1}{2}a$, ut ſupra reperimus (§. 372. part. 1.)

COROLLARIUM 2.

36. In infinitis parabolis $dy = a^{m-1} dx : my^{m-1}$ (§. 22). Itaque PH $= ydy : dx = a^{m-1}y : my^{m-1} = a^{m-1} : my^{m-2}$.

COROLLARIUM 3.

Tab. I. Fig. 3. 37. In circulo $adx - 2xdx = 2ydy$ (§. 23), hoc eſt, $\frac{1}{2}a - x = ydy : dx =$ PC. Apparet adeo, in circulo omnes ad peripheriam normales in centro concurrere, conſequenter tangentem TM radio CM ad angulos rectos inſiſtere.

COROLLARIUM 4.

38. In infinitis circulis $(max^{m-1}dx - (m-1)x^m dx) : (m+1)y^{m-1} = ydy$. Unde ſubnormalis $ydy : dx = (max^{m-1} - [m-1]x^m) : (m+1)y^{m-1}$.

COROLLARIUM 5.

Tab. I. Fig. 2. 39. In infinitis ellipſibus $dy = (mbx^{m-1}(a-x)^n dx - nbx^m(a-x)^{n-1}dx) : (m+1)ay^{m-1}$ (§. 26). Unde PH $= ydy : dx = (mbx^{m-1}(a-x)^n - nbx^m(a-x)^{n-1}) : (m+1)ay^{m-2}$.

COROLLARIUM 6.

40. Eodem modo (§. 28) pro infinitis hyperbolis reperitur PH $= (mbx^{m-1}[a+x]^n - nbx^m[a+x]^{n-1}) : (m+1)ay^{m-2}$.

COROLLARIUM. 7.

Tab. I. Fig. 4. 41. Pro hyperbola intra aſymptotos (§. 29) $dy = -ydx : x$. Unde PH $= y dy : dx = -y^2 : x$.

COROLLARIUM. 8.

42. In Ciſſoide *Dioclis* $2ydy = (3ax^2dx - 2x^3dx) : (a-x)^2$ (§. 31). Igitur ſubnormalis $ydy : dx = (3ax^2 - 2x^3) : 2(a-x)^2$.

COROLLARIUM. 9.

43. Quia PH $= ydy : dx$ (§. 33) & PM $= y$: erit MH $= \sqrt{(y^2dy^2 : dx^2 + y^2)} = y\sqrt{(dy^2 + dx^2)} : dx$. Tab. I. Fig. 2.

PROBLEMA 6.

44. *Determinare curvarum Algebraicarum aſymptotos.*

RESOLUTIO.

1. Quoniam aſymptotus CD cum curva non concurrit, niſi intervallo infinito emenſo; haberi poteſt pro tangente in puncto, cui abſciſſa infinita reſpondet. Quantitates ergo conſtantes reſpectu variabilium x & y ſunt infinite parvæ (§. 2.). Quamobrem ſi in valore ipſius AT abjiciantur, quæ in nullam variabilem ducuntur; prodibit valor ipſius AC, per quem punctum C determinatur, ex quo aſymptotus CD ducitur. Tab. I. Fig. 2.

2. Quodſi idem fiat in æquatione pro curva, & facta differentiatione inveniatur ratio $dx : dy$; haud difficulter quoque erui-

tur valor ipſius AE: eſt enim in illo caſu Δ MR$m \backsim \Delta$ CEA. Quod ut clarius intelligatur, ponamus abſciſſam AP eſſe infinitam, adeoque TM aſymptotum; evidens eſt Δ MmR $\backsim \Delta$ TPM (§. 20). Sed Δ TPM $\backsim$ TAG (§. 253. *Geom.*). Ergo Δ TAG $\backsim \Delta$ MmR, conſequenter MR : mR = TA : AG (§. 252.) Surrogetur jam in locum Δ TAG alterum CAE; erit MR : mR = CA : AE, hoc eſt, $dx : dy$ = CA : AE.

COROLLARIUM 1.

45. In hyperbola Apolloniana AT $= ax:(a+2x)$ §. 449. *part.* 1. Ergo AC $ax : 2x = \frac{1}{2}a$, prorſus ut ſupra habetur (§. 432. *part.* 1.). Porro ad hyperbolam Apollonianam

$$ay^2 = bx(a+x)$$

hoc eſt in noſtro caſu ob a infiniteſimam

$$ay^2 = bxx$$

conſequenter

$$y\sqrt{a} = x\sqrt{b}$$

$$dy\sqrt{a} = dx\sqrt{b}$$

$$dx:dy = \sqrt{a} : \sqrt{b}$$

adeoque ob $dx:dy$ = CA:AE (§. 44)

$$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \tfrac{1}{2}a : AE$$

Unde habetur AE $= \frac{1}{2}\sqrt{a^2b} : \sqrt{a} = \frac{1}{2}\sqrt{ab}$, denuo ut ſupra (§. 432).

COROLLARIUM 2.

46. Pro infinitis hyperbolis eſt AT $= ax:(ma+mx+nx)$ §. 48. adeoque AC $= nax : [mx+nx] = na : [m+n]$ §. 44. Quoniam porro [§. 480 *part.* 1.],

$$ay^{m+n} = bx^m(a+x)^n$$

erit $ay^{m+n} = bx^{m+n}$ (§. 43).

hoc eſt, ſi fiat brevitatis gratia $m+n=r$,

$$ay^r = bx^r$$

$$ya^{1:r} = xb^{1:r}$$

$$dya^{1:r} = dxb^{1:r}$$

$$dx:dy = a^{1:r} : b^{1:r} = AC:AE$$

Unde ob AC $= na:r$, reperitur AE $= nab^{1:r} : ra^{1:r} = na^{(r-1):r}b^{1:r}:r = (n:r)\sqrt[r]{a^{r-1}b}$,

PROBLEMA 9.

47. *Determinare ſubtangentem & ſubnormalem in Conchoide.*

Quoniam Conchois eſt curva Algebraica (§ 341. 492); ſubtangens ejus inveniri poteſt *per probl.* 4. & ſubnormalis *per probl.* 5. (§. 20 & 34). Enimvero quia ob æquationem ejus admodum prolixam expreſſio utraque non ſatis concinna prodit; ideo conſultius judicamus alia methodo utramque inveſtigari, qua & in caſibus aliis ſimilibus commode utendum.

Sit nempe AP $= x$, PM $= y$. Intelligatur pm ipſi PM infinite propinqua; erit Pp = MR $= dx$ & Rm $= dy$, unde PT $= ydx : dy$, ut ſupra *Tab.* I. *Fig.* 5.

pra (§.20). Sit porro AB = QM (§. 489. *part. 1.*) $= a$, CM $= z$ BC $= b$; erit PB $= a - x$, PC $= a + b - x$. Ut valor ipſius dx ex natura curvæ inveniatur; fiat:

$$a - x = v \qquad a + b - x = t$$

erit $-dx = dv \qquad -dx = dt$

Porro (§. 253. *Geom.*)

$$PB : MQ = PC : MC$$
$$v : a = t : z$$
$$at = zv$$
$$adt = zdv + vdz$$

Denique (§. 394. *Geom.*) $CM^2 = PC^2 + PM^2$, hoc eſt,

$$z^2 = t^2 + y^2$$
$$2zdz = 2tdt + 2ydy$$
$$zdz = tdt + ydy$$

Subſtituantur ex æquationibus duabus prioribus valores ipſorum differentialium dt & dv in duabus poſterioribus; prodibit

$$-adx = -zdx + vdz \qquad zdz = -tdx + ydy$$
$$zdx - adx = vdz \qquad dz = -tdx + ydy$$
$$\frac{zdx - adx}{v} = dz \qquad \frac{\quad}{z}$$

Quamobrem

$$\frac{zdx - adx}{v} = \frac{-tdx + ydy}{z}$$

$$z^2dx - azdx = -vtdx + vydy$$
$$z^2dx - azdx + vtdx = vydy$$
$$dx = \frac{vydy}{z^2 - az + vt}$$

Hinc PT $= ydx : dy = vy^2 : (z^2 - az + vt)$ & ſubnormalis $ydy : dx$ habetur $= (z^2 - az + vt) : v = t + (z^2 - az) : v$.

PROBLEMA 8.

48. *Determinare ſubtangentem in Spirali Archimedea & infinitis ſpiralibus aliis.* Tab. I. Fig. 6.

Sit ſemidiameter circuli AB $= a$, peripheria $= b$, arcus BD $= x$, AG $= y$. Intelligatur radius AC alteri AD infinite propinquus, & ducatur radio AG arculus EG; erit CD $= dx$ & EF $= dy$ & (§. 133. 390. *Geom.*)

$$AD : AG = DC : GE$$
$$a : y = dx : \frac{ydx}{a}$$

Quoniam EG ad AE perpendicularis (§. 36.); ducatur HA ad AG normalis, quæ eſt ſubtangens ſpiralis, & cum EA efficit rectum, ob angulum EAG infinite parvum (§. 4). Quare cum AG = FA ob infiniteſimam EF, erit (§. 253. *Geom.*)

$$FE : EG = FA \text{ ſeu } CA : AH$$
$$dy : \frac{ydx}{a} = y : \frac{y^2dx}{ady}$$

Jam

Jam pro ſpirali Archimedea (§. 523. *part.* 1.)

$$ax = by$$

$$adx = bdy$$

a

Hinc ſubtangens $AH = \frac{y^2 dx}{ady} = b$

$y^2 : a^2 = xy : a$

Pendet adeo determinatio ſubtangentis a quadratura circuli, cum pro arcu x aſſumenda ſit recta.

Pro infinitis ſpiralibus eſt (§. 524. *part.* 1.)

$$a^m x^n = b^n y^m$$

$$na^m x^{n-1} dx = mb^n y^{m-1} dy$$

$$dx = mb^n y^{m-1} dy : na^m x^{n-1}$$

$AH = y^2 dx : ady = mb^n y^{m+1} : na^{m+1} x^{n-1} = ma^m b^n x^n y : na^{m+1} x^{n-1} = mx y : na.$

COROLLARIUM

49. Quodſi ponamus arcum BC eſſe ad EC ut eſt abſciſſa curvæ algebraicæ ad ſemiordinatam; erit $BC = x$, $CD = dx$, $FC = y$, & (ducto radio AF arculo FI) $GI = FE = dy$, atque (§. 133. 390. *Geom.*).

$$AC : CD = AF : FI$$

$$a : dx = a - y : \frac{adx - ydx}{a}$$

$$FE (GI) : EG = FA : AH$$

$$dy : \frac{adx - ydx}{a} = a - y : \frac{(a-y)^2 dx}{a}$$

Quodſi ergo ex æquatione curvæ algebraicæ, quæ exprimit relationem BC ad FC, ſubſtituatur in expreſſione ſubtangentis AH valor ipſius dx, prodibit ſubtangens quæſita. Sit e. gr. relatio arcus BC ad rectam FC contenta æquatione

$$bx = y^2$$

erit $\quad bdx = 2ydy$

unde $AH = (a-y)^2 dx : a = 2y (a-y)^2 : ab.$

PROBLEMA 9.

50. *Determinare ſubtangentem* PT *in Cycloide.* *Tab. I. Fig. 7.*

Sit APB circulus genitor cycloidis AMC, KP tangens circuli. Ducatur TM, quæ cycloidem in M tangat; erit TP ſubtangens. Rectæ QM per utrumque contactus punctum P & M tranſeunti intelligatur ipſa qm parallela & infinite propinqua; demittantur perpendiculares PO & MS: agatur denique MR ipſi PT parallela. Quoniam $MS = PO$ (§. 215. *Geom.*) & angulus $MRS = PpO$, quia arculus Pp infinite exiguus, habetur pro parte rectæ pT, (§. 222. *Geom.*). Sit jam $AP = x$, $PM = y$; erit $Pp = MR = dx$, $mR = dy$. Ob parallelas M P & mR, *per conſtruct.* $MmR = TMP$ & ob parallelas MR & TP, *itidem per conſtr.* $mRM = mpT = MPT$ (§. 212. *Geom.*), conſequenter (§. 352. *Geom.*)

mR:

$$mR : RM = MP : PT$$
$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Eſt vero in cycloide $y = x$ (§. 527. *part.* 1.), conſequenter $dy = dx$ & hinc $ydx : dy$ ſeu $PT = y$. Ducta igitur recta PT, quæ circulum tangit in P, facillime quoque ducitur TM, quæ cycloidem in puncto reſpondente M tangit.

COROLLARIUM.

51. Si APB fuerit linea algebraica alia, cujus arcus AP ſint abſciſſæ tranſcendentis AMC; eodem modo determinatur ſubtangens, cum in omni caſu reperiatur $PT = ydx : dy$. Ponamus e. gr. $bx = ay$

erit $bdx = ady$

$$dx = ady : b$$

$$PT = ydx : dy = aydy : bdy = ay : b.$$

PROBLEMA 10.

52. *Determinare ſubtangentem* PT *in Logiſtica.*

Sit $AP = x$, $PM = y$, pm ipſi PM infinite propinqua & MR ad pm perpendicularis; erit $MR = Pp = dx$ & $Rm = dy$ & vi eorum, quæ in problemate 4. (§. 20) demonſtrata ſunt,

$$mR : RM = PM : PT$$
$$dy : dx = y : ydx : dy$$

Sit abſciſſa alia ipſa AP major vel minor $= v$ & ſemiordinata eidem reſpondens $= z$; erit ſubtangens $= zdv : dz$. Quoniam ex natura Logiſticæ abſciſſæ in progreſſione arithmetica progrediuntur (§. 505. *part.* 1.) erit $dx = dv$. Quoniam vero ſemiordinatæ progrediuntur in geometrica (§. *cit.*); erit

$$y : y + dy = z : z + dz$$

$$y : dy = z : dz \text{ (§. 183. } Arithm.)$$
$$dx = dv$$

$$ydx : dy = zdv : dz$$

Theorema. In Logiſtica omnes ſubtangentes ſunt inter ſe æquales, ſeu ſubtangens PT eſt conſtans.

PROBLEMA 11.

53. *Determinare ſubtangentem* MH *in quadratrice Dinoſtratis.* Tab. I. Fig. 9.

Per punctum datum M ducatur radius CN ſitque TM tangens, MK ad CM & TK ad MK perpendicularis, Cn ipſi CN & pm ipſi PM infinite propinqua, $AP = y$, $AN = x$, $CM = p$, $ANB = a$, $AC = b$; erit $MI = b - y$, $Pp = MR = dy$, $Nn = dx$. Quoniam arcus infinite parvus radio CM deſcriptus coincidit cum recta MH, erit (§. 134. 390. *Geom.*)

$$CN : Nn = CM : MH$$
$$b : dx = p : \frac{pdx}{b}$$

Porro cum TK (*per hypoth.*) & CH (§. 37) ſint ad MK perpendiculares; erit mH ipſi KT parallela (§. 241. *Geom.*), adeoque (§. 253. *Geom.*)

$$Mm : MT = MH ; MK.$$

Nnn Simi-

Similiter mR & TI, quia ad MI perpendiculares (*per hypoth.*), inter ſe parallelæ (§. 241. *Geom.*), adeoque (§. 253. *Geom.*)

$$Mm : MT = MR : MI$$

conſequenter (§. 156. *Arithm.*)

$$MR : MI = MH : MK$$

$$dy : b-y = \frac{pdx}{b} : \frac{pdx}{dy} - \frac{pydx}{bdy}$$

Eſt vero ex natura quadratricis (§. 518 *part. 1.*)

$$bx = ay$$

$$bx : a = y$$

Item, $dx = ady : b$

Subſtitutis ergo in valore ipſius MK pro dx & y valoribus modo inventis, prodit $MK = \frac{ap}{b} - \frac{abpx}{abb} = (ap-px) : b = (a-x)p : b = NB.MC : AC$ ſeu arcui radio MC deſcripto (§. 134. 390. *Geom.*). Pendet adeo conſtructio a rectificatione arcus illius, ſeu a quadratura circuli.

PROBLEMA 12.

Tab. 1. Fig. 2. 54. *Intra angulum* QTH *deſcribebere curvam deſideratam algebraicam, quæ rectam* TQ *in dato puncto* M *tangat.*

RESOLUTIO.

Demittatur ex M ad TH perpendicularis PM, erit TP ſubtangens, PM ſemiordinata curvæ quæſitæ. Sit $TP = v$, $PM = y$ erit (§. 20)

$$TP : PM = MR : mR$$

$$v : y = dx : dy$$

$$vdy = ydx$$

Quare ſi ex æquatione curvæ determinatur valor ipſius dx vel dy & in æquatione modo inventa ſubſtituatur; per communes Algebræ regulas determinantur tum abſciſſa x ſemiordinatæ PM datæ reſpondens, ut habeatur vertex curvæ A; tum lineæ rectæ, quibus datis curva datur. Quodſi vero contingat, aliquas ex his determinari non poſſe; id quidem indicio eſt, eam variis modis aſſumi poſſe, adeoque plures curvas ejusdem ſpeciei ſatisfacere propoſito.

COROLLARIUM 1.

55. Si curva AMO parabola primi generis eſſe debet; erit (§. 352. *part. 1.*)

$$ax = y^2$$

$$adx = 2ydy$$

$$dx = 2ydy : a$$

Quodſi hic valor in æquatione $vdy = ydx$ pro dx ſubſtituatur; habebimus

$$vdy = 2y^2dy : a$$

$$av = 2y^2 \text{ ſeu } a = 2y^2 : v$$

Porro ex æquatione ad parabolam $a = y^2 : x$. Quare

$$2y^2 : v = y^2 : x$$

$$y^2$$

$$2 : v$$

$$2 : v = 1 : x$$

$$2x = v$$

$$x = \frac{1}{2} v$$

Diviſa nempe TP bifariam in A, habetur vertex parabolæ A, ut jam ex ſuperioribus (§. 21) conſtat. Parametro itaque $2y^2 : v$ circa axem AH parabola deſcribenda (§. 363. *part.* 1.).

COROLLARIUM 2.

56. Si curva AMO hyperbola æquilatera; erit (§. 463. *part.* 1.)

$$ax + xx = y^2$$

$$adx + 2xdx = 2ydy$$

$$dx = 2ydy : (a + 2x)$$

Quodſi in æquatione $vdy = ydx$ pro dx ſubſtituatur valor modo inventus; prodibit

$$vdy = 2y^2dy : (a + 2x)$$

$$av + 2vx = 2y^2$$

$$av = 2y^2 - 2vx$$

$$a = 2y^2 : v - 2x$$

hoc eſt, ſi fiat $y^2 : v = m$

$$a = 2m - 2x$$

Porro ex æquatione ad hyperbolam æquilateram

$$ax + xx = y^2$$

$$a = y^2 : x - x$$

Unde $y^2 : x - x = 2m - 2x$

$$yy - xx = 2mx - 2xx$$

$$yy = 2mx - xx$$

ſeu $xx - 2mx = -yy$
$m^2 \qquad m^2$

$$x^2 - 2mx + m^2 = m^2 - yy$$

$$x - m = V(m^2 - y^2)$$
$m - x$

$$x = m \pm V(m^2 - y^2)$$

Dato itaque valore ipſius x, datur vertex hyperbolæ æquilateræ, datur etiam parameter $a = 2m - 2x$, conſequenter hyperbola deſcribi poteſt (§. 487. *part.* 1.)

COROLLARIUM 3.

57. Quoniam pro circulo $ax - x^2 = y^2$; eodem, quo ante, modo reperitur $a = 2y^2 : v + 2x$ ſeu, ſi fiat $y^2 : v = m$, $a = 2m + 2x$, & $x = V(mm + yy) - m$.

COROLLARIUM 4.

58. Si curva AMO ellipſis primi generis; erit (§. 379. *part.* 1.)

$$y^2 = bx - bx^2 : a$$

$$2ydy = bdx - 2bxdx : a$$

$$dy = (abdx - 2bxdx) : 2ay$$

Quodſi in æquatione $vdy = ydx$ ſubſtituatur valor modo inventus, prodibit

$$abv - 2bvx = 2ay^2$$

$$b = 2ay^2 : (av - 2vx)$$

Ex natura curvæ eſt

$$b = ay^2 : (ax - xx)$$

Unde $\frac{2ay^2}{av - 2vx} = \frac{ay^2}{ax - xx}$

$$2ax - 2xx = av - 2vx$$

$$-\tfrac{1}{2}av = xx + ax - vx$$

ſi fiat $a - v = m$

erit $m^2 - \tfrac{1}{2}av = xx + mx + mm$

$$V(m^2 - \tfrac{1}{2}av) = x + \tfrac{1}{2}m$$

$$V(m^2 - \tfrac{1}{2}av) - m = x$$

Quoniam ipſius a ſeu axis tranſverſi nullus valor erui poteſt; pro arbitrio aſſumi debet. Quodſi minor fuerit quam v; erit $x = \tfrac{1}{2}m + V(m^2 - \tfrac{1}{2}av)$.

CAPUT III.

DE USU CALCULI DIFFERENTIALIS IN METHODO DE MAXIMIS ET MINIMIS.

DEFINITIO 4.

59. Si ſemiordinatæ alicujus curvæ usque ad certum terminum continuo creſcunt vel decreſcunt, quem prætergreſſæ denuo decreſcunt vel creſcunt; methodus, per quam determinatur earum maxima vel minima, dicitur *methodus de maximis & minimis*.

SCHOLION

60. *Poteſt vero hæc methodus etiam ad determinandas quantitates alias, quæ ad certum aliquem terminum creſcunt vel decreſcunt, adhiberi: Sed repræſentandæ ſunt per curvarum ſemiordinatas, ut exempla inferius adducenda loquuntur.*

PROBLEMA 13.

Tab. I. Fig. 10. 11. 61. *Determinare maximam vel minimam applicatam in curva Algebraica.*

RESOLUTIO.

Quoniam in curvis maximum vel minimum habentibus tangens TM degenerat tandem in DE & axi parallelus evadit, adeoque normalis MH coincidit cum maxima vel minima applicata CG; erit in caſu maximi vel minimi ſubtangens TP infinita atque ſubnormalis PH nihilo æqualis. Eſt vero $PH = ydy : dx$. Quodſi ergo ponatur $ydy : dx = 0$; reperietur $dy = 0$ & ob $PT = ydx : dy = \infty$ (quæ eſt nota infinitatis) $dx = \infty$.

Fieri poteſt, ut tangens HG in directum jaceat ſemiordinatæ GC: quo in caſu ſubtangens PT nihilo æquatur & ſubnormalis PH fit infinita. Eſt vero $PT = ydx : dy = 0$ (§. 10.) quare ſi ponatur $ydx : dy = 0$ Tab. I. Fig. 12.

habe-

habebimus $dx = o$. Vel ob PH $= ydy : dx = \infty$ reperitur $dy = \infty$. Sunt nimirum tam dx, quam y intuitu dy infiniteſimæ.

Ex æquatione itaque curvæ quærendus eſt valor ipſius dy, & vel nihilo, vel infinito æquandus, ut habeatur valor abſciſſæ, cui maxima applicata coordinatur.

COROLLARIUM 1.

62 Quoniam in circulo (§.341 part. I.)

$$ax - xx = y^2$$

erit
$$adx - 2xdx = 2ydy$$

$$(adx - 2xdx) : 2y = dy = o$$

$$a - 2x = o$$

$$a = 2x$$

$$\tfrac{1}{2}a = x$$

Nempe maxima ſemiordinata in circulo erigitur ex centro, uti ex elementis conſtat (§.284. *Geom.*).

Quodſi porro valor ipſius x in æquatione $ax - xx = y^2$ ſubſtituatur; prodibit $\tfrac{1}{2}aa - \tfrac{1}{4}aa = yy$, hoc eſt, $\tfrac{1}{4}aa = yy$. Unde $\tfrac{1}{2}a = y$: id quod denuo ex elementis manifeſtum eſt.

Quodſi ponamus $2ydy : (a - 2x) = dx = \infty$; erit $a - 2x$ reſpectu numeratoris $2ydy$ infinite parva, adeoque (§.3) $a - 2x = o$, ut ante.

COROLLARIUM 2.

63. Pro infinitis circulis (§. 24.)

$$max^{m-1}dx - (m-1)x^m dx = (m+1)y^m dy = o$$

$$max^{m-1} = (m-1)x^m$$

$$ma : (m-1) = x$$

E. gr. ſit $m = 3$ ſeu æquatio ad circulum tertii generis $y^4 = ax^3 - x^4$; erit $x = \tfrac{3}{2}a$, conſequenter $y^4 = \tfrac{27}{8}a^4 - \tfrac{81}{16}a^4 = \tfrac{24}{16}a^4 - \tfrac{81}{16}a^4 = \tfrac{13}{16}a^4$. Unde $y = \tfrac{1}{2}a \sqrt[4]{13}$.

COROLLARIUM 3.

64. Pro ellipſibus infinitis (§.26.)

$$(m+n)ay^{m+n-1}dy = mbx^{m-1}(a-x)^n dx - nbx^m(a-x)^{n-1}dx = o$$

$$mbx^{m-1}(a-x)^n = nbx^m(a-x)^{n-1}$$

$$ma - mx = nx$$

$$ma = mx + nx$$

$$ma : (m+n) = x.$$

Sit e. gr. ellipſis primi generis; erit $m = 1$ & $n = 1$, adeoque $x = \tfrac{1}{2}a$, & ob $y^2 = bx - bxx : a$ (§.379. part. I), $y^2 = \tfrac{1}{2}ab - \tfrac{1}{4}ab = \tfrac{1}{4}ab$. Unde $y = \sqrt{\tfrac{1}{4}ab}$.

COROLLARIUM 4.

65. Si $x^3 + y^3 = axy$

erit
$$3x^2dx + 3y^2dy = axdy + aydx$$

$$3x^2dx - aydx = axdy - 3y^2dy = o$$

$$3x^2 = ay$$

$$3x^2 : a = y$$
$$27x^6 : a^3 = x^3$$

$$x^3 + 27x^6 : a^3 = 3y^3$$

$$27x^6 = 2a^3x^3$$

$$27x^3 = 2a^3$$

$$3x = a\sqrt[3]{2}$$

$$x = \tfrac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$$

COROLLARIUM 5.

66. Sit $y - a = a^{1:3}(a-x)^{2:3}$

erit $dy = -2a^{1:3}dx : 3(a-x)^{1:3}$

Quodſi hic valor ipſius dy ponatur nihilo æqualis; erit $-2a^{1:3} = 0$. Quamobrem cum nullus valor ipſius x inde eruatur; ponatur

$$-2a^{1:3} : 3(a-x)^{1:3} = \infty$$

erit ob denominatorem reſpectu numeratoris infinite parvum (§. 3)

$$3(a-x)^{1:3} = 0$$

$$a - x = 0$$

$$a = x$$

Unde, ob $a-x=0$, $y = a + \sqrt[3]{a}$

PROBLEMA 14.

Tab. I. Fig. 13. 67. *Ex dato puncto* R *in axe* AX *curvæ algebraicæ ducere ad perimetrum curvæ rectam* MR, *quæ ſit minima omnium ex eodem puncto* R *ducendarum.*

RESOLUTIO.

Sit AP=x, PM=y, AR=c; erit PR=c-x & ob $PM^2 + PR^2 = MR^2$ (§. 394. *Geom.*). $MR^2 = c^2 - 2cx + x^2 + y^2$. Concipiamus ergo curvam, cujus applicata ſit MR (§. 60); erit

$$c^2 - 2cx + x^2 + y^2 = z^2$$

$$-2cdx + 2xdx + 2ydy = 2zdz = 0$$

$$ydy + xdx - cdx = 0.$$

Quodſi ex æquatione ad curvam algebraicam data pro ydy ſubſtituatur valor ejus; valorem ipſius x eruere licet.

COROLLARIUM 1.

68. In parabola (§. 21.)

$$\tfrac{1}{2}adx = ydy$$

Ergo $\tfrac{1}{2}adx + xdx - cdx = 0$

$$x = c - \tfrac{1}{2}a \quad \& \quad \tfrac{1}{2}a = c - x$$

Hinc $ax = ac - \tfrac{1}{2}aa = y^2$ & $[c-x]^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}aa + ac - \tfrac{1}{2}aa = ac - \tfrac{1}{4}aa = z^2$. Unde $MR = z = \sqrt{[ac - \tfrac{1}{4}aa]}$. Eſt adeo $MR^2 : PM^2 = ac - \tfrac{1}{4}aa : ac - \tfrac{1}{2}aa = c - \tfrac{1}{4}a : c - \tfrac{1}{2}a$.

COROLLARIUM 2.

69. In hyperbola æquilatera [§. 463 *part.* 1.]

$$ax + xx = y^2$$

$$adx + 2xdx = 2ydy$$

$\frac{1}{2}adx + xdx = ydy$

Quare $\frac{1}{2}adx + xdx + xdx - cdx = 0$ (§. 67)

$$2x = c - \tfrac{1}{2}a$$

$$x = \tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{4}a$$

COROLLARIUM. 3.

70. In ellipſi primi generis eſt [§. 397. *part.* 1.] $ay^2 = abx - 2bx^2$

$$2aydy = abdx - 2bxdx$$

$$ydy = [abdx - 2bxdx] : 2a$$

Quare $\frac{1}{2}bdx - bxdx : a + xdx - cdx = 0$

$$\tfrac{1}{2}b - c - bx : a + x = 0$$

$$x - \frac{bx}{a} = c - \tfrac{1}{2}b$$

$$ax - bx = ac - \tfrac{1}{2}ab$$

$$x = [ac - \tfrac{1}{2}ab] : [a-b]$$

COROLLARIUM. 4.

71. Eodem modo in hyperbola ſcalena reperitur $x = [ac - \frac{1}{2}ab] : [a+b]$.

PROBLEMA 15.

Tab. I. Fig. 14. 72. *A puncto C extra curvam algebraicam dato ducere rectam CM, quæ ſit minima omnium ex eodem puncto C ad curvam ducendarum.*

RESOLUTIO.

Ob punctum C datum datur quoque perpendicularis ad axem CD, itemque AD. Sit $AD = p$, $CD = q$, $AP = x$, $PM = y$; erit $MH = AP - AD = x - p$ & $CH = CD - PM = q - y$, conſequenter $MC^2 = CH^2 + HM^2 = q^2 - 2qy + yy + x^2 - 2px + pp$. Cum adeo MC^2 ſit minimum quoddam; erit ejus differentiale nihilo æquale [§. 63.], hoc eſt, $-2qdy + 2ydy + 2xdx - 2pdx = 0$

ſeu $[y-q]dy + [x-p]dx = 0$.

Reliqua peragenda ſunt ut in problemate præcedente [§. 67].

COROLLARIUM.

73. Si curva AMO fuerit parabola primi generis; erit

$$ax = y^2$$

$$adx = 2ydy$$

$$dx = 2ydy : a$$

Unde $[y-q] + [x-p]2y : a = 0$

$$ay - aq + 2xy - 2py = 0$$

$$ay - aq + 2y^3 : a - 2py = 0$$

$$aay - aaq + 2y^3 - 2py = 0$$

h. eſt, $y^3 + \frac{1}{2}a^2y - \frac{1}{2}aaq = 0$
$\quad - apy$

Quodſi hæc æquatio ope parabolæ datæ atq; circuli conſtruatur (§. 578. *part.* 1.); una eademq; opera determinantur & AP & PM, & punctum M. Nimirum (*vi* §. *cit.* (fieri debet $AL = \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}p = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}p$ & $IL = \frac{1}{4}q$, atque centro C per verti-

verticem parabolæ A deſcribendus eſt circulus, qui eam in puncto deſiderato M ſecabit. Erit autem $AL = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}p$; ſi ex A in G transferatur $\frac{1}{2}a$ & DG bifariam ſecetur in L. Nam $DG = \frac{1}{2}a - p$. Ergo $DL = \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}p$, conſequenter $AL = \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}p + p = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}p$.

SCHOLION.

74. *Ex allato exemplo liquet, ſi problema non fuerit planum, conſultius eſſe ut in expreſſione generali valor potius ipſius* dx, *quam* dy *ſubſtituatur. Nec abſimili modo in curvis algebraicis determinatur punctum intra earum ambitum datum, a quo ad earum perimetros ducantur rectæ minimæ.*

PROBLEMA 16.

Tab. II. Fig. 15. 75. *Lineam rectam* AB *ita ſecare in* D, *ut rectangulum ex* AD *&* DB *ſit maximum eorum, quæ hac ratione conſtrui poſſunt.*

Sit $AB = a$, $AD = x$, erit $DB = a - x$, conſequenter $AD.DB = ax - xx$ maximum aliquod, atque hinc [§. 61.] ejus differentiale nihilo æquale; concipitur nempe eſſe ad circulum, ad quem

$$ax - xx = yy.$$

Quare
$$adx - 2xdx = 2ydy = 0$$

$$a - 2x = 0$$

$$\frac{1}{2}a = x$$

Linea igitur AB eſt ſecanda in duas partes æquales, eſtque quadratum omnium rectangulorum maximum, quorum altitudines & baſes junctim ſumtæ inter ſe æquantur.

PROBLEMA 17.

76. *Lineam rectam* AB *ita ſecare in* D, *ut* $AD^m.ADB^n$ *ſit maximum factorum ſimili modo formatorum.*

Sit denuo $AB = a$, $AD = x$, erit $DB = a - x$, conſequenter $AD^m.DB^n = x^m[a-x]^n$. Erit igitur x abſciſſa reſpondens ſemiordinatæ maximæ in infinitis circulis, ad quos $x^m[a-x]^n = y^{m+n}$ [§. 473. *part.* I.] & hinc [§. 61]

$$mx^{m-1}(a-x)^n dx - nx^m(a-x)^{n-1}dx = 0$$

$$mx^{m-1}(a-x)^n = nx^m(a-x)^{n-1}$$

$$m[a-x] = nx$$

$$ma = mx + nx$$

$$ma : (m+n) = x$$

Sit e. gr. $m = 2$, $n = 1$, erit $x = \frac{2}{3}a$, hoc eſt, ſi recta $AD = \frac{1}{3}a$ & $BD = \frac{2}{3}a$, atque BD ſumatur pro altitudine priſmatis; AD pro latere quadrati, quod eſt baſis ejusdem; erit priſma omnium maximum eorum, quæ ex diviſione rectæ AB in duas partes formari poſſunt.

PROBLEMA 18.

77. *Super recta* AB *tanquam hypothenuſa triangulum rectangulum maximum conſtruere.*

Sit

Tab. II. Fig. 16. Sit AB $= a$, AC $= x$, erit (§. 394. *Geom.*) BC $= V(aa-xx)$, area (§. 375. *Geom.*) $= \frac{1}{2}$ AC.CB $= \frac{1}{2}x\, V(aa-xx)$. Habemus adeo æquationem ad curvam quarti generis

$$xV(aa-xx) = 2y^2$$

ſeu $$aaxx-x^4 = 4y^4$$

Unde $$2a^2xdx-4x^2dx = 16y^3dy = 0$$

$$2a^2x = 4x^2$$

$$\frac{1}{2}a^2 = x$$

Patet adeo triangulum maximum eſſe æqui crurum. Nam ſi AB^2 $= aa$ & AC^2 $= \frac{1}{2}aa$, erit etiam CB$^2 = \frac{1}{2}aa$, conſequenter AC $=$ CB.

PROBLEMA 19.

78. *Inter omnes Conos æquales determinare eum, qui maximam habet ſuperficiem.*

Sit ſoliditas conorum æqualium a^3, ratio radii ad peripheriam $r:p$, radius Coni AC $= x$; erit $r:p = x:\frac{px}{r}$. Hæc peripheria baſis $px:r$ ducta in $\frac{1}{2}x$, dat baſin Coni $px^2:2r$ (§. 406. *Geom.*): per quam ſi dividatur a^3, habetur $\frac{1}{3}$ DC $= 2a^3r:px^2$ (§. 487. *Geom.*) unde DC $= 6a^3r:px^2$ &

$$DC^2 = 36a^6r^2:p^2x^4$$
$$AC^2 = x^2$$

$$AD^2 = x^2 + 36a^6r^2:p^2x^4 \text{ (§. 394. Geom.)}$$

$$AD = V(p^2x^6 + 36a^6r^2):px^2$$
$$\frac{px}{2r}$$

Superf. Coni $V(p^2x^6+36a^6r^2):2rx$ (§. 487. *Geom.*)

Habemus itaque vi methodi de maximis & minimis (§. 61.)

$$(p^2x^6+36a^6r^2):4r^2x^2 = y^2$$

h. e. $$p^2x^4:4r^2+9a^6:x^2 = y^2$$

$$4p^2x^3dx:4r^2 - 18a^6xdx:x^4 = 2y\,dy = 0$$

$$p^2x^3dx:r^2 - 18a^6dx:x^3 = 0$$

$$p^2x^3:r^2 = 18a^6:x^3$$

$$p^2x^6 = 18a^6r^2$$

$$px^3 = 3a^3rV2$$

$$x^3 = 3a^3rV2:p$$

$$x = a\,\overset{3}{V}(3rV2:p)$$

Aut quoniam px^3 reſolvitur in factores x^3, p & 1, contra $3a^3\,r\,V2$ in a^3, r & $3V2$; evidens eſt hoc

Theorema: Cubus radii Coni inter æquales maximam ſuperficiem habentis eſt ad cubum Cono æqualem in ratione compoſita radii ad peripheriam & $3V2$ ad 1.

SECTIO II. DE CALCULO INTEGRALI SEU SUMMATORIO.

CAPUT I.

DE NATURA CALCULI INTEGRALIS.

DEFINITIO 5.

79. *Calculus integralis* eſt methodus quantitates differentiales ſummandi, hoc eſt, ex quantitate differentiali data inveniendi eam, *ex* cujus differentiatione reſultat differentiale datum.

COROLLARIUM.

80. Integrationis itaque ſeu ſummationis rite peractæ indicium eſt, ſi quantitas inventa juxta regulas Cap. I. Sect. I. traditas differentiata eam producit, quæ ad ſummandum proponebatur.

SCHOLION.

81. *Quoniam Angli differentialia quantitatum fluxiones vocant* (§. 6.) ; *Calculum differentialem, qui a differentiis ad ſummas, ſeu, ut cum Anglis loquar, a fluxionibus ad quantitates fluentes (ita nimirum variabiles dicunt) aſcendit,* Methodum fluxionum inverſam *appellant.*

HYPOTHESIS.

82. *Signum ſummæ aut quantitatis integralis ſit* ſ, *ita ut* ſ y dx *denotet ſummam ſeu integrale differentialis.* y dx.

PROBLEMA 20.

83. *Quantitatem differentialem integrare ſeu ſummare.*

RESOLUTIO.

Ex ſuperioribus manifeſtum eſt, quod ſit

I. $\int dx = x$ (§. 14).

II. $\int (dx \mp dy) = x \mp y$ (§. 11).

III. $\int (xdy + ydx) = xy$ (§. 12).

IV. $\int (mx^{m-1}dx = x^m$ (§. 13).

V. $\int (n:m)x^{(n-m):m}dx = x^{n:m}$ (§. 17)

VI. $\int (ydx - xdy):y^2 = x:y$ (§. 19).

Ex his caſus quartus & quintus frequentius occurrunt, in quibus quantitas differentialis ſummatur, ſi exponenti variabilis unitas additur, & ea, quæ prodit, dividitur per novum exponentem ductum in differentiale radicis e. gr. in caſu quarto per $(m-1+1)dx$, hoc eſt, per mdx.

Quodſi quantitas differentialis ad ſummandum propoſita nulli illarum formularum ſimilis; aut reducen-

ducenda eſt ad ſummabilem finitam, aut ad ſeriem infinitam, cujus ſinguli termini ſummari poſſunt: quam utramque reductionem exemplis potius, quam regulis docemus, ne calculi tyronibus nauſeam moveamus.

SCHOLION.

84. *Quemadmodum in analyſi finitorum qualibet quantitas ad quemcunque dignitatis gradum evehi, ſed non vice verſa ex qualibet radix extrahi poteſt deſiderata; ita ſimiliter in analyſi infiniteſimali quantitas qualibet variabilis aut ex variabilibus & conſtantibus quomodocunque compoſita haud difficulter differentiatur, ſed non vice verſa quodlibet differentiale integrari poteſt. Quemadmodum autem porro in analyſi finitorum non ex omnibus æquationibus radices extrahendi methodus hactenus inventa, neque enim ætas noſtra tranſcendit limites ultra ſeculum & quod excurrit Algebræ jam aſſignatos: ita ſimiliter in analyſi infinitorum calculus integralis ſuam perfectionem nondum eſt aſſecutus. Sicuti autem in analyſi finitorum ad methodos extrahendi radicem per approximationem recurrimus, ubi perfectam extrahere non datur; ita ſimiliter in analyſi infinitorum ad ſeries infinitas confugimus, ubi perfectam ſummationem dare non valemus.*

CAPUT II.

DE USU CALCULI INTEGRALIS IN QVADRATVRIS CURVARUM.

Tab. I. Fig. 2.

DEFINITIO 6.

85. **D***ifferentiale ſeu elementum areæ dicitur rectangulum* PMRP *ex ſemiordinata* PM *in differentiale abſciſſæ* Pp.

COROLLARIUM 1.

86. Si ergo ſemiordinata PM $= y$, abſciſſa AP $= x$, erit Pp $=$ MR $= dx$, conſequenter Elementum areæ PM. MR $= ydx$.

COROLLARIUM 2.

87. Quoniam mR $= dy$ & MR $= dx$; erit $\triangle$ MRm $= \frac{1}{2} dxdy$ (§. 375. *Geom.*). Sed $\frac{1}{2} dxdy$ eſt ipſius ydx infiniteſima (§. 12.), conſequenter trapezium PMmp æquale eſt rectangulo PM Rp in præſente nimirum caſu, ubi pm ipſi PM infinite propinqua intelligitur, (§. 4.). Quare cum area AMP in infinita iſtiusmodi trapezia reſolvi poſſit; erit ea $\int ydx$ (§. 79. 82).

COROLLARIUM 3.

88. Quodſi itaque ex æquatione ad curvam datam ſubſtituatur valor ipſius y, & ydx integrabile evadat; integratione peracta habetur quadratura curvæ. Curvam igitur quadrare idem eſt ac ſummare ydx.

PROBLEMA 11.

89. *Invenire aream trianguli.*

 Sit

Tab. II. Fig. 18. Sit CP $=x$, MN $=y$, CD $=a$, AB $=b$; erit ob MN ipſi AB parallelam, (§. 253. 378. *Geom.*)

$$CP : MN = CD : AB$$
$$x : y = a : b$$
$$y = bx : a$$

Ergo elementum MN*mn* $= ydx$ (§. 86) $= bxdx : a$. Unde habetur $\int ydx = bx^2 : 2a$ (§. *cit.*): quæ eſt area indefinita CMN. Quodſi pro CP ſeu x ſubſtituatur CD ſeu a; prodibit area totius trianguli ACB $= ba^2 : 2a = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}$ AB.CD, prorſus ut in elementis Geometriæ (§. 375) demonſtratum.

SCHOLION

90. *Hoc exemplum ideo attulimus, ut tyrones, quibus principia calculi ſummatorii ſub initium duriora videntur, intelligant, per eum non alia reperiri, niſi quæ demonſtrationibus rigidis firmantur; tum ut methodi applicationem in exemplo obvio facilius perſpiciant.*

PROBLEMA 22.

91. *Parabolam quadrare.*

Pro Parabola Apolloniana (§. 351)

$$ax = y^2$$
$$a^{1:2}x^{1:2} = y$$
$$ydx = a^{1:2}x^{1:2}dx$$
$$\int ydx = \tfrac{2}{3}a^{1:2}x^{3:2} = \tfrac{2}{3}\sqrt{ax^3} = \tfrac{2}{3}\sqrt{x^2y^2} = \tfrac{2}{3}xy.$$

COROLLARIUM

92. Eſt ergo ſpatium parabolicum ad rectangulum ex ſemiordinata in abſciſſam ut $\frac{2}{3}xy$ ad xy, hoc eſt, ut 2 ad 3 (§. 104 *part.* 1.).

PROBLEMA 23.

93. *Infinitas parabolas quadrare.*

Pro infinitis parabolis & curvis agnatis (§.)

$$a^n x^m = y^r$$
$$a^{n:r}x^{m:r} = y$$
$$ydx = a^{n:r}x^{m:r}dx$$
$$\int ydx = \frac{r}{m+r}a^{n:r}x^{m+r:r} = \frac{r}{m+r}xy,$$

ob $a^{n:r}x^{m:r} = y$.

COROLLARIUM.

94. Spatium parabolicum aut paraboloidicum quodcunque eſt ad rectangulum ex ſemiordinata in abſciſſam, ut $rxy : (m+r)$ ad xy, hoc eſt, ut r ad $m+r$ (§. 104 *part.* 1.).

PROBLEMA 24.

95. *Quadrare ſegmentum ſpatii parabolici* PMNQ *inter duas ſemiordinatas* PM & QN *interceptum.* Tab. II. Fig. 19.

I. Sit AP conſtans & $=b$, origo ipſius x in P & hinc PQ $=x$, QN $=y$, AQ $=b+x$. Sit porro parameter $=a$; erit (§. 351)

$$ab + ax = y^2$$
$$\sqrt{(ab+ax)} = y$$
$$ydx = dx\sqrt{(ab+ax)}$$

Ut hoc

Ut hoc elementum integrabile reddatur; fiat

$$V(ab+ax)=v$$

erit $ab+ax=v^2$

$$adx=2vdv$$

$$dx=2vdv:a$$

$$ydx=2v^2dv:a$$

$\int ydx=\frac{2}{3}v^3:a=\frac{2}{3}(ab+ax)V(ab+ax):a=\frac{2}{3}(b+x)V(ab+ax)$.

Quoniam in P $x=0$, & ſpatium quoque QNMP evaneſcit; ſi in integrali inventa ponatur $x=0$, quod relinquitur $\frac{2}{3}bVab$, oſtendit quid ei adjiciendum, ut ſpatium QNMP nihilum evadat in P, conſequenter ut integrale fiat quadratura ipſius QNMP. Habemus nempe in noſtro caſu ſubtrahendum $\frac{2}{3}bVab$: unde ipſius QNMP area $=\frac{2}{3}(b+x)V(ab+ax)-\frac{2}{3}bVab$.

II. Sit AQ conſtans, & $=b$, origo ipſius x in Q, erit QP $=x$, PM $=y$, AP $=b-x$ & (§. 351)

$$ab-ax=y^2$$

$$V(ab-ax)=y$$

$$ydx=dxV(ab-ax)$$

Fiat ut ante $ab-ax=v^2$

erit $-adx=2vdv$

$$dx=-2vdv:a$$

$$ydx=-2v^2dv:a$$

$\int xdx=-\frac{2}{3}v^3:a=-\frac{2}{3}(b-x)V(ab-ax)=\frac{2}{3}V(x-b)V(ab-ax)$.

Ut intelligatur, quid integrali ſit adjiciendum, quo ſpatii PMNQ menſuram conſtituat; ponatur ut ante $x=0$, relinquetur $-\frac{2}{3}bVab$. Unde manifeſtum eſt, ſi illi adjiciatur $+\frac{2}{3}bVab$ haberi ſpatium PMNQ $=\frac{2}{3}bVab+\frac{2}{3}(x-b)V(ab-ax)$.

SCHOLION.

96. *Spatium* PMNQ *eſſe in caſu priore* $\frac{2}{3}(b+x)V(ab+ax)-\frac{2}{3}Vab$, *in poſteriore* $\frac{2}{3}Vab+\frac{2}{3}(x-b)V(ab-ax)$, *etiam ex problemate* 22. (§. 91) *manifeſtum eſt. Nimirum* PMNQ $=$ ANQ-AMP. *Sed in caſu priore* AMQ $=\frac{2}{3}$ AQ.QN $=\frac{2}{3}(b+x)V(ab+ax)$, & AMP $=\frac{2}{3}$ AP.PM $=\frac{2}{3}bVab$. *Unde* PMNQ $=\frac{2}{3}(b+x)V(ab+ax)-\frac{2}{3}bVab$. *In poſteriore* ANQ $=\frac{2}{3}$ AQ.QN $=\frac{2}{3}bVab$ & AMP $=\frac{2}{3}$ AP.PM $=\frac{2}{3}(b-x)V(ab-ax)$. *Unde* QNMP $=\frac{2}{3}bVab+\frac{2}{3}(x-b)V(ab-ax)$.

COROLLARIUM

97. Quodſi adeo curva non ſupponatur deſcripta, ſed tantum æquatio ad eam detur, ut adeo non conſtet, ubi origo ipſius x ſit ſtatuenda; evidens eſt, ex reſolutione problematis præſentis, quod in integrali poni debeat $x=0$ & deletis iis, quæ per x multiplicantur, reſiduum,

ſi quod fuerit ſub ſigno contrario ipſi ſit adjiciendum, ut habeatur quadratura quæſita.

PROBLEMA 25.

98. *Quadrare curvam, ad quam* $xy^3 = a^4$. Quoniam

$$y = a^{4:3}x^{-1:3}$$

erit $ydx = a^{4:3}x^{-1:3}dx$

$$\int ydx = \tfrac{3}{2}a^{4:3}x^{2:3} = \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{a^4x^2} = \tfrac{3}{2}a\sqrt[3]{ax^2}.$$

PROBLEMA 26.

99. *Quadrare curvam* Carteſii (d), *ad quam* $b^2 : x^2 = b-x : y$.

Quoniam $b^2y = bx^2 - x^3$

erit $y = (bx^2 - x^3):b^2$

$$ydx = (bx^2dx - x^3dx):b^2$$

$$\int ydx = x^3:3b - x^4:4b^2$$

PROBLEMA 27.

100. *Quadrare curvam, ad quam* $x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^5 = a^4y$.

Quoniam $y = x^5:a^4 + x^4:a^3 + x^3:a^2 + x^2:a + a$

erit $ydx = \left(\frac{x^5}{a^4} + \frac{x^4}{a^3} + \frac{x^3}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} + a\right)dx$

$$\int ydy = \frac{x^6}{6a^4} + \frac{x^5}{5a^3} + \frac{x^4}{4a^2} + \frac{x^3}{3a} + ax$$

PROBLEMA 28.

101. *Quadrare curvam, ad quam* $y^2 = x^4 + a^2x^2$.

Quoniam $y = x\sqrt{(x^2+a^2)}$

erit $ydx = xdx\sqrt{(x^2+a^2)}$

ut elementum integrabile reddatur, fiat

$$\sqrt{(x^2+a^2)} = v$$

$$x^2 + a^2 = v^2$$

erit $2xdx = 2vdv$

$$xdx = vdv$$

$$xdx\sqrt{(a^2+x^2)} = v^2dv$$

$\int ydx = \frac{1}{3}v^3 = \frac{1}{3}(x^2+a^2)\sqrt{(x^2+a^2)}$. Ponatur $x = 0$, erit reſiduum $\frac{1}{3}a^2\sqrt{a^2}$ ſive $\frac{1}{3}a^3$. Ergo quadratura curvæ $\frac{1}{3}(x^2+a^2)\sqrt{(x^2+a^2)} - \frac{1}{3}a^3$ (§. 97).

PROBLEMA 29.

102. *Quadrare curvam, ad quam* $y^2 = x^3 + ax^2$.

Quoniam $y = x\sqrt{(x+a)}$

erit $ydx = xdx\sqrt{(x+a)}$

ut elementum integrabile evadat, fiat

$$\sqrt{(x+a)} = v$$

erit $x + a = v^2$ & $x = v^2 - a$

$$dx = 2vdv$$

ydx

(d) Epiſt. Tom. 3. p. 219.

$$ydx = 2v^4dv - 2av^2dv$$

$\int ydx = \frac{2}{5}v^5 - \frac{2}{3}av^3 = \frac{2}{5}(x+a)^2 \sqrt{(x+a)} - \frac{2}{3}a(x+a)\sqrt{(x+a)} = \frac{6}{15}[(x^2+2ax+aa) - \frac{10}{15}(ax+aa)]\sqrt{(x+a)} = (6x^2+2ax-4aa)\sqrt{(x+a)}:15$. Ponatur $x=0$; relinquetur $-\frac{4}{15}aa\sqrt{a}$. Area igitur curvæ $\frac{1}{15}\sqrt{(x+a)}(6x^2+2ax-4aa)+\frac{4}{15}aa\sqrt{a}$ (§. 97).

PROBLEMA 30.

103. *Quadrare curvam, ad quam* $y^2 = x^2:(x+a)$.

Quoniam $y = x:\sqrt{(x+a)}$

erit $ydx = xdx:\sqrt{(x+a)}$

Ponatur $\sqrt{(x+a)} = v$

erit $x+a = v^2$

$$x = v^2 - a$$

$$dx = 2vdv$$

$xdx:\sqrt{(x+a)} = (2v^3dv - 2avdv):v = 2v^2dv - 2adv$

$\int ydx = \frac{2}{3}v^3 - 2av = \frac{2}{3}(x+a)\sqrt{(x+a)} - 2a\sqrt{(x+a)} = (2x+2a-6a)\frac{1}{3}\sqrt{(x+a)} = (2x-4a)\frac{1}{3}\sqrt{(x+a)} = \frac{2}{3}\sqrt{(x^3-3ax^2+4a^3)}$.

Ponatur $x=0$; relinquetur $\frac{2}{3}\sqrt{4a^3} = \frac{4}{3}a\sqrt{a}$. Area igitur curvæ $\frac{2}{3}\sqrt{(x^3-3ax^2+4a^3)} - \frac{4}{3}a\sqrt{a}$ (§. 97.).

PROBLEMA 31.

104 *Quadrare omnes curvas quæ comprehenduntur ſub æquatione generali* $y = x\sqrt[m]{(x+a)}$.

Quoniam $y = x(x+a)^{1:m}$

erit $ydx = dx(x+a)^{1:m}$

ut elementum integrabile fiat, ponatur $(x+a)^{1:m} = v$

erit $x+a = v^m$

$$dx = mv^{m-1}dv$$

$$ydx = mv^m dv$$

$\int ydx = \frac{mv^{m+1}}{m+1} = \frac{m}{m+1}(x+a)\sqrt[m]{(x+a)}$. Fiat $x=0$; erit reſiduum $\frac{m}{m+1}a\sqrt[m]{a}$. Unde area curvæ $\frac{m}{m+1}(x+a)\sqrt[m]{(x+a)} - \frac{m}{m+1}a\sqrt[m]{a}$ (§. 97).

PROBLEMA 32.

105. *Quadrare omnes curvas, quæ definiuntur hac æquatione generali* $y = ax^m : \sqrt{(b+cx^{m+1})}$.

Elementum harum curvarum $ydx = ax^m dx:\sqrt{(b+cx^{m+1})}$ ut integrabile reddatur, fiat

$\sqrt{(b+cx^{m+1})} = v$

erit $b+cx^{m+1} = v^2$

$$(m+1)cx^m dx = 2vdv$$

$$x^m dx = 2vdv:c(m+1)$$

$$ydx = 2adv:(m+1)c$$

$\int ydx = 2av:(m+1)c = 2a\sqrt{(b+cx^{m+1})}:(m+1)c$.

PRO-

PROBLEMA 33.

106. *Quadrare innumeras hyperbolas intra aſymptotos.*

Pro infinitis hyperbolis intra aſymptotos.

$$a^{m+n} = y^m x^n$$

$$a^{m+n} x^{-n} = y^m$$

$$a^{m+n,:n} x^{-n:m} = y$$

$$ydx = a^{m+n,:n} x^{-n:m} dx$$

$$\int dx = \frac{m}{m-n} a^{m+n,:m} x^{-n+m,:m} = \frac{m}{m-n} \sqrt[m]{}$$

$$a^{m+n} x^{m-n} = \frac{m}{m-n} \sqrt[m]{y^m x^m} = \frac{m}{m-n} xy.$$

Tab. I. Fig. 4. Si $m > n$; ſpatii interminati RMPS quadratura ſemper habetur: ſi $m < n$, ob valorem negativum reperitur quadratura ſpatii IMPK: ſi vero $m = n$, ſpatium neutrum quadratur. Sit enim $xy^2 = a^3$; erit $m = 2$, $n = 1$, adeoque RMPS $= \sqrt{a^3 x} = \sqrt{x^2 y^2} = xy$. Si $xy^4 = a^5$; erit $m = 4$, $n = 1$, adeoque RMPS $= \frac{4}{3} xy$. Si $x^2 y = a^3$; theorema dat $a^3 : x = -xy$ ſeu xy pro ſpatio interminato IMPK. Si $x^4 y = a^5$; habetur $m = 1$, $n = 4$ adeoque $-\frac{1}{3} xy$, hoc eſt $\frac{1}{3} xy =$ IMPK. Sed ſi $xy = a^2$; erit $m = 1$, $n = 1$, adeoque $m : (m-n) = \frac{1}{0}$: eſt adeo numerator reſpectu denominatoris infinitus.

SCHOLION.

107. Johannes Wallisius (e) *ſpatium* SAPMR *eo in caſu, ubi valor negativus, vocavit* plusquam infinitum: *oſtendit vero celeberrimus* Varignonius (f), *virum cæteroquin magno ſuo merito celebrem aliquid humani paſſum eſſe, conſentiente ſummo* Leibnitio (g).

PROBLEMA 34.

108. *Hyperbolam Apollonianam intra aſymptotos quadrare.*

Quoniam ad hyperbolam intra aſymptotos (§. 448 *part.* 1.) $a^2 = by + xy$, ſeu, ſi fiat $a = b = 1$ (quod ponere licet, cum quantitatis b determinatio ſit arbitraria, *vi* §. *cit.*)

$$1 = y + xy$$

erit $1 : (1+x) = y$

hoc eſt, diviſione actu facta, (§. 43. *part.* 1.)

$$y = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 \text{ \&c.}$$

$$ydx = dx - xdx + x^2 dx - x^3 dx + x^4 dx - x^5 dx + x^6 dx \text{ \&c. in infinit.}$$

$$\int ydx = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{6}x^6 + \tfrac{1}{7}x^7 \text{ \&c. in infinit.}$$

SCHO-

(e) in Arithmet. infinit. Schol. prop. 101. fol. 407. & Prop. 104. fol. 409.

(f) Memoires de l' Academie Royale des Sciences A. 1706. p. m. 15.

(g) in Actis Eruditorum A. 1712. p. 167. & ſeqq.

SCHOLION

109. *Hanc quadraturam hyperbolæ primus dedit ſerierum infinitarum inventor* Nicolaus Mercator *Holſatus* (h). *Cum autem ſeriem quæſiviſſet per diviſionem; celeberrimi Geometræ* Leibnitius *atque* Nevvtonus (i) *methodum hanc ſerierum infinitarum promoverunt, hic quidem eas eliciens per radicum extractiones, ille autem ex ſerie quadam præſuppoſita. Utriusque exempla in ſequentibus occurrunt.*

PROBLEMA 35.

110. *Circulum quadrare.*

Sit $AB = 1$, $AP = x$, $PM = y$; erit (§. 341. *part.* 1.)

$$y = \sqrt{(x - xx)}$$

$$ydx = dx\sqrt{(x-xx)} = dx(x-xx)^{1:2}$$

Ut elementum integrabile reddatur, ex x-xx extrahatur radix per theorema generale (§. 82. *part.* 1.), in quo erit

$m = 1, n = 2, P = x, Q = -xx:x = -x$

$P^{m:n} = x^{1:2} = A$

$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2}x^{1:2} . -x = -\frac{1}{2}x^{3:2} = B$

$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{1}{4} . -\frac{1}{2}x^{3:2} . -x = -\frac{1}{8}x^{5:2} = C$

$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{3}{6} . -\frac{1}{8}x^{5:2} . -x = -\frac{1}{16}x^{7:2} = D$

$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{5}{8} . -\frac{1}{16}x^{7:2} . -x = -\frac{5}{128}x^{9:2} = E$

$\frac{m-4n}{5n} EQ = -\frac{7}{10} . -\frac{5}{128}x^{9:2} . -x = -\frac{7}{256}x^{11:2}$ &c. in infinit.

Habemus adeo $\sqrt{(x-xx)} = x^{1:2} - \frac{1}{2}x^{3:2} - \frac{1}{8}x^{5:2} - \frac{1}{16}x^{7:2} - \frac{5}{128}x^{9:2} - \frac{7}{256}x^{11:2}$ &c. infinitum.

Unde $ydx = x^{1:2}dx - \frac{1}{2}x^{3:2}dx - \frac{1}{8}x^{5:2}dx - \frac{1}{16}x^{7:2}dx - \frac{5}{128}x^{9:2}dx - \frac{7}{256}x^{11:2}dx$ &c. in infinitum.

Hinc $\int ydx = \frac{2}{3}x^{3:2} - \frac{1}{5}x^{5:2} - \frac{1}{28}x^{7:2} - \frac{1}{72}x^{9:2} - \frac{5}{704}x^{11:2} - \frac{7}{1708}x^{13:2}$ &c. in infinitum. $= \sqrt{x}(\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{28}x^6 - \frac{1}{72}x^8 - \frac{5}{704}x^{10} - \frac{7}{1708}x^{12}$ &c. in infinitum).

Hæc nempe ſeries exhibet quadraturam indeterminatam ſegmenti AMP.

Aliter.

Quoniam ſi radius circuli $= 1$, C P $= x$, (§. 341. *part.* 1.) $y = \sqrt{(1-x^2)}$ & $\sqrt{(1-x^2)} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \frac{7}{256}x^{10}$ &c. in infinit. erit (§. 81. *part.* 1.) Tab. I. Fig. 3.

$ydx = dx - \frac{1}{2}x^2dx - \frac{1}{8}x^4dx - \frac{1}{16}x^6dx - \frac{5}{128}x^8dx - \frac{7}{256}x^{10}dx$ - &c. in infinit.

$$\int ydx = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{112}x^7 - \frac{5}{1152}x^9 - \frac{7}{2816}x^{11} \text{ \&c. in infinit.}$$

Quando x radio CA æqualis evadit, ſpatium DCPM degenerat in quadrantem. Subſtituta itaque 1 pro x; erit quadrans $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} - \frac{7}{2816}$ &c. in infinit. quæ eadem

Ppp

(h) in Logarithmotechnia Prop. 17. p. 31. & ſeqq.

(i) Vid. Epiſtolæ ipſorum apud *Walliſium* Vol. III. Operum Mathemat.

dem ſeries integram circuli aream metitur, ſi diameter fuerit 1.

Aliter.

Tab. II. Fig. 20. Sit tangens arcus dimidii GB $= x$, radius BC $= 1$; erit tangens integri ſeu dupli KB $= 2x : (1-xx)$ (§. 290 *part.* 1.) & (§. 254 *Geom.*)

$$BG : BC = KG : KC$$
$$x : 1 = \frac{x+x^3}{1-xx} : \frac{1+x^2}{1-x^2}$$

Eſt enim KG $= 2x : (1-xx) - x = (2x - x + x^3) : (1-xx) = (x+x^3) : (1-xx)$

Porro (§. 353. *Geom.*)

$$KC : KB = MC : PM$$
$$\frac{1+x^2}{1-x^2} : \frac{2x}{1-x^2} = 1 : \frac{2x}{1+x^2}$$
$$KC : BC = MC : PC$$
$$\frac{1+x^2}{1-x^2} : 1 = 1 : \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

Unde PB $= 1-(1+x^2) : (1+x^2) = (1+x^2-1+x^2) : (1+x^2) = 2x^2 : (1+x^2)$. Hinc differentiando eruitur $Pp = MR = (4xdx+4x^3dx-4x^3dx) : (1+x^2)^2 = 4xdx : (1+x^2)^2$ & $mR = (2dx+2x^2dx-4x^2dx) : (1+x^2)^2 = (2dx - 2x^2dx) : (1+x^2)^2$. Ob $MR^2 + mR^2 = Mm^2$ (§. 394. *Geom.*) habetur $Mm^2 = 16x^2dx^2 : (1+x^2)^4 + (4dx^2 - 8x^2dx^2 + 4x^4dx^2) : (1+x^2)^4 = (4dx^2+8x^2dx^2+4x^4dx^2) : (1+x^2)^4$ & $Mm = (2dx+2x^2dx) : (1+x^2)^2 = 2dx : (1+x^2)$. Denique $Mm . \frac{1}{2} MC = dx : (1+x^2)$. Ut ſector hic infinite parvus MC*m* ſeu elementum arcus BM, cujus dimidii tangens x, ſummetur; reſolvi debet $1 : (1+x)$ in ſeriem (§. 81. *part.* 1.): quo facto reperitur $dx : (1+x^2) = dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + x^8dx - x^{10}dx$ &c. adeoque $\int dx : (1+x^2) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11}$ &c. quæ ſeries exprimit ſectorem BCM, ita ut arcus dimidii tangens GB $= x$.

Quando arcus integer BM in quadrantem degenerat; tangens dimidii BG fit radio æqualis (§. 32. *Trig.*). Si ergo pro x ſubſtituatur 1, ſeries $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c. in infinit. quadrantem circuli exprimit. Immo totam aream emetitur, ſi 1 denotet diametrum circuli.

Brevius.

Sit tangens KB $= x$, BC $= 1$ & ſecans CA alteri CK infinite propinqua ductusque arculus KL radio CK; erit AK $= dx$, KC $= \sqrt{(1+x^2)}$ (§. 394. *Geom.*). Jam cum anguli ad B & L ſint recti (§. 37) & ob angulum infinite parvum KCL angulus BKC $=$ KAC (§. 224. *Geom.* & §. 3. *Analyſ. infinit.*); erit (§. 352. *Geom.*) Tab. I. Fig. 2.

$$KC : BC = KA : KL$$
$$\sqrt{(1+x^2)} : 1 = dx : \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}}$$

Porro (§. 134. 390 *Geom.*)

CK:

$$CK : KL = CM : mM$$
$$V(1+x^2) : dx = 1 : \frac{dx}{V(1+x^2)} \quad \frac{dx}{1+x^2}$$

Sector igitur $CMm = \frac{1}{2} dx : (1+x^2) = \frac{1}{2} (dx - x^2 dx + x^4 dx - x^6 dx + x^8 dx - x^{10} dx$ &c.) Unde per ſummationem eruitur ſector BCM, cujus tangens $KB = x$, $\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{14}x^7 + \frac{1}{18}x^9 - \frac{1}{22}x^{11}$ &c. in infinit. adeoque ſi BM octans circuli ſeu arcus 45°, ſector erit (§. 32. *Trigonom*) $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10} - \frac{1}{14} + \frac{1}{18} - \frac{1}{22}$ &c. infinit. Hujus adeo ſeriei duplum $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c. in infinitum eſt quadrans circuli, immo integra area ſi diameter $= 1$.

SCHOLION.

111. *Seriem primam invenit* Nevvtonus; *alteram* Leibnitius. *Sed nullum eſt dubium quin ingenioſiſſimus* Leibnitius *methodo ab iis diverſa, quas ego propoſui, ad ſuam pervenerit. Cum enim methodum priorem, in quam incideram ante annos complures, amico per contanti, unde conſtet, (quod* Leibnitius *in Actis Eruditorum aſſeruerat)* $\int dx : (1 + x^2)$ *dependere a quadratura circuli & quomodo inde eruatur ſeries* Leibnitiana *pro circulo* $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ &c. *reſponſurus, judicio* Leibnitii *ſubmiſiſſem, eam quidem non improbavit, monuit tamen, totum negotium brevius abſolvi poſſe: unde etiam factum eſt, ut poſtea de breviori cogitarem.*

PROBLEMA 36.

Tab. I. Fig. 10. 112. *Ellipſin Apollonianam quadrare.*

Sit $AC = a$, $GC = c$, $PC = x$; erit (§. 391 *part. 1.*)

$$y^2 = c^2 (a^2 - x^2) : a^2$$
$$y = c V(a^2 - x^2) : a$$

Eſt vero $V[a^2 - x^2] = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \frac{7x^{10}}{256a^9}$ &c. in infinit. [§. 81. *part.* I.]. Ergo $ydx = cdx - \frac{cx^2dx}{2a^2} - \frac{cx^4dx}{8a^4} - \frac{cx^6dx}{16a^6} - \frac{5cx^8dx}{128a^8} - \frac{7cx^{10}dx}{256a^{10}}$ &c. in infinit. conſequenter $\int ydx = cx - \frac{cx^3}{6a^2} - \frac{cx^5}{40a^4} - \frac{cx^7}{112a^6} - \frac{5cx^9}{1152a^8} - \frac{7cx^{11}}{2816a^{10}}$ &c. in infinit.

Quodſi pro x ponatur a; erit quadrans ellipſis $ac - \frac{1}{6}ac - \frac{1}{40}ac - \frac{1}{112}ac - \frac{5}{1152}ac - \frac{7}{2816}ac$ &c. in infinitum: quæ eadem ſeries integram ellipſis aream exhibet, ſi a axem integrum denotet.

COROLLARIUM 1.

113. Si fiat $Vac = 1$; erit area ellipſis $= 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} - \frac{7}{2816}$ &c. in infinitum. Patet adeo ellipſin eſſe circulo æqualem, cujus diameter eſt media proportionalis inter axes ellipſis conjugatos.

COROLLARIUM. 2.

114. Eſt ergo ellipſis ad circulum, cujus diameter axi majori æqualis, ut ac ad a^2 (§. 386. Geom.), hoc eſt, ut c ad a

ad a (§. 104. *part.* 1.), ſeu ut axis minor ad majorem.

COROLLARIUM 3.

115. Data circuli quadratura dabitur etiam quadratura ellipſis & contra.

SCHOLION

116. *Quamvis circuli integri quadratura finita hactenus dari non potuerit, varias tamen ejus portiones quadrarunt Geometræ. Primam quadraturam partialem alicujus lunulæ dedit jam olim* Hippocrates *Chius, ex mercatore naufrago Geometra factus. Sit* AEB *ſemicirculus &* GC = BG. *Deſcribatur radio* BC *qua-*
Tab. II. Fig. 21. *drans* AFB; *erit* AEBFA Lunula Hippocratis. *Quoniam* $BC^2 = 2GB^2$ (§. 394. *Geom.*); *erit quadrans* AGBC *ſemicirculo* AEB *æqualis* (§. 386. *Geom.*). *Ablato igitur utrinque ſegmento communi* AFBGA; *erit* AEBFA = △ ACB = GB^2.

PROBLEMA 37.

117. *Cycloidem quadrare.*

Quoniam TP = PM (§. 50); erunt in △ PMT anguli M & T æquales (§. 174 *Geom.*), adeoque TPQ = 2M (§. 224. *Geom.*). Eſt vero
Tab. I. Fig. 7. anguli APQ menſura arcus dimidius AP (§. 276. & 299. *Geom.*) & idem metitur angulum TPA (§. 307. *Geom.*). Ergo APQ = TMP (§. 135. *Geom.*) = MmS ob parallelas MP & mq (§. 222. *Geom.*). Quamobrem cum ad S & Q ſint recti; erit (§. 252. *Geom.*)

AQ : QP = MS : mS.

Sit jam AQ = x, AB = 1, erit PQ = $V(x-xx)$ (§. 341. *part.* 1.) & mS = $dx\, V(x-xx) : x$. Reperimus autem ſupra (§. 110.) $V(x-xx) = x^{1:2} - \frac{1}{2}x^{3:2} - \frac{1}{8}x^{5:2} - \frac{1}{16}x^{7:2}$ &c. in infinitum. Ergo $dx\, V(x-xx) : x =$ (quoniam ob diviſionem per x factam numeratores exponentium duabus unitatibus minuuntur, (§. 48. part. 1.) $x^{-1:2}dx - \frac{1}{2}x^{1:2}dx - \frac{1}{8}x^{3:2}dx - \frac{1}{16}x^{5:2}dx$ &c. in infinitum, cujus ſumma $2x^{1:2} - \frac{1}{3}x^{3:2} - \frac{1}{20}x^{5:2} - \frac{1}{56}x^{7:2}$ &c. in infinitum, eſt ſemiordinata cycloidis QM ad axem AB relatæ. Hinc QMdx ſeu elementum QMSq ſpatii cycloidici AMQ = $2x^{1:2}dx - \frac{1}{3}x^{3:2}dx - \frac{1}{20}x^{5:2}dx - \frac{1}{56}x^{7:2}dx$ &c. in infinitum: cujus ſumma = $\frac{4}{3}x^{3:2} - \frac{2}{15}x^{5:2} - \frac{1}{70}x^{7:2} - \frac{1}{252}x^{9:2}$ &c. in infinitum exprimit ſegmentum cycloidis AMQ.

Quodſi mS = gG = $dx\, V(x-xx) : x$ ducatur in GM = AQ = x, reperietur elementum GMHG areæ AMG = $dx\, V(x-xx)$: quod cum idem ſit cum elemento ſegmenti circuli APQ, erit ſpatium AMG ſegmento circuli APQ, conſequenter area ADC ſemicirculo APB æqualis.

COROLLARIUM

118. Quoniam CB ſemiperipheriæ circuli æquatur (§. 526. *part.* 1.) ſi ea = p & AB = a; erit rectangulum BCDA = ap (§. 357. *Geom.*) & ſemicirculus APB, adeoque & ſpatium cycloidicum externum ADC = $\frac{1}{4}ap$ (§. 406. *Geom.*). Ergo area ſemicicloidis ACB = $\frac{3}{4}ap$ & AMCBPA = $\frac{1}{2}ap$, conſe-

quen-

quenter area cycloidis eſt circuli genitoris tripla.

PROBLEMA 38.

119. *Ciſſoidem* Dioclis *quadrare.*

Quoniam $y^2 = x^3 : [1-x]$, ſi 1 diameter circuli genitoris (§. 501. *part.* 1.); erit

$$y = x\sqrt{x} : \sqrt{(1-x)} = x^{3:2}(1-x)^{-1:2}$$

Extrahatur ergo ex $1 : \sqrt{(1-x)}$ actu radix per theorema generale [§. 82. *part.* 1], in quo erit $m = -1$, $n = 2$, $P = 1$, $Q = -x$ & hinc

$$P^{m:n} = 1 = A$$

$$\frac{m}{n} AQ = -\frac{1}{2}.\ 1.\ -x = \frac{1}{2}x = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{3}{4}.\ \frac{1}{2}x.\ -x = \frac{1.3}{2.4}x^2 = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{5}{6}.\ \frac{1.3}{2.4}x^2.\ -x = \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 = D$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{7}{8}.\ \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3.\ -x = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4$$

&c. in infinitum.

Unde $ydx = x^{3:2}(1-x)^{-1:2}dx = x^{3:2}dx + \frac{1}{2}x^{5:2}dx + \frac{1.3}{2.4}x^{7:2}dx + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^{9:2}dx + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^{11:2}dx$ &c. cujus ſumma $\frac{2}{5}x^{5:2} + \frac{2}{2.7}x^{7:2} + \frac{1.3}{4.9}x^{9:2} + \frac{1.3.5}{4.6.11}x^{11:2} + \frac{1.3.5.7}{4.6.8.13}x^{13:2}$ &c. in infinitum $= \sqrt{x}\,(\frac{2}{5}x^4 + \frac{1}{7}x^6 + \frac{1.3}{4.9}x^8 + \frac{1.3.5}{4.6.11}x^{10} + \frac{1.3.5.7}{4.6.8.13}x^{12}$ &c. in infinitum) exprimit ſpatium APM.

Aliter.

Sit $AP = x$, $PN = v$, $PM = y$, $AB = a$; erit (§. 82. *part.* 1.) Tab. II. Fig. 22.

$$ay^2 - xy^2 = x^3$$

$$2aydy - 2xydy - y^2dx = 3x^2dx$$

$$2(a-x)dy - ydx = 3x^2dx : y$$

Quoniam (§. 500. *part.* 1.) $x^2 = vy$; erit $x^2 : y = v$. Fiat præterea $a - x = PB = z$; habebimus

$$2zdy - ydx = 3vdx$$

$$2\int zdy - \int ydx = 3\int vdx$$

Eſt vero vdx elementum circuli PN*np*; ob $z = PB = OM$ & $dy = mR = oO$ elementum *m*MO*o* areæ AMOB & ydx elementum PM*mp* areæ AMP. Jam quando $\int zdy$ integram aream intra ciſſoidem AI & ejus aſymptotum BH exhibet, etiam $\int ydx$ eſt eadem area, adeoque $\int ydx = \int zdy$, conſequenter $2\int zdy - \int ydx = \int zdy$. Quare cum in eodem caſu $\int vdx$ ſemicirculum producat ANB; erit ob $\int zdy = 3\int vdx$ totum ſpatium ciſſoidale in infinitum protenſum ſemicirculi genitoris ANB triplum.

PROBLEMA 39.

120. *Quadrare Logiſticam* ſeu *Logarithmicam.*

 Sit

Tab. I. Fig. 8. Sit ſubtangens PT $=a$ (§. 52.), PM $=x$, Pp $=dx$; erit (§. cit.)

$$ydx : dy = a$$

$$ydx = ady$$

$$\int ydx = ay$$

Spatium ergo interminatum H PMI æquatur rectangulo ex PM in PT.

COROLLARIUM 1.

121. Sit QS $=z$; erit ſpatium interminatum ISQH $=az$, conſequenter S MPQ $=ay-az=a(y-z)$, hoc eſt, ſpatium inter duas logiſticæ ſemiordinatas interceptum æquatur rectangulo ex ſubtangente in differentiam ſemiordinatarum.

COROLLARIUM 2.

122. Eſt itaque ſpatium BAPM ad ſpatium PMSQ ut differentia ſemiordinatarum AB & PM ad differentiam ſemiordinatarum PM & SQ (§. *præc.* & §. 104. *part. 1.*).

PROBLEMA 40.

123. *Quadrare ſpirales.*

Tab. I. Fig. 6. Sint omnia ut in problemate 8 (§. 48); erit arculus EG $= ydx : a$, qui ductus in $\frac{1}{2}$ AG producit ſectorem infinite parvum GAE $= y^2dx : 2a$ (§. 412. *Geom.*). Eſt autem pro ſpirali Archimedea.

$$ax = by$$

$$a^2x^2 : b^2 = y^2$$

$$y^2dx : 2a = ax^2dx : 2b^2$$

$$\int y^2dx : 2a = ax^3 : 6b^2$$

Quodſi pro arcu x ponatur integra peripheria b; erit ſpatium ſpirale integrum $\frac{1}{6}ab$. Similiter pro infinitis ſpiralibus ad circulum relatis (§. 524. *part.* 1.)

$$a^mx^n = b^ny^m$$

$$a^mx^n : b^n = y^m$$

$$ax^{n:m} : b^{n:m} = y$$

$$a^2x^{2n:m} : b^{2n:m} = y^2$$

$$y^2dx : 2a = ax^{2n:m}dx : 2b^{2n:m}$$

$$\int y^2dx : 2a = max^{2n+m,:m} : (4n + 2m)b^{2n:m}$$

Quare ſi pro x ponatur integra peripheria circuli b, prodibit pro ſpatiis ſpiralibus integris $ma b^{2n+m,:m} : (4n+2m)b^{2n:m} = mab : (4n+2m)$.

Quodſi ponamus arcum BC eſſe ad CF ut abſciſſa ad ſemiordinatam in curva aliqua algebraica, eodem modo reperitur ſpatium ſpirale. Sit enim e. gr. BC ad CF ut abſciſſa parabolæ ad ſemiordinatam, erit (ſumto r pro parametro)

$$rx = a^2-2ay+yy$$

$$dx = (2ydy-2ady) : r$$

$$y^2dx : 2a = (y^3dy-ay^2dy) : ar$$

$$\int y^2dx : 2a = y^4 : 4ar - y^3 : 3r$$

Nec

Nec abſimili modo invenitur ſpatium inter arcum BC & ſpiralem BF comprehenſum: cujus elementum eſt trapezium CFID $=$ (CD+FI) $\frac{1}{2}$ FC (§. 382. *Geom.*). Eſt vero CD $= dx$, FI $= ydx : a$, FC $= a-y$, adeoque CFID $= (dx+ydx : a)(\frac{1}{2}a-y) = (a^2dx-y^2dx) : 2a$.

Si jam ſpiralis ſit parabolica, pro dx ſubſtituatur valor ipſius $(2ydy-2ady):r$; erit elementum ſpeciale $(ay^2dy+a^2ydy-y^3dy-a^3dy):ar$, cujus ſumma $y^3:3r+ay^2:2r-y^4:4ar-a^2y:r$ eſt ſpatium quæſitum BFC.

PROBLEMA 41.

124. *Invenire rationem, quam habent ſpatia curvilinea juxta axem eundem vel axes æquales deſcripta.*

Sit elementum ſpatii curvilinei unius $= ydx$. Quoniam ordinatæ ad æquales partes axis continuo applicantur, *per hypoth.* erit elementum ſpatii alterius zdx, poſita nempe ſemiordinata hujus z, abſciſſa communi x. Sed cum in ſingulis elementis eadem ſemper ſit ratio ipſius y ad z, ob conſtantem ipſorum y & z ad eundem axem relationem; erit $\int ydx : \int zdx = ydx : zdx$ (§. 182. *Arithm.*) $= y : z$ (§. 172. *Arithm.*).

Theorema. Spatia curvilinea æque alta habent rationem baſium, quibus inſiſtunt.

COROLLARIUM 1.

125. Quare ſi ARB fuerit ſemiellipſis; AKB ſemicirculus & KL ad AB perpendicularis; erit ſegmentum circulare BKL ad ſegmentum ellipticum BRL ut RL ad KL. Tab. II. Fig. 23.

COROLLARIUM 2.

126. Quod ſi ex foco F ducantur rectæ FR & FK, erunt quoque triangula FRL & FKL ut RL ad KL (§. 372. Geom.). Quamobrem ſector ellipticus BFR eſt ad ſectorem circuli KFB ut RL ad KL (§. 182. *Arithm.*). Cum itaque RL : KL = CE : CD (§. 556. *part.* 1.) & ut CE ad CD ita ellipſis ad circulum (§. 114.); erit quoque ſector RFB ad ſectorem KFB ut ellipſis ad circulum (§. 156. *Arithm.*) conſequenter ut ſector RFB ad ellipſin, ita ſector KFB ad circulum (§. 164. *part.* 1).

CAP.

CAPUT III.

DE USU CALCULI INTEGRALIS IN RECTIFICATIONE CURVARUM.

DEFINITIO. 7.

117. Rectificatio curvæ eſt inventio rectæ, cui æqualis eſt linea curva.

COROLLARIUM

128. Cum linea curva concipiatur conſtare ex innumeris lineolis rectis infinite exiguis; ſi una earum inveniatur per calculum differentialem, ſumma dabit longitudinem curvæ. Nimirum cum ex ſuperioribus conſtet, eſſe MR $= dx$, mR$= dy$ (§. 20); erit Mm ſeu elementum curvæ $V(dx^2+dy^2)$ (§. 394. *Geom.*). Quodſi itaque ex æquatione differentiali ad curvam ſpecialem ſubſtituatur valor vel ipſius dx^2, vel ipſius dy^2; habetur elementum ſpeciale: quod integratum prodit longitudinem curvæ.

SCHOLION.

129. *Interdum elementum curvæ commodius ex circumſtantiis ſpecialibus eruitur, prout exempla mox afferenda loquentur.*

PROBLEMA 42.

130. *Parabolam rectificare.*

Pro parabola $adx=2ydy$ (§. 21)

$$a^2dx^2=4y^2dy^2$$

$$dx^2=4y^2dy^2:a^2$$

$$V(dx^2+dy^2)=V(dy^2+4y^2dy^2:a^2)=dy\,V(aa+4yy):a.$$

Ut hoc elementum curvæ integrabile fiat, reſolvatur in ſeriem infinitam (§. 82. *part.* I.); erit in theoremate generali

$$n=2 \quad m=1 \quad P=a^2 \quad Q=4y^2:a^2$$

$$P^{m:n}=a=A$$

$$\frac{m}{n}AQ=\tfrac{1}{2}a.4y^2:a^2=2y^2:a=B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ=-\tfrac{1}{4}.\frac{2y^2}{a}.\frac{4y^2}{a^2}=-\frac{2y^4}{a^3}=C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ=-\tfrac{3}{6}.-\frac{2y^4}{a^3}.\frac{4y^2}{a^2}=\frac{4y^6}{a^5}=D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ=-\tfrac{5}{8}.\frac{4y^6}{a^5}.\frac{4y^2}{a^2}=-\frac{10y^8}{a^7}\ \text{\&c. in infinitum.}$$

Quare $dy\,V(aa+4yy):a=dy+\frac{2y^2dy}{a^2}-\frac{2y^4dy}{a^4}+\frac{4y^6dy}{a^6}-\frac{10y^8dy}{a^8}$ &c. cujus integrale $y+\frac{2y^3}{3a^2}-\frac{2y^5}{5a^4}+\frac{4y^7}{7a^6}-\frac{10y^9}{9a^8}$ &c. in infinitum exprimit arcum parabolicum AM. Tab. I. Fig. 2.

COROLLARIUM.

131. Sint AC & DC ſemiaxes conjugati hyperbolæ æquilateræ; erit AC $=$ DC Tab. II. Fig. 24.

$= DC = a$ (§. 461. *part.* 1.). Sit MP $= 2y$, QM $= x$; erit AP $= x - a$, conſequenter ob PB.AP $=$ PM^2 (§. 463 *part.* 1.) $xx - aa = 4yy$ & hinc $xx = 4yy + aa$, conſequenter $x = V(4yy + aa)$. Quodſi qm intelligatur ipſi QM infinite propinqua; erit $Qq = dy$, adeoque elementum areæ CQMA $= dyV(aa + 4yy)$. Pendet itaque rectificatio parabolæ a quadratura ſpatii hyperbolici CQMA.

SCHOLION.

132. *Probe notandum eſt, omnes ſummationes reduci ad quadraturas curvarum, quocunque in caſu iisdem utamur. Unde ut ſint perfectæ, in omnibus obſervanda eſt regula ſupra tradita de quadraturis* (§. 97).

PROBLEMA 43.

133. *Rectificare parabolam ſecundi generis, ad quam $ax^2 = y^3$, ſeu ſumto $a = 1$, $x^2 = y^3$.*

Quoniam $x^2 = y^3$

erit $2xdx = 3y^2dy$

$$4x^2dx^2 = 9y^4dy^2$$

$$dx^2 = 9y^4dy^2 : 4x^2 = 9y^4dy^2 : 4y^3 = \tfrac{9}{4}ydy^2$$

$$V(dx^2 + dy^2) = V(\tfrac{9}{4}ydy^2 + dy^2) = \tfrac{1}{2}V(9ydy^2 + 4dy^2) = \tfrac{1}{2}dyV(9y+4)$$

ut elementum integrabile reddadatur fiat

$$V(9y+4) = v$$

erit $9y + 4 = v^2$

$$9dy = 2vdv$$

$$\tfrac{1}{2}dyV(9y+4) = \tfrac{1}{9}v^2dv$$

$$\int \tfrac{1}{2}dy\,V(9y+4) = \tfrac{1}{27}v^3 = \tfrac{1}{27}(9y+4)\,V(9y+4).$$

Ut vero ſumma exprimat longitudinem arcus; fiat $y = 0$; erit reſiduum $= \tfrac{4}{27}V4 = \tfrac{8}{27}$: adeoque arcus $\tfrac{1}{27}(9y+4)\ V(9y+4) - \tfrac{8}{27}$ (§. 97).

COROLLARIUM.

134. Sit parameter parabolæ Apollonianæ 1, AP $= 1$, PQ $= \tfrac{9}{4}y$, erit AQ $= \tfrac{9}{4}y + 1$ &, ob parametrum 1, QN$^2 = \tfrac{9}{4}y + 1 = (9y+4) : 4$ (§. 352. part. 1.), conſequenter QN $= \tfrac{1}{2}V(9y+4)$. Eſt adeo elementum QNnq ſpatii parabolici PMNQ $= \tfrac{1}{2}dy\,V(9y+4)$. Quare rectificatio parabolæ ſecundi generis, ad quam $ax^2 = y^3$, pendet a quadratura parabolæ Apollonianæ; quæ cum dari poſſit (§. 91), mirum non eſt, illam quoque rectificabilem eſſe. Tab. II. Fig. 19.

PROBLEMA 44.

135. *Infinitas parabolas rectificare.*

Si parameter $= 1$, pro infinitis parabolis (§. 475. *part.* 1.)

$$y^m = x$$

$$my^{m-1}dy = dx$$

$$m^2y^{2m-2}dy^2 = dx^2$$

h. e. ſi brevitatis gratia fiat $2m-2=r$

$$m^2y^r dy^2 = dx^2$$

$$V(dx^2+dy^2) = V(m^2y^r dy^2+dy^2) = dy V(m^2y^r+1)$$

Ut elementum integrabile reddatur, ex m^2y^r+1 extrahenda eſt radix per theorema generale (§. 82. *part.* 1); in quo erit

$$m=1,\ n=2,\ P=1,\ Q=m^2y^r$$

$$P^{n:m} = 1 = A$$

$$\frac{m}{n} AQ = \tfrac{1}{2} m^2y^r = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{2} m^2y^r\cdot m^2y^r = -\frac{1}{2.4} m^4y^{2r} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\tfrac{3}{6}\cdot -\frac{1}{2.4} m^4y^{2r}\cdot m^2y^r = +\frac{1.3}{2.4.6} m^6y^{3r} = D.$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\tfrac{5}{8}\cdot \frac{1.3}{2.4.6} m^6y^{3r}\cdot m^2y^r = -\frac{1.3.5}{2.4.6.8} m^8y^{4r} = E$$

$$\frac{m-4n}{5n} EQ = -\tfrac{7}{10}\cdot -\frac{1.3.5}{2.4.6.8} m^8y^{4r}\cdot m^2y^r = +\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10} m^{10}y^{5r}$$ &c. in infinitum.

Habemus itaque $dy V(1+m^2y^r) = dy + \tfrac{1}{2}m^2y^r dy - \frac{1}{2.4} m^4y^{2r}dy + \frac{1.3}{2.4.6} m^6y^{3r}dy - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} m^8y^{4r}dy + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10} m^{10}y^{5r}dy$ &c. in infinit. cujus integrale $y + \frac{1}{2.(r+1)} m^2y^{r+1} - \frac{1}{2.4(2r+1)} m^4y^{2r+1} + \frac{1.3}{2.4.6(3r+1)} m^6y^{3r+1} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8(4r+1)} m^8y^{4r+1} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10(5r+1)} m^{10}y^{5r+1}$, &c. in infinitum indefinite exprimit arcum parabolicum cujuscunque generis.

Quodſi pro r ſubſtituatur valor ipſius $2m-2$; prodibit idem arcus $= y + \frac{1}{2(2m-1)} m^2y^{2m-1} - \frac{1}{2.4.(4m-3)} m^4y^{4m-3} + \frac{1.3}{2.4.6(6m-5)} m^6y^{6m-5} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8(8m-7)} m^8y^{8m-7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10(10m-9)} m^{10}y^{10m-9}$ &c. in infinitum.

PROBLEMA 45.

136. *Dato ſinu* PQ *arcus* AP *invenire arcum* AP. Tab. I. Fig. 7.

Sit radius $AI=1$, $PQ=y$, $AQ=x$; erit (§. 341. *part.* 1.)

$$2x-xx=yy$$

$$2dx-2xdx=2ydy$$

$$dx = ydy:(1-x)$$

$$dx^2 = y^2dy^2:(1-2x+xx) = y^2dy^2:(1-y^2)$$

$V(dx^2$

$V(dx^2+dy^2) = V[y^2dy^2:(1-y^2)+dy^2] = V(y^2dy^2+dy^2-y^2dy^2):V(1-y^2) = dy:V(1-y^2) = dy:(1-y^2)^{-1:2}$

Reſolvatur hoc elementum in ſeriem infinitam per extractionem radicis vi theorematis generalis (§. 82. part. 1), in quo erit

$m=-1,\ n=2,\ P=1,\ Q=-y^2.$

$P^{m:n} = 1 = A$

$\frac{m}{n}AQ = -\frac{1}{2}. 1. -y^2 = \frac{1}{2}y^2 = B$

$\frac{m-n}{2n}BQ = -\frac{3}{4}. \frac{1}{2}y^2. -y^2 = \frac{1.3}{2.4}y^4 = C$

$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\frac{5}{6}. \frac{1.3}{2.4}y^4. -y^2 = \frac{1.3.5}{2.4.6}y^6 = D$

$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\frac{7}{8}. \frac{1.3.5}{2.4.6}y^6. -y^2 = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}y^8$ &c. in infinitum.

Eſt adeo $dy:V(1-y^2) = dy + \frac{1}{2}y^2dy + \frac{1.3}{2.4}y^4dy + \frac{1.3.5}{2.4.6}y^6dy + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}y^8dy$ &c in infinitum, cujus integrale $y + \frac{1}{2.3}y^3 + \frac{1.3.}{2.4.5}y^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}y^7 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}y^9$ &c. eſt arcus AP, cujus ſinus $PQ=y$, ſinu toto exiſtente 1. Si terminus primus dicatur A, ſecundus B, tertius C, quartus D &c. & ſecundus multiplicetur per $\frac{1}{1}$, tertius per $\frac{3}{3}$, quartus per $\frac{5}{5}$ &c. ſeries inventa in hanc degenerat: $y + \frac{1.1}{2.3}Ay^2 + \frac{3.3}{4.5}By^2 + \frac{5.5}{6.7}Cy^2 + \frac{7.7}{8.9}Dy^2$ &c.

Si Coſinus $QI = x$; erit $PQ = V(1-xx)$ & ob ſimilitudinem ΔΔ QPI & PpO (ſunt enim O & Q, it. pPI & OPQ rectis OPI=PIQ, adeoque pPO=IPQ.) $PQ:PI = PO:Pp$

$$V(1-xx):1 = dx:\frac{dx}{V(1-xx)}$$

Cum adeo hoc elementum coincidat cum anteriore, evidens eſt, ſi in ſerie anteriore pro y ſubſtituatur x, prodire ſeriem pro arcu, qui eſt illius complementum ad 90°. Unde eadem ſeries arcubus tam ex ſinibus, quam coſinibus inveniendis inſervit.

PROBLEMA 46.

137. *Dato ſinu verſo* AQ *invenire arcum* AP. Tab. I. Fig. 7.

Sit $AQ=x$, diameter $AB=1$, erit $QP = V(x-xx)$ (§. 341. *part.* 1.) & *vi probl. præc.* $Pp = dx:2V(x-xx) = \frac{1}{2}dx(x-xx)^{-1:2}$. Cum adeo ſit in theoremate generali (§. 82. *part.* 1.) $m=-1,\ n=2,\ P=x,\ Q=-x$; erit

$P^{m:n} = x^{-1:2} = A$

$\frac{m}{n}AQ = -\frac{1}{2}. x^{-1:2}. -x = \frac{1}{2}x^{1:2} = B$

$\frac{m-n}{2n}BQ = -\frac{3}{4}. \frac{1}{2}x^{1:2}. -x = \frac{1.3}{2.4}x^{3:2} = C$

 m-2n

$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\frac{5}{6} \cdot \frac{1.3}{2.4} x^{3:2}, -x = \frac{1.3.5}{2.4.6} x^{5:2} = D$

$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\frac{7}{8} \cdot \frac{1.3.5}{2.4.6} x^{5:2}, -x = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} x^{7:2}$ &c. in infinitum.

Hinc $\frac{1}{2}dx : V(x-xx) = \frac{1}{2} x^{-1:2}dx + \frac{1}{4} x^{1:2}dx + \frac{1.3}{4.4} x^{3:2}dx + \frac{1.3.5}{4.4.6} x^{5:2}dx + \frac{1.3.5.7}{4.4.6.8} x^{7:2}dx$ &c. in infinitum, cujus integrale $x^{1:2} + \frac{1}{2.3} x^{3:2} + \frac{1.3}{2.4.5} x^{5:2} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} x^{7:2} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9} x^{9:2}$ &c. in infinitum, ſeu $Vx(1 + \frac{1}{2.3} x + \frac{1.3}{2.4.5} x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} x^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9} x^4$ &c. in infinitum) exprimit arcum AP.

PROBLEMA 47.

Tab. II. Fig. 20. 138. *Data tangente* BK *invenire arcum* BM.

Sit tangens BK $= x$, radius BC $= 1$; erit M$m = dx : (1+x^2) = dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + x^8dx - x^{10}dx$ &c. in infinitū (§. 110). Hujus ſeriei ſumma $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11}$ &c. in infinitum dat arcum BM.

Cum tangens 45° ſit radio æqualis (§. 32. *Trigon.*) ſi pro x ponatur 1; prodibit arcus 45° ſeu dimidius quadrans $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c. in infinitum, quæ eadem ſeries quadranti ſatisfacit, ſi diameter $= 1$.

PROBLEMA 48.

139. *Dato ſinu* PM *invenire arcum* BM.

Sit ſinus PM $= y$, radius BC $= 1$, arcus BM $= v$; erit $v = y + \frac{1}{6} y^3 + \frac{3}{40}y^5$ &c. in infinitum (§ 137.). Valor ipſius y invenietur extrahendo radicem ex $y + \frac{1}{6} y^3 + \frac{3}{40} y^5$ &c. in infinitum. Eſt nimirum in theoremate generali (§. 331. *part.* 1.) $a = 1$, $c = \frac{1}{6}$, $e = \frac{3}{40}$ &c. adeoque

$v : a = v$

$-acv^3 : a^5 = -\frac{1}{6} v^3$

$+(3a^2c^2 - a^3ev^5) : a^9 = (\frac{3}{36} - \frac{3}{40})v^5 = (\frac{1}{12} - \frac{3}{40})v^5 = \frac{40-36}{12.40}v^5 = \frac{1}{120} v^5$

Hinc $y = v - \frac{1}{6}v^3 + \frac{1}{120}v^5$ &c in infinitum $= {}^1v - \frac{1}{1.2.3} v^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5} v^5$ &c. in infinitum: unde lex progreſſionis manifeſta eſt. Nimirum $y = \frac{1v}{1.} - \frac{1}{1.2.3} v^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5} v^5 + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7} v^7 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} v^9$ &c.

PROBLEMA 49.

140. *Dato arcu* BM *invenire tangentem* BK.

Sit tangens $= x$, radius $= 1$, arcus

cus $= v$; erit (§. 138.) $v = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11}$ &c. Unde eodem modo, quo in problemate præcedente, reperitur $x = v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{2}{15}v^5$ &c.

Poteſt etiam valor ipſius x eodem modo inveniri, quo ſupra (§. 320 *part.* 1.) theorema generale inveſtigavimus: id quod exemplo caſus præſentis illuſtrari conſultum duximus.

Ponamus nempe $x = av + bv^3 + cv^5 + dv^7$ &c. $= 0$; erit (§. 78. *part.* 1.)

$$x^3 = a^3v^3 + 3a^2bv^5 + 3ab^2v^7 \text{ \&c.}$$
$$\qquad\qquad\qquad + 3a^2cv^7 \text{ \&c.}$$
$$x^5 = \quad + a^5v^5 + 5a^4bv^7 \text{ \&c.}$$
$$x^7 = \quad + a^7v^7 \text{ \&c.}$$

Habemus adeo

$$-v = -v$$
$$x = av + bv^3 + cv^5 + dv^7 \text{ \&c.}$$
$$-\tfrac{1}{3}x^3 = -\tfrac{1}{3}a^3v^3 - a^2bv^5 - ab^2v^7 \text{ \&c.}$$
$$\qquad - a^2cv^7$$
$$+\tfrac{1}{5}x^5 = +\tfrac{1}{5}a^5v^5 + a^4bv^7$$
$$-\tfrac{1}{7}x^7 = -\tfrac{1}{7}a^7v^7$$

Quamobrem

$$a - 1 = 0 \qquad b - \tfrac{1}{3} = 0 \qquad c - a^2b + \tfrac{1}{5}a = 0$$
$$a = 1 \qquad b = \tfrac{1}{3} \qquad c = b - \tfrac{1}{5} = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5} = \frac{5-3}{15} = \frac{2}{15}$$

$$d - ab^2 - a^2c + a^4b - \tfrac{1}{7}a^7 = 0$$
$$d - \tfrac{1}{9} - \tfrac{2}{15} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{7} = 0$$
$$d = \tfrac{2}{15} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{9} = \frac{126 + 135 - 210}{945}$$
$$= \frac{51}{945} = \frac{17}{315}$$

His ergo valoribus coëfficientium a, b, c, d &c. in æquatione aſſumtitia $x = av + bv^3 + cv^5 + dv^7$ &c. ſubſtitutis, prodit $x = v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{2}{15}v^5 + \frac{17}{315}v^7$ &c.

SCHOLION

141. *Me non monente apparet, ſi plures termini deſiderentur, aſſumtitiam quoque ex pluribus conſtandam eſſe.*

PROBLEMA 50.

142. *Rectificare cycloidem.*

Sit $AQ = x$, $AB = 1$, erit $Qq = MS = dx$, $PQ = \sqrt{(x - xx)}$ (§. 341. *part.* 1) & hinc $AP = \sqrt{x} = x^{1:2}$ (§. 394. *Geom.*), conſequenter ob ΔΔ APQ & MmS ſimilitudinem ſupra demonſtratam (§. 117),

$$AQ : AP = MS : Mm$$
$$x : x^{1:2} = dx : x^{-1:2}dx$$

Eſt ergo Mm differentiale arcus Cycloidici $AM = x^{-1:2}dx$. Unde $\int x^{-1:2}dx = 2x^{1:2} = 2AP$ eſt arcus AM.

CAPUT IV.

DE USU CALCULI INTEGRALIS IN CUBANDIS SOLIDIS ET DIMETIENDIS SUPERFICIEBUS EORUNDEM.

DEFINITIO 8.

143. *Solidum cubare* idem eſt ac ſpatium ſolido comprehenſum dimetiri.

PROBLEMA 51.

Tab. I. Fig. 19. 144. *Cubare ſolidum ex rotatione figuræ planæ* ANQ *circa rectam* AQ *tanquam axem facta genitum.*

RESOLUTIO.

Sit ſemiordinata *pm* alteri PM infinite propinqua; parallelogrammulum PMR*p* haud differet a trapeziolo PM*mp* (§ 87). Cylindrulus ergo, quem in rotatione figuræ ANQ circa axem AQ deſcribit parallelogrammulum PMR*p* (§. 438. *Geom.*) eſt elementum ſolidi per illam rotationem producti: cujus adeo ſumma dat integrum ſolidum, quia ex innumeris cylindrulis eodem modo formatis conſtare concipitur.

Sit jam AP $= x$, PM $= y$, erit P*p* $= dx$. Sit porro ratio radii ad peripheriam $= r : p$; erit peripheria circuli radio PM deſcripti $= py : r$, conſequenter area $py^2 : 2r$, (§. 406. *Geom.*) quæ ducta in P*p* ſive dx dat ſoliditatem cylindruli ſeu elementi ſolidi $= py^2dx : 2r$ (§. 480. *Geom.*)

Quodſi jam ex æquatione ad curvam ſpeciali ſubſtituatur valor ipſius y^2; habebitur, ſi elementum integrari poſſit, ſoliditas ſegmenti, cujus altitudo AP, radius baſis PM, hoc eſt revolutione ipſius AMP circa AP geniti.

PROBLEMA 52.

145. *Cubare Conum.* Tab. II. Fig. 17.

Conus deſcribitur, ſi triangulum ADC circa axem DC rotatur (§. 440. *Geom.*). Sit DC $= a$, AC $= r$, PM $= y$, DP $= x$; erit (§. 353. *Geom.*)

$$DP : PM = DC : AC$$
$$x : y = a : r$$

Hinc $rx : a = y$
& $r^2x^2 : a^2 = y^2$

$$py^2dx : 2r = pr^2x^2dx : 2a^2r = prx^2 dx : 2a^2 \text{ (§. 144)}$$

$$\int py^2dx : 2r = prx^3 : 6a^2.$$

Quodſi pro x ſubſtituatur a; habebitur ſoliditas totius Coni $pra^3 : 6a^2 = \frac{1}{6}apr = \frac{1}{2}pr \cdot \frac{1}{3}a$. Baſis nempe $\frac{1}{2}pr$ ducenda eſt in tertiam alti-

altitudinis partem $\frac{1}{3}a$, ut ex elementis Geometriæ conſtat.

PROBLEMA 53.

146. *Cubare ſphæram.*

Sphæra cum deſcribatur per rotationem ſemicirculi circa diametrum ejus (§. 442. *Geom.*); erit

$$yy = 2rx - x^2 \quad (\text{§. 441. } part.\ 1.).$$

Unde $py^2dx : 2r = pxdx - px^2dx : 2r$

$$\int py^2dx : 2r = \tfrac{1}{2}px^2 - px^3 : 6r$$

Habemus adeo indefinitam cubationem ſegmenti ſphærici, cujus diameter $2r$, altitudo x.

Quodſi ergo pro x ſubſtituatur diameter $2r$; prodibit ſoliditas ſphæræ integræ $2pr^2 - 8pr^3 : 6r = 2pr^2 - \frac{4}{3}pr^2 = \frac{2}{3}pr^2 = 2rp . \frac{1}{3}r$. Nimirum rectangulum ex diametro $2r$ in peripheriam p multiplicanda eſt per tertiam radii aut ſextam diametri partem $\frac{1}{3}r$. Denique ſi diameter $2r$ ſit 1; erit ſoliditas ſphæræ $\frac{1}{6}p$.

COROLLARIUM 1.

147. Sphæra igitur æquatur pyramidi quadrangulari, cujus baſis eſt rectangulum ex diametro ſphæræ $2r$ in peripheriam eadem deſcriptam, altitudo ſemidiameter ſphæræ (§. 487. *Geom.*)

COROLLARIUM 2.

138. Cylindri ſphæræ circumſcripti ſoliditas eſt pr^2 (§. 480. *Geom.*). Eſt itaque ad ſphæram ut pr^2 ad $\frac{2}{3}pr^2$, hoc eſt, ut $3pr^2$ ad $2pr^2$, ſeu ut 3 ad 2 (§. 104 *part.* 1).

PROBLEMA 54.

149. *Cubare Conoides parabolicum ex rotatione parabolæ cujuscunque generis circa axem ſuum genitum.*

Sit parameter = 1, erit æquatio ad infinita parabolarum genera (§. 475).

$$y^m = x$$

$$y = x^{1:m}$$

$$y^2 = x^{2:m}$$

$$py^2dx : 2r = px^{2:m}dx : 2r$$

$$\int py^2dx : 2r = mpx^{(2+m):m} : (4+2m)r$$
$$= mpy^2x : (4+2m)r$$

Sit altitudo totius Conoidis $= a$, diameter baſeos $2r$; erit a pro x & r pro y ſubſtituto ſoliditas totius Conoidis $mpr^2a : (4+2m)r = \frac{m}{4+2m}$

$$apr = \tfrac{1}{2}pr . \frac{m}{2+m}a.$$

E. gr. Si parabola genitrix fuerit Apolloniana erit $m = 2$, adeoque $m : (2+m) = 2 : (2+2) = \frac{1}{2}$. Baſis ergo ducenda eſt in dimidiam altitudinem: conſequenter Conoides cylindri ſuper eadem baſi & ejusdem altitudinis ſubduplum (§. 480 *Geom.*).

PRO-

PROBLEMA 55.

150. *Cubare ſphæroides ellipticum ex rotatione ellipſis Apollonianæ circa axem genitum.*

Quoniam ad ellipſin Apollonianam (§. 379. *part. 1.*)

$$y^2 = bx - bx^2 : a$$

$$\text{erit } py^2dx : 2r = pbxdx : 2r - pbx^2dx : 2ar$$

$$\int py^2dx : 2r = pbx^2 : 4r - pbx^3 : 6ar$$

Quodſi pro abſciſſa x ſubſtituatur axis a, prodibit ſoliditas integri ſphæroidis $pba^2 : 4r - pba^3 : 6ar = pba^2 : 4r - pba^2 : 6r = (6pba^2 - 4pba^2) : 24r = pba^2 : 12r$.

COROLLARIUM 1.

151. Quodſi $2r$ ponatur axi conjugato æqualis; erit $4r^2 = ab$ §. 285. *part. 1.*). Unde ſoliditas ſphæroidis habetur $4par^2 : 12r = \frac{1}{3}par$, hoc eſt, ſphæroides ellipticum æquatur Cono, cujus altitudo axi majori a, diameter baſeos axi minori ellipſis genitricis quadruplo $4r$ æqualis (§. 487. *Geom.*).

COROLLARIUM 2.

152. Quoniam Cylindri circumſcripti altitudo $= a$, diameter $= r$, adeoque ſoliditas $= \frac{1}{2}apr$ (§. 480. *Geom.*); erit ſphæroides ellipticum ad cylindrum circumſcriptum ut $\frac{1}{3}apr$, ad $\frac{1}{2}apr$, hoc eſt, ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$, ſeu ut 2 ad 3 (§. 104 *part. 1.*).

COROLLARIUM 3.

153. Si diameter ſphæræ $= a$, erit peripheria circuli maximi (poſita ratione radii ad peripheriam $= r : p$) $= ap : 2r$, conſequenter ſphæra $= a^3p : 12r$. Eſt adeo ſphæroides ellipticum ad ſphæram axe majori a deſcriptam ut $\frac{1}{3}apr$ ad $a^3p : 12r$, hoc eſt, (dividendo per $\frac{1}{3}ap$) ut r ad $a^2 : 4r$, ſeu ut $4r^2$ ad a^2 nempe ut quadratum axis minoris ad quadratum majoris.

COROLLARIUM 4.

154. Si diameter ſphæræ $= 2r$, erit ſoliditas $= \frac{2}{3}pr^2$ (§. 146). Eſt itaque ſphæroides ellipticum ad ſphæram axe minori $2r$ deſcriptam ut $\frac{1}{3}par$ ad $\frac{2}{3}pr^2$, hoc eſt, ut a ad $2r$ (§. 104. *part. 1*), ſeu ut axis major ad minorem $2r$.

PROBLEMA 56.

155. *Cubare Conoides hyperbolicum ex rotatione hyperbolæ Apollonianæ circa axem genitum.*

Quoniam ad hyperbolam ſcalenam (§. 417 *part. 1*)

$$y^2 = bx + bx^2 : a$$

$$\text{erit } \int py^2dx : 2r = pbx^2 : 4r + pbx^3 : 2r$$

Et quia ad hyperbolam æquilateram (§. 461 *part. 1.*)

$$y^2 = ax + x^2$$

$$\text{erit } py^2dx : 2r = (apxdx + px^2dx) : 2r$$

$$\int py^2dx : 2r = apx^2 : 4r + px^3 : 6r$$

COROLLARIUM 1.

156. Si altitudo Conoidis fuerit axi transverſo æqualis, hoc eſt, ſi $x = a$; erit ſoliditas Conoidis in caſu priore $pba^2 : 4r + pba^3 : 6ar = (6pba^2 + 4pba^2) : 24r$

$: 24r = 10pba^2 : 24r = 5pba^2 : 12r$. In caſu poſteriore cum etiam ſit $2r = a$ & $b = a$ (§.461 *part.* 1.) ſoliditas conoidis habetur $5pa^3 : 6a = \frac{5}{6}pa^2$. Quodſi in caſu primo $2r$ ſumatur pro axe conjugato; erit $2r = \sqrt{ab}$ & $4r^2 = ab$: quo valore in expreſſione Conoidis $5pba^2 : 12r$ ſubſtituto prodit $\frac{5}{3}par$.

COROLLARIUM 2.

157. Cylindri circumſcripti ſoliditas eſt in caſu priore $\frac{1}{2}par$ (§. 480. *Geom.*), adeoque ad Conoidis ſoliditatem ut $\frac{1}{2}par$ ad $\frac{5}{3}par$, hoc eſt, ut 3 ad 10 (§. 104. *part.* 1.) In caſu poſteriore cylindrus circumſcriptus eſt $\frac{1}{4}pa^2$, adeoque ad Conoides ut $\frac{1}{4}pa^2$ ad $\frac{5}{6}pa^2$, hoc eſt, ut 6 ad 20, ſeu potius ut 3 ad 10, ut ante.

PROBLEMA 57.

Tab. II. Fig. 2.

158. *Cubare ſolidum ex rotatione Ciſſoidis circa axem* AB *genitum.*

Sit AB $= 1$, AP $= x$, PM $= y$; erit (§. 501. *part.* 1.)

$$y^2 = x^3 : (1-x)$$

$$py^2dx : 2r = px^3dx : 2r(1-x)$$

hoc eſt, quia $2r =$ AB $= 1$,

$$py^2dx : 2r = px^3dx : (1-x).$$

Eſt vero $x^3 : (1-x) = x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8$ &c. in infinitum (§. 42. *part.* 1.). Ergo $py^2dx : 2r = px^3dx + px^4dx + px^5dx + px^6dx + px^7dx + px^8dx$ &c. in infinitum.

Et hinc $\int py^2dx : 2r = \frac{1}{4}px^4 + \frac{1}{5}px^5 + \frac{1}{6}px^6 + \frac{1}{7}px^7 + \frac{1}{8}px^8 + \frac{1}{9}px^9$ &c. definit ſolidum portione APM deſcriptum. Quodſi pro x ſubſtituatur AB $= 1$; prodit ſolidum integrum $\frac{1}{4}p + \frac{1}{5}p + \frac{1}{6}p + \frac{1}{7}p + \frac{1}{8}p + \frac{1}{9}p$ &c. ſeu $p(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}$ &c. in infinitum.)

PROBLEMA 58.

159. *Cubare ſolidum ex rotatione Logiſticæ circa aſymptotum* AH *genitum.* Tab. I. Fig. 8.

In Logiſtica, cujus ſubtangens $= a$, eſt (§. 52)

$$ydx = ady$$

$$dx = ady : y$$

$$py^2dx : 2r = paydy : 2r$$

$$\int py^2dx : 2r = pay^2 : 4r$$

Quodſi pro y ſubſtituatur AB $= r$; erit integrum ſolidum $par^2 : 4r = \frac{1}{4}apr$.

COROLLARIUM 1.

160. Cylindrus, cujus altitudo $= a$, radius baſis $= r$, eſt $\frac{1}{2}apr$ (§. 480. *Geom.*), adeoque ad ſolidum logiſticum ut $\frac{1}{2}a$ ad $\frac{1}{4}a$ hoc eſt, ut 2 ad 1.

COROLLARIUM 2.

161. Si axis transverſus hyperbolæ genitricis & altitudo Conoidis hyperbolici ex ejus rotatione circa axem geniti fuerit a, hoc eſt, ſubtangenti logiſticæ æqualis; erit Conoides hyperbolicum $\frac{5}{3}par$ (§. 156.), adeoque ad ſoli-

dum logiſticum ut $\frac{5}{3}par$ ad $\frac{1}{4}par$, hoc eſt, ut 3 ad 20 (§. 104. *part.* I.).

SCHOLION.

162. *Facile hinc apparet, quod inventis methodo hactenus expoſita expreſſionibus ſolidorum, ea inter ſe facile comparentur unumque in alterum transformetur.*

PROBLEMA 59.

Tab. II. Fig. 25. 163. *Cubare ſolidum ex rotatione parabolæ circa ſemiordinatam* QN *genitum.*

Ex reſolutione problematis 47 (§. 144) manifeſtum eſt, elementum ſolidi eſſe circulum radio MR deſcriptum & in differentiale Rr ipſius RN ductum. Sit itaque ratio radii ad peripheriam $= r : p$, AQ $= r$, AP $= x$, QN $= b$, PM $= y$, erit Rr $= dy$, MR $=$ PQ $=$ AQ-AP $= r - x$, peripheria radio MR deſcripta $= (pr-px) : r$, conſequenter area circuli $(pr^2 - 2prx + px^2) : 2r$ (§. 406 *Geom.*) & hinc elementum ſolidi $\frac{1}{2} prdy - pxdy + px^2dy : 2r$.

Si jam parameter parabolæ 1; erit $y^2 = x$ (§. 352 *part.* 1) & $y^4 = x^2$: quibus valoribus in expreſſione elementi generali ſubſtitutis, erit id $\frac{1}{2} prdy - py^2dy + py^4dy : 2r$. Hujus integrale $\frac{1}{2}pry - \frac{1}{3}py^3 + py^5 : 10r$ indefinite exprimit ſolidum ex rotatione portionis MNR circa NR genitum.

Quodſi pro y^2 ponatur x; habebimus pro eodem ſolido $\frac{1}{2}pry - \frac{1}{3}pxy + px^2y : 10r = p(\frac{1}{2}ry - \frac{1}{3}xy + x^2y : 10r)$.

Denique ſi pro y ſubſtituatur b, pro x vero r; prodibit ſolidum integrum $p(\frac{1}{2}br - \frac{1}{3}br + \frac{1}{10}br) = (30 - 20 + 6)pbr : 60 = \frac{8}{30}pbr = \frac{1}{2}pr . \frac{8}{15}b$, hoc eſt, baſis ſeu circulus radio AQ deſcriptus ducitur in $\frac{8}{15}$ altitudinis QN.

COROLLARIUM

164. Cylindrus ſuper eadem baſi & ejusdem altitudinis eſt $\frac{1}{2}pbr$ (§. 480. *Geom*) adeoque ad ſolidum hoc parabolicum ut $\frac{1}{2}pbr$ ad $\frac{1}{2}pbr . \frac{8}{15}$, hoc eſt, ut 1 ad $\frac{8}{15}$, ſeu ut 15 ad 8 (§. 104 *part.* 1.).

PROBLEMA 60.

165. *Cubare ſolidum ex rotatione ſpatii interminati hyperbolici juxta aſymptotum* CD *tanquam axem genitum.* Tab. II. Fig. 26.

Sit AB $= a$, AC $= b$, CP $= x$, PM $= y$; erit Pp $= dy$, & poſita peripheria radio AB deſcripta $= p$, peripheria radio PC deſcripta $px : a$, quæ ducta in PM $= y$ dat ſuperficiem cylindri parallelogrammo CPMR deſcripti $= pxy : a$ (§. 480 *Geom.*). Hæc vero ſi ulterius ducatur in Pp $= dx$, prodibit cylindrulus cavus, parallelogrammulo PpQM deſcriptus, ſeu elementum ſolidi $= pxydx : a$.

Eſt vero ex natura hyperbolæ intra aſymptotos

$$xy = ab \quad (\S. 460\ part.\ 1.)$$

Quare $\quad y = ab : x$

pxydx:

$pxydx : a = pabxdx : ax = pbdx$

$\int pxydx : a = pbx.$

Quodſi pro x ſubſtituatur a; prodibit ſolidum integrum pba.

COROLLARIUM.

166. Cylindrus ex rotatione parallelogrammi ACSB circa axem CS geniti eſt $\frac{1}{2}pba$ (§. 480. *Geom.*), adeoque ad ſolidum hyperbolicum ut $\frac{1}{2}pba$ ad pba, hoc eſt, ut $\frac{1}{2}$ ad 1, ſeu ut 1 ad 2 (§. 104. *part.* 1.).

PROBLEMA 61.

167. *Metiri ſuperficiem corporis rotatione figuræ* ANQ *circa axem* AQ *geniti.*

RESOLUTIO.

Sit ratio radii ad peripheriam $= r : p$, AP $= x$, PM $= y$, erit Pp = MR $= dx$, mR $= dy$; Mm $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, peripheria radio PM deſcripta $= py : r$, quæ ducta in Mm dat elementum ſuperficiei ſolidi ex rotatione circa axem AQ geniti $py\sqrt{(dx^2+dy^2)} : r$.

Quodſi jam ex natura figuræ ANQ valor ipſius dx^2 ſubſtituatur & elementum integrabile fiat; ſuperficies deſiderata per ſummationem habetur.

PROBLEMA 62.

168. *Invenire ſuperficiem Coni.*

Cum Conus gignatur ex rotatione trianguli ACD circa axem DC; ex æquatione ad triangulum in expreſſione generali ante (§. 167) inventa ſubſtituendus eſt valor ipſius dx^2. Sit nempe CD $= a$, AC $= r$, AP $= x$, PM $= y$; erit (§. 353. *Geom*). Tab. II. Fig. 17.

$$x : y = a : r$$

$$rx = ay$$

$$rdx = ady$$

$$dx^2 = a^2dy^2 : r^2$$

$$py\sqrt{(dx^2+dy^2)} : r = py\sqrt{(a^2dy^2 + r^2dy^2)} : r^2 = pydy\sqrt{(a^2+r^2)} : r^2$$

$$\int py\sqrt{(dx^2+dy^2)} : r = py^2\sqrt{(a^2 + r^2)} : 2r^2.$$

Quodſi pro y ponatur r; prodibit ſuperficies coni integri $= \frac{1}{2}p\sqrt{(a^2+r^2)} = \frac{1}{2}p$. AD: eſt nempe æqualis facto ex ſemiperipheria baſis Coni in latus AD, prorſus ut in elementis Geometriæ demonſtratum.

PROBLEMA 63.

169. *Invenire ſuperficiem ſphæræ.*

Sit diameter circuli genitoris $= 1$, erit elementum arcus Mm (§. 136) $= dx : 2\sqrt{(x-xx)}$; quod ductum in peripheriam radio PM deſcriptam $= 2p\sqrt{(x-xx)}$ producit elementum ſuperficiei ſphæricæ (§. 167) $= pdx$. Hujus integrale

px indefinite metitur ſuperficiem ſegmenti ſphærici, cujus altitudo x.

Quodſi pro x ſubſtituatur diameter 1; erit ſuperficies ſphæræ integræ $= p$ ſeu, ſi $1 = a$, ap.

COROLLARIUM

170. Eſt ergo quodlibet ſegmentum ſuperficiei ſphæricæ ad ſuperficiem ſphæræ integram ut px ad p, ſeu ut x ad 1 (§. 104. *part. 1.*), hoc eſt ut altitudo ſegmenti ad diametrum ſphæræ.

PROBLEMA 64.

171. *Invenire ſuperficiem conoidis parabolici.*

Ad parabolam eſt $adx = 2ydy$ (§. 21).

$$dx^2 = 4y^2dy^2 : a^2$$

$$py\sqrt{(dx^2+dy^2)} : r = py\sqrt{(4y^2dy^2+a^2dy^2)} : ar = pydy\sqrt{(4y^2+a^2)} : ar$$

Fiat $\sqrt{(4y^2+a^2)} = v$

erit $4y^2+a^2 = v^2$

$$8ydy = 2vdv$$

$$ydy = \tfrac{1}{4}vdv$$

$$pydy\sqrt{(4y^2+a^2)} : ar = pv^2dv : 4ar$$

$$\int pydy\sqrt{(4y^2+a^2)} : 4ar = pv^3 : 12ar = (4py^2+pa^2)\sqrt{(4y^2+a^2)} : 12ar.$$

Fiat $y = 0$, relinquetur $pa^2\sqrt{a^2} : 12ar = \tfrac{1}{12}pa^2r$. Unde ſuperficies ſegmenti conoidis parabolici $= (4py^2+pa^2)\sqrt{(4y^2+a^2)} : 12ar - \tfrac{1}{12}pa^2r$.

Quodſi pro y ſubſtituatur r; prodit integra conoidis ſuperficies $= (4pr^2+pa^2)\sqrt{(4r^2+a^2)} : 12ar - \tfrac{1}{12}pa^2r$.

CAPUT V. DE USU CALCULI INTEGRALIS IN METHODO TANGENTIUM INVERSA.

DEFINITIO 9.

172. *Methodus Tangentium inverſa* eſt, qua ex data tangente aut linea quacunque alia, cujus determinatio a tangente pendet, invenitur æquatio ad curvam aut conſtructio curvæ.

COROLLARIUM.

173. Cum expreſſiones differentiales tangentis, ſubtangentis, ſubnormalis & normalis, itemque areæ curvæ ſuperius traditæ fuerint (§. 20. 33. 34. 43); ſi valor datus expreſſioni differentiali æquetur & æquatio differentialis vel ſummetur,

tur, vel, ſi id fieri nequeat, conſtruatur, curva deſiderata innoteſcit.

PROBLEMA 65.

174. *Invenire lineam curvam, cujus ſubtangens* $= 2yy : a$,

Quoniam ſubtangens lineæ Algebraicæ $= ydx : dy$ (§. 20); erit

$$ydx : dy = 2yy : a$$

$$aydx = 2y^2 dy$$

$$adx = 2ydy$$

$$ax = y^2$$

Eſt adeo curva quæſita parabola (§. 351 *part.* 1.) cujus conſtructio ex ſuperioribus manifeſta (§. 363 *part.* 1).

PROBLEMA 66.

175. *Curvam invenire, cujus ſubnormalis eſt conſtans*, e. gr. $= a$.

Quoniam ſubnormalis lineæ Algebraicæ (§. 34) $ydy : dx$; erit

$$ydy = adx$$

$$\tfrac{1}{2}y^2 = ax$$

$$y^2 = 2ax.$$

Eſt adeo curva quæſita parabola, cujus parameter $= 2a$.

PROBLEMA 67.

176. *Invenire curvam, cujus ſubnormalis* $= r - x$.

Quoniam $ydy : dx = r - x$ (§. 34); erit

$$ydy = rdx - xdx$$

$$\tfrac{1}{2}y^2 = rx - \tfrac{1}{2}xx$$

$$y^2 = 2rx - xx$$

Eſt adeo curva quæſita circulus, cujus radius r ſeu diameter $2r$ (§. 341. *part.* 1).

PROBLEMA 68.

177. *Invenire curvam, cujus ſubtangens eſt tertia proportionalis ad* r-x & y.

Quoniam (§. 20)

$$r-x : y = y : \frac{ydx}{dy}$$

erit $r-x : y = dy : dx$ (§. 104 *part.* 1)

$$rdx - xdx = ydy$$

$$rx - \tfrac{1}{2}x^2 = \tfrac{1}{2}y^2$$

$$2rx - xx = y^2$$

Eſt adeo curva quæſita denuo circulus (§. 341 *part.* 1).

PROBLEMA 69.

178. *Invenire curvam, cujus ſubtangens eſt tertia proportionalis ad* r + x & y.

Quoniam (§. 20)

$$r+x : y = y : \frac{ydx}{dy}$$

erit $r+x : y = dy : dx$ (§. 104 *part.* 1).

$$rdx + xdx = ydy$$

$$rx + \tfrac{1}{2}x^2 = \tfrac{1}{2}y^2$$

 Eſt

$$2rx + x^2 = y^2$$

Eſt adeo curva quæſita hyperbola æquilatera, cujus axes conjugati & parameter $= 2r$.

PROBLEMA 70.

179. *Invenire curvam, in qua ſubtangens multiplo abſciſſæ æqualis.*

Quoniam (§. 20)

$$mx = ydx : dy$$

erit $mxdy = ydx$

$$mxdx - ydy = 0$$

Ut hæc æquatio integrari poſſit, multiplicetur per $y^{m-1} : x^2$

erit $(my^{m-1} xdy - y^m dx) : x^2 = 0$

$$y^m : x = a^{m-1}$$

$$y^m = a^{m-1} x$$

Satisfaciunt ergo propoſito infinita parabolarum genera.

PROBLEMA 71.

180. *Invenire lineam, in qua ſubtangens ſemiordinatæ æqualis.*

Quoniam (§. 20)

$$ydx : dy = y$$

$$ydx = ydy$$

$$dx = dy$$

$$x = y$$

Patet adeo, lineam quæſitam eſſe rectam ad cathetum trianguli rectanguli æquicruri tanquam axem relatam, ſeu hypothenuſam trianguli rectanguli æquicruri (*§. 352 Geom.*). Quodſi vero x ſumatur pro arcu circuli; erit linea quæſita cyclois (*§. 527 part. 1 & §. 50 part. 2*).

PROBLEMA 72.

181. *Invenire curvam, cuius ſubnormalis* $= \sqrt{ax}$.

Quoniam $ydy : dx = \sqrt{ax}$ (§. 34)

erit $ydy = a^{1:2} x^{1:2} dx$

$$2y^2 = \tfrac{2}{3} a^{1:2} x^{1:2}$$

$$y^2 = \tfrac{4}{3}\sqrt{ax^3} = \tfrac{2}{3}\sqrt{4ax^3}$$

Patet adeo, quadrata ſemiordinatarum hujus curvæ exprimere ſpatia parabolæ, cujus parameter $4a$ (§. 91). Sunt igitur ſemiordinatæ ipſæ mediæ proportionales inter abſciſſas & $\tfrac{2}{3}$ ſemiordinatarum parabolæ circa communem axem deſcriptæ (*§. cit.*)

SCHOLION.

182. *Curva hæc dici poteſt Quadratrix parabolæ. Solent enim Geometræ* Quadratricem *alicujus curvæ appellare curvam circa eundem axem deſcriptam, cujus ſemiordinatis datis datur quadratura partium reſpondentium in altera curva. E. gr. ſi fuerit ut in noſtro caſu APMA* $= PN^2$, *vel* APMA $=$ AP.PN, *vel* APMA $=$ PN. a *&c. erit* AND quadratrix *ipſius* AMC. Tab. II. Fig. 27.

PROBLEMA 73.

183. *Invenire curvam, cuius area indefinite exprimitur per* $a\sqrt{x}$.

Quo-

Quoniam differentiale areæ $= ydx$ (§. 88);

erit $\frac{1}{2}ax^{-\frac{1}{2}}dx = ydx$

$\frac{1}{2}ax^{-\frac{1}{2}} = y$

$\frac{1}{4}a^2x^{-1} = \frac{1}{4}a^2 : x = y^2$

$\frac{1}{4}a^2 = xy^2$

Eſt adeo curva hyperbola ſecundi generis intra aſymtotos.

COROLLARIUM.

184. Cum $\sqrt{x}$ ſit ſemiordinata parabolæ, cujus parameter $= 1$; evidens eſt parabolam Apollonianam eſſe quadratricem hyperbolæ intra aſymptotos, ad quam $\frac{1}{4}aa = xy^2$.

PROBLEMA 74.

185. *Invenire Curvam, cuius quadratura indefinita* $= x^3 : a$

Quoniam $x^3 : a = \int ydx$

erit $3x^2dx : a = ydx$

$x^2 = \frac{1}{3}ay$

Tab. II. Fig. 28. Eſt adeo curva quæſita parabola exterior, cujus parameter $\frac{1}{3}a$. Sit enim $AQ = PM = x$, $PQ = AM = y$; erit $\frac{1}{3}ay = x^2$ (§. 351 *part.* 1).

PROBLEMA 75.

186. *Invenire curvam, cuius area* $= a\sqrt{(aa+xx)}$.

Quoniam $axdx : \sqrt{(aa+xx)} = ydx$

$ax : \sqrt{(aa+xx)} = y$

$a^2x^2 : (aa+xx) = y^2$

hoc eſt, $y^2 : x^2 = a^2 : aa+xx$

Quæ analogia naturam curvæ definit, cujus quadratrix eſt hyperbola æquilatera, axibus conjugatis & parametro exiſtentibus a (§. 461 *part.* 1 & §. 182 *part.* 2).

PROBLEMA 76.

187. *Invenire curvam, cujus area* $= x\sqrt{(aa+xx)}$.

Quon. $\dfrac{x^2dx}{\sqrt{(aa+xx)}} + dx\sqrt{(aa+xx)} = ydx$

erit $\dfrac{2x^2+aa}{\sqrt{(aa+xx)}} = y$

$(2x^2+aa)^2 = y^2(aa+xx)$

$y^2 : aa+2xx = aa+2xx : aa+xx$

Quæ analogia definit itidem naturam curvæ, cujus quadratrix eſt hyperbola æquilatera.

SCHOLION.

188. *Ex problematibus his apparet, quod data quadratrice ſemper inveniatur quadranda facili negotio. Et hac quidem methodo inveniri poſſunt curvæ innumeræ quadrabiles, conſtruique curvarum quadrabilium, ſeu, quod perinde eſt, formularum ſummabilium canones.*

PROBLEMA 77.

189. *Invenire curvam, cujus ſubtangens eſt linea conſtans* a.

Quoniam $ydx : dy = a$ (20)

erit

erit $dx = ay^{-1}\,dy$

$\int dx = x = \int ay^{-1}dy$

Quodſi $ay^{-1}dy$ multiplicetur per a; erit $a^2y^{-1}dy$ elementum hyperbolæ intra aſymptotos (§. 108) & quidem æquilateræ, ſi aſymptoti jungantur ad angulos rectos (§. 466 *part. I*). Quodſi ergo y ſumatur pro abſciſſa, erit reſpondens ſemiordinata $x = a\int y^{-1}dy$ æqualis ſpatio hyperbolico aſymptotico per conſtantem a, quæ latus potentiæ in hyperbola æquilatera (§. 435 *part. I*), diviſo. Unde conſtructio curvæ quæſitæ a Quadratura hyperbolæ pendet.

COROLLARIUM.

190. Quoniam linea, ad quam $x = \int ay^{-1}dy$, eſt logarithmica ad aſymptotum relata (§. 52) atque x in aſymptoto ſumta logarithmus ſemiordinatæ ipſi reſpondentis (§. 506 *part. I*); erit quoque $\int ay^{-1}dy$ logarithmus ejusdem ſemiordinatæ y, conſequenter $\int ay^{-1}dy = a\int dy : y = ly$, ſi ly denotet logarithmum ipſius y in logiſtica ſumtum, cujus ſubtangens $= a$. Unde liquet, quomodo differentiale logarithmi aut quantitatis, quam logarithmus ingreditur, ſit inveniendum. Quoniam enim $ady : y = dly$ erit etiam $dly^n = nly^{n-1}ady : y$, ubi a notat ſubtangentem logiſticæ.

PROBLEMA 78.

191. *Invenire curvam, in qua eſt ut* a *ad* y *ita* $\sqrt{(aa-yy)}$ *ad ſubtangentem.*

Quoniam *per hypoth.* & §. 20

$$a : y = \sqrt{(aa-yy)} : \frac{ydx}{dy}$$

hoc eſt, $a : 1 = dy\sqrt{(aa-yy)} : dx$

erit $dy\sqrt{(aa-yy)} : a = dx$

$\int dy\sqrt{(aa-yy)} : a = x$

Quoniam $\int dy\sqrt{(aa-yy)}$ eſt portio circuli CDPM, cujus radius AC $= a$, abſciſſa PC $= y$: conſtructio curvæ a quadratura circuli pendet, hoc eſt, circulus eſt quadratrix curvæ quæſitæ (§. 182). Retentis nempe abſciſſis PC, ſemiordinatæ x erunt æquales ſpatio PMDC per conſtantem a diviſo. Tab. I. Fig. 3.

PROBLEMA 79.

192. *Invenire curvam, in qua eſt ut* a *ad* y *ita* $\sqrt{(aa+yy)}$ *ad ſubtangentem.*

Quoniam *per hypoth.* & §. 20

$$a : y = \sqrt{(aa+yy)} : \frac{ydx}{dy}$$

hoc eſt, $a : 1 = dy\sqrt{(aa+yy)} : dx$

erit $dy\sqrt{(aa+yy)} : a = dx$

$\int dy\sqrt{(aa+yy)} : a = x$

Quoniam $\int dy\sqrt{(aa+yy)} : a$ eſt arcus parabolæ AM, cujus parameter $2a$ (§. 129); ſi ſemiordinata parabolæ PM ſumatur pro abſciſſa curvæ quæſitæ, erit ſemiordinata Tab. II. Fig. 19.

ta

ta ejusdem arcui parabolico AM æqualis.

SCHOLION

193. *Apparet adeo, interdum conſtructionem pendere a rectificatione curvarum. Præſtat autem eam ad curvarum potius rectificationem, quam quadraturam reducere, quia in priori caſu praxis eſt facilior, ubi arcum filo metiri datur. In poſteriori autem ſpatiorum quadratura ope ſerierum infinitarum definienda eſt in numeris prope veris & inde ſimiliter in iſtiusmodi numeris ſemiordinatæ curvarum quæſitarum ſunt computandæ.*

PROBLEMA 80.

194. *Invenire curvam, in qua eſt ſubtangens ad* y *ut quantitas conſtans* r *ad* $\sqrt{(r^2-y^2)}$.

Quoniam *per hypoth. &* §. 20

$$\frac{y\,dx}{dy} : y = r : \sqrt{(r^2-y^2)}$$

hoc eſt, $dx : dy = r : \sqrt{(r^2-y^2)}$

erit $dx = r\,dy : \sqrt{(r^2-y^2)}$

$$x = \int r\,dy : \sqrt{(r^2-y^2)}$$

Quia $\int r\,dy : \sqrt{(r^2-y^2)}$ eſt arcus circuli AM, cujus radius AC $= r$, PM $= y$ (§. 135); conſtructio curvæ pendet a rectificatione peripheriæ circuli. Nempe ſi ſemiordinatæ in circulo PM ſumantur pro abſciſſis curvæ quæſitæ; erunt ejusdem ſemiordinatæ arcubus AM æquales.

PROBLEMA 81.

195. *Invenire curvam, in qua ſubtangens eſt ad* y *ut* r^2 *ad* r^2+y^2.

Quoniam *per hypoth &* § 20

$$\frac{y\,dx}{dy} : y = r^2 : r^2+y^2$$

hoc eſt, $dx : dy = r^2 : r^2+y^2$

erit $dx = r^2dy : (r^2+y^2)$

Quoniam $\int r^2dy : (r^2+y^2)$ eſt elementum arcus BM, cujus tangens BK $= y$ (§. 137); evidens eſt, conſtructionem curvæ quæſitæ denuo pendere a rectificatione arcuum circuli indefinita. Sumtis nempe tangentibus arcuum BK pro abſciſſis curvæ quæſitæ; ſemiordinatæ ejusdem erunt arcubus BM æquales, radio circuli exiſtente *r*.

CAPUT VI.

De USU CALCULI INTEGRALIS IN LOGARITHMORUM DOCTRINA.

PROBLEMA 82.

196. *Dato numero, invenire logarithmum.*

Sit Logarithmicæ ordinata AB $=1$, eademque ſubtangenti, quæ con- *Tab.* III. *Fig.* 30.

ſtans eſt (§. 52) æqualis, erit PM numerus unitate major, QN numerus unitate minor, AP logarithmus numeri unitate majoris, QN logarithmus unitate minoris.

Quodſi jam differentia inter AB & PM ſit y; erit PM $= 1 + y$, conſequenter AP ſeu logarithmus unitate majoris numeri $\int dy:(1+y)$ (§. 190). Eſt vero $1:(1+y) = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4$ &c. in infinitum (§. 43 *part.* 1). Ergo $dy:(1+y) = dy - ydy + y^2dy - y^3dy + y^4dy$ &c. in infinitum, conſequenter $\int dy:(1+y)$, ſeu logarithmus numeri $1+y$ unitate majoris, $= y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum.

Quodſi differentia inter AB & QN ſit y, erit QN $= 1 - y$, conſequenter AQ ſeu logarithmus numeri unitate minoris $= \int -dy:(1-y)$. Eſt vero $-1:(1-y) = -1 - y - y^2 - y^3 - y^4 -$ &c. in infinitum (§. 43 *part.* 1). Ergo $-dy:(1-y) = -dy - ydy - y^2dy - y^3dy - y^4dy$ &c. in infinitum, conſequenter $\int -dy:(1-y)$, ſeu logarithmus numeri unitate minoris, $= -y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum.

COROLLARIUM 1.

Tab. II. Fig. 29. 197. Si latus potentiæ hyperbolæ AB vel BC fuerit $= 1$, BP $= y$; erit AP $= 1 + y$ & ſpatium hyperbolicum aſymptoticum $= y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. infinitum (§. 108). Et ubi BQ $= y$, erit AQ $= 1 - y$, adeoque (ſi QN $= v$) ob $1 = v - vy$ (§. 448 *part.* 1), elementum ſpatii hyperbolici aſymptotici $-1ydy:(1-y)$, conſequenter ſpatium $= -y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum (§. 108). Poſſunt ergo etiam logarithmi per hyperbolam exhiberi: nimirum ſi latus potentiæ AB $= 1$, abſciſſa AP eſt numerus unitate major, ſpatium aſymptoticum BCMP logarithmus numeri unitate majoris; ſimiliter abſciſſa AQ eſt numerus unitate minor & ſpatium hyperbolicum aſymptoticum QNCB logarithmus numeri unitate minoris.

COROLLARIUM 2.

198. Quodſi $y = 1$, erit $1 + y = 2$; adeoque logarithmus hyperbolicus binarii $= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ &c. in infinitum.

COROLLARIUM 3.

199. Quoniam logarithmus ipſius $1:(1+x)$ & numeri integri $1+x$ idem eſt (§. 317 *Arithm.*), fractio vero $1:(1+x)$ numerus unitate minor; ſi pro $1-y$ ponatur $1:(1+x)$, formula poſterior inveniendis logarithmis tam numerorum unitate majorum, quam minorum ſatisfacit. Nempe cum ſit ex hypotheſi

$$1 - y = 1:(1+x)$$

erit $1 - 1:(1+x) = y$

hoc eſt, $\frac{1+x-1}{1+x} = \frac{x}{1+x} = y$

adeoque in formula $y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c, pro y ſubſtitui debet $x:(1+x)$

$(1+x)$ ſi numeri unitate majoris logarithmus deſideretur.

SCHOLION.

200. *Formula poſterior ſi in caſu quoque priore, ubi numerus, cujus logarithmus quæritur, unitate major, adhibetur, inventio logarithmi faciliori opera abſolvitur, quia ſeries citius convergit, quam ſi priori formula utamur. Enimvero probe notandum, logarithmos hyperbolicos coincidere cum Neperianis adeoque diverſos eſſe a Briggianis, quibus communiter utimur. Cum autem hyperbolici ſint ad Briggianos ut logarithmus denarii hyperbolicus ad logarithmum denarii Briggianum, ſitque logarithmus denarii hyperbolicus* 2.302585092994 &c. *Briggianus* 1.000000000000; *hyperbolici ad Briggianos, quibus vulgo utimur, facile reducuntur.*

PROBLEMA 83.

201. *Dato logarithmo invenire numerum.*

Sit logarithmus l, numerus $1+y$ erit $l = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. Quare cum $y = l + bl^2 + (2b^2 - c)\, l^3 + (5bc - 5b^3 + d)\, l^4 + (14b^4 + 6bd - 21b^2c + 3c^2 - e)\, l^5$ &c. & (ob $a = 1$) $b = -\frac{1}{2}$, $c = +\frac{1}{3}$, $d = -\frac{1}{4}$, $e = +\frac{1}{5}$ &c. (§.330 *part.* 1); erit

$$2b^2 - c = \tfrac{2}{4} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$$

$$5bc - 5b^3 - d = -\tfrac{5}{6} + \tfrac{5}{8} + \tfrac{1}{4} = \frac{-40+30-12}{48} = \frac{2}{48} = +\frac{1}{24}$$

$$14b^4 + 6bd - 21b^2c + 3c^2 - e = \tfrac{14}{16} + \tfrac{6}{8} - \tfrac{21}{12} + \tfrac{3}{9} - \tfrac{1}{5} = \tfrac{7}{8} + \tfrac{6}{8} - \tfrac{14}{8} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5} = -\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5} = \frac{40-15-24}{120} = +\frac{1}{120}$$

adeoque

$$y = l + \frac{1}{2}l^2 + \frac{1}{6}l^3 + \frac{1}{24}l^4 + \frac{1}{120}l^5 \text{ \&c. in infinit.} = \frac{l}{1} + \frac{l^2}{1.2} + \frac{l^3}{1.2.3} + \frac{l^4}{1.2.3.4} + \frac{l^5}{1.2.3.4.5} \text{ \&c. in infinit.}$$

Quodſi terminus primus dicatur A, ſecundus B, tertius C, quartus D &c. erit $y = l + \frac{1}{2}Al + \frac{1}{3}Bl + \frac{1}{4}Cl + \frac{1}{5}Dl$ &c. in infinitum.

Quoniam vero l eſt logarithmus numeri $1+y$; erit numerus $1+y = 1 + l + \frac{1}{2}Al + \frac{1}{3}Bl + \frac{1}{4}Cl + \frac{1}{5}Dl$ &c. in infinitum.

Si l fuerit logarithmus numeri unitate minoris $1-y$; erit $l = y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. & eodem ut ante modo reperietur $y = l - \frac{1}{2}l^2 + \frac{1}{1.2.3}l^3 - \frac{1}{1.2.3.4}l^4 + \frac{1}{1.2.3.4.5}l^5$ &c. in infinitum, conſequenter $1-y = 1 - \frac{l}{1} + \frac{1}{2}l^2 - \frac{1}{1.2.3}l^3 + \frac{1}{1.2.3.4}l^4 - \frac{1}{1.2.3.4.5}l^5$ &c. in infinitum.

Quod ſi terminus primus dicatur A, ſecundus B, tertius C &c. erit $y = l - \frac{1}{2}Al + \frac{1}{3}Bl - \frac{1}{4}Cl + \frac{1}{5}Dl$ &c. in infinitum, conſequenter $1-y = 1 - l + \frac{1}{2}Al - \frac{1}{3}Bl + \frac{1}{4}Cl - \frac{1}{5}Dl$ &c. in infinitum.

PROBLEMA 84.

202. *Dato ſinu, invenire logarithmum.*

Sit radius $= 1$, coſinus $= x$, erit ſinus $= V(1-xx)$ (§.341 *part.* 1) $= V[(1+x)(1-x)]$. Sed $l(1+x) = x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6$
$l(1-x) = -x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6$

Ergo $l(1-xx) = -\frac{2}{2}x^2 - \frac{2}{4}x^4 - \frac{2}{6}x^6$ (§. 303 *Arithm.*) & $lV(1-xx) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^6$ (§.304 *Arithm*).

PROBLEMA 85.

203. *Data tangente, invenire logarithmum.*

Sit radius, ſeu ſinus totus, hoc eſt, tangens 45° (§ 32 *Trigon.*) $= 1$, tangens arcus 45° majoris $= 1+x$; tangens arcus 45° minoris $= 1-x$: erit logarithmus tangentis in caſu priore $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$ &c. in infinitum; in caſu poſteriore $-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5$ &c. in infinitum (§. 196).

SECTIO III. DE CALCVLO EXPONENTIALI.

CAPVT I. De NATVRA CALCVLI EXPONENTIALIS.

DEFINITIO 10.

204. *Calculus exponentialis* eſt methodus differentiandi quantitates exponentiales & differentialia exponentialium ſummandi.

DEFINITIO 11.

205. *Quantitas exponentialis* eſt dignitas, cujus exponens variabilis, e. gr. x^x, a^x.

PROBLEMA 86.

206. *Quantitatem exponentialem differentiare.*

RESOLUTIO.

Non alia re opus eſt, quam ut quantitates exponentiales ad logarithmicas revocentur: quo facto, differentiatio ſuccedit per §.190).

E. gr. Quæritur differentiale quantitatis exponentialis x^y. Fiat

$$x^y = z$$

erit $ylx = lz$ (§.307 *Arithm.*)

$lxdy + ydx : x = dz : z$ (§. 190)

zlxdy

$zlxdy + zydx : x = dz$

hoc eſt, $x^y lxdy + yx^{y-1}dx = dz$

Sit quantitas exponentialis differentianda ſecundi gradus v^{x^y}. Fiat, ut ante,

$$v^{x^y} = z$$

erit $x^y lv = lz$ (§. 307 *Arithm*)

$$(x^y lxdy + yx^{y-1}dx) lv + x^y dv : v = dz : z \text{ (§. 190)}$$

$$z (x^y lxdy + yx^{y-1}dx) lv + zx^y dv = dz,)$$

hoc eſt,

$$v^{x^y} (x^y lxdy + yx^{y-1}dx) lv + v^{x^y} v^{-1} x^y dv = dz,)$$

ſeu

$$v^{x^y} x^y lxlvdy + v^{x^y} yx^{y-1} dvdx + v^{x^y} v^{-1} x^y dv = dz.$$

Eadem ratione inveniri poteſt differentiale quantitatis exponentialis cujuscunque alterius.

PROBLEMA 87.

207. *Differentiale quantitatem exponentialem involvens integrare.*

Sit differentiale integrandum $x^x dx$. Fiat

$$x = 1 + y$$

erit $lx = l(1 + y)$
& $dx = dy$

$x^x dx = xlxdx$ (§. 307 *Arithm.*) $= l(1+y)(1+y)dy$.

Eſt vero $l(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum (§. 196

Ergo $l(1+y)(1+y)dy = (1+y)dy (y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum $=$ (multiplicatione actu facta)

$ydy - \frac{1}{2}y^2dy + \frac{1}{3}y^3dy - \frac{1}{4}y^4dy + \frac{1}{5}y^5dy$ &c.

$+ y^2dy - \frac{1}{2}y^3dy + \frac{1}{3}y^4dy - \frac{1}{4}y^5dy$ &c.

h.e. $ydy + \frac{1}{2}y^2dy - \frac{1}{6}y^3dy + \frac{1}{12}y^4dy - \frac{1}{20}y^5dy$ &c.

Unde tandem habetur $\int x^x dx = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{24}y^4 + \frac{1}{60}y^5 - \frac{1}{120}y^6$ &c. $= \frac{1}{0.1.2}y^2 + \frac{1}{1.2.3}y^3 - \frac{1}{2.3.4}y^4 + \frac{1}{3.4.5}y^5 - \frac{1}{4.5.6}y^6$ &c. in infinitum: in qua ſerie $y = x - 1$.

Sit differentiale integrandum $(1+y)^{1+y}dy$. Fiat

$$(1+y)^{1+y} = 1 + v$$

erit $(1+y)l(1+y) = l(1+v)$

hoc eſt, $(1+y)(y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum$) = v - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 -$

$\frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{5}v^5$ &c. in infinitum (§. 196).

ſeu per calculum præcedentem $y + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{12}y^4 - \frac{1}{20}y^5$ &c. in infinitum $= v - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{5}v^5$ &c. in infinitum.

Fiat porro

$$v = y + ky^2 + my^3 + ny^4 + py^5 \text{ \&c.}$$

erit

$$v^2 = +y^2 + 2ky^3 + k^2y^4 + 2kmy^5 + 2my^4 + 2ny^5$$

$$v^3 = +y^3 + 3ky^4 + 3k^2y^5 + 3my^5$$

$$v^4 = +y^4 + 4ky^5$$

$$v^5 = +y^5$$

(§. 87 *part.* 1). Unde

$$v = y + ky^2 + my^3 + ny^4 + py^5 \text{ \&c.}$$

$$-\tfrac{1}{2}v^2 = -\tfrac{1}{2}y^2 - ky^3 - \tfrac{1}{2}k^2y^4 - kmy^5 - my^4 - ny^5$$

$$+\tfrac{1}{3}v^3 = +\tfrac{1}{3}y^3 + ky^4 + k^2y^5 + my^5$$

$$-\tfrac{1}{4}v^4 = -\tfrac{1}{4}y^4 - ky^5$$

$$+\tfrac{1}{5}v^5 = +\tfrac{1}{5}y^5$$

$$-y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{6}y^3 - \tfrac{1}{12}y^4 + \tfrac{1}{20}y^5 = 0$$

Habemus ergo

$$1 - 1 = 0 \qquad k - \tfrac{2}{2} = 0 \qquad m - k + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6} = 0$$

$$1 = 1 \qquad k = 1 \qquad m = 1 - \tfrac{3}{6} = \tfrac{1}{2}$$

$$n - \tfrac{1}{2}k^2 - m + k - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{12} = 0$$

$$n = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - 1 + \tfrac{4}{12} = \tfrac{1}{3}$$

$$p - km - n + k^2 + m - k + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{20} = 0$$

$$p = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - 1 - \tfrac{1}{2} + 1 - \tfrac{5}{20} = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{4}{12} - \tfrac{3}{12} = \tfrac{1}{12}$$

Conſequenter

$$(1+y)^{1+y} = 1 + v = 1 + y + y^2 + \tfrac{1}{2}y^3 + \tfrac{1}{3}y^4 + \tfrac{1}{12}y^5 \text{ \&c. in infinitum.}$$

Quare differentiale ad integrandum propoſitum $(1+y)^{1+y}dy = dy + ydy + y^2dy + \frac{1}{2}y^3dy + \frac{1}{3}y^4dy + \frac{1}{12}y^5dy$ &c. in infinitum, adeoque $\int(1+y)^{1+y}dy = y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{15}y^5 + \frac{1}{60}y^6$ &c.

PROBLEMA 88.

208 *Quantitatem exponentialem, conſequenter curvam exponentialem, cujus æquatio datur, conſtruere.*

RESOLUTIO.

Quantitates exponentiales reducendæ ſunt ad Logarithmicas, quæ per abſciſſas Logarithmicæ exhiberi poſſunt.

E. gr. Sit conſtruenda curva exponentialis, ad quam $x^x = y$; erit (§. 307 *Arithm.*) $xlx = ly$. Supponamus Logarithmicam MBN deſcriptam & in ea ſemiordinatam AB $= 1$. Sit PM $= x$; erit AP $= lx$. Eſt vero $1 : lx = x : ly$ (§. 269 *Arithm.*). Ergo ly reperiri poteſt (§. 256 *Geom.*): cui ſi æqualis in axe Logiſticæ ſumatur AH, erit HI $= y$ (§. 506 *part.* 1). Quodlibet adeo curvæ exponentialis punctum G reperitur ſequentem in modum: *Tab. III. Fig. 30.*

Fiat AC $= x$ & ducatur MC ipſi AP parallela, quæ Logiſticam in M ſecabit; erit MC ($=$ AP) $= lx$. Fiat CD $=$ AB $= 1$ & DE $=$ AC, ducaturque LE ipſi MC parallela; erit LE $= ly$. Ducatur LH ipſi EA parallela; erit HI $=$

HI $= y$. Quodſi ergo AC ſumatur pro axe curvæ exponentialis fiatque CG $=$ HI; erit G punctum in curva quæſita.

Porro cum $x = o$, erit $ly = o$, quia x eſt logarithmus ipſius y, ex natura Logiſticæ. Sed o eſt logarithmus unitatis. Ergo y eſt unitas, conſequenter $=$ AB. Quare ſi fiat AF $=$ AB; erit F punctum curvæ exponentialis.

Similiter quando AB $= 1 = x$; erit $lx = o$, adeoque ad AB applicata y eſt 1. ſeu ipſi AB æqualis. Quamobrem ſi fiat BK $=$ BA; erit K punctum curvæ exponentialis.

CAPUT II.
De
USU CALCULI EXPONENTIALIS IN CVRVARVM EXPONENTIALIVM SYMPTOMATIS INVESTIGANDIS.

DEFINITIO 12.

209. *Curva exponentialis* eſt, quæ definitur per æquationem exponentialem.

DEFINITIO 13.

210. *Æquatio exponentialis* eſt, quam ingreditur quantitas exponentialis.

PROBLEMA 89.

211. *Invenire ſubtangentem curvæ, in qua* $a^x = y$.

Quoniam $a^x = y$

erit $xla = ly$

$ladx = dy : y$ (§. 206)

$dx = dy : yla$

Ergo ſubtangens $ydx : dy$ (§. 20) $= ydy : ylady = 1 : la$.

Conſtructio. Sit deſcripta Logiſtica quæcunque MBN & in ea AB $= 1$. Fiat AC $= a$ & ducatur que CM ipſi AP & MP ipſi AC parallela: erit PM $=$ AC $= a$ & AP $= la$ (§. 506 *part.* 1). Fiat porro PQ $=$ AB $= 1$ itemque QT ipſi AB parallela; erit TQ $= 1 : la$ (§. 269 *Arithm.* & §. 256 *Geom.*). Tab. III. Fig. 31.

COROLLARIUM.

212. Quoniam curvæ ſubtangens $1 : la$ conſtans; æquatio propoſita ad Logarithmicam eſt.

SCHOLION.

213. *Nempe ſi ſubtangens Logiſticæ fuerit* $1 : la$; *ea definitur per* $a^x = y$.

PRO-

PROBLEMA 90.

Tab. I. Fig. 8. 214. *Quadrare ſpatium Logiſticum interminatum HPMI.*

Sit Logiſticæ ſubtangens PT = 1 : *la*; PM = y, P*p* = *dx*; erit

$a^x = y$ (§. 212).

$xla = ly$

$ladx = dy : y$ (§. 206)

$dx = dy : yla$

$ydx = ydy : yla = dy : la$

$\int ydx = y : la = y (1 : la) = PM.PT$

COROLLARIUM 1.

215. Spatium Logiſticium interminatum HPMI eſt trianguli ſubtangente PT, tangente TM & ſemiordinata PM contenti duplum (§. Geom)

COROLLARIUM 2.

216. Quoniam Spatium HPMI = PM. PT & ISQH = SQ. PT (§. 214;) erit QPMS = (PM-SQ) PT, hoc eſt, ſpatium inter duas ſemiordinatas interceptum æquale rectangulo ex ſubtangente in differentiam ſemiordinatarum.

PROBLEMA 91.

217. *Cubare ſolidum Logiſticum ex rotatione ſpatii interminati HPMI circa aſymptotum PH geniti.*

Quoniam (§. 214)

$dx = dy : yla$ erit (§. 144)

$py^2dx : 2r = py^2dy : 2ryla = pydy : 2rla$

$\int py^2dx : 2r = py^2 : 4rla.$

COROLLARIUM

218. Eſt ergo ſolidum iſtud logiſticum ad conum, cujus altitudo ſubtangens PT = 1 : *la*, ſemidiameter baſis PM = y ut $py^2 : 4rla$ ad $py^2 : 6rla$, hoc eſt, ut $\frac{1}{4}$ ad $\frac{1}{6}$, ſeu ut 6 ad 4 aut ut 3 ad 2 (§. 15. *part.* 1.)

PROBLEMA 92.

219. *Determinare ſubnormalem Logiſticæ.*

Quoniam $ladx = dy : y$ (§. 214)

erit $dy = yladx$

$ydy : dx = y^2ladx : dx$ (§. 34)

$= y^2la = y^2 : \frac{1}{la}.$

Eſt adeo ſubnormalis tertia proportionalis ad ſubtangentem PT = 1 : *la* & ſemiordinatam PM.

COROLLARIUM.

220. Quodſi ergo parabola deſcribatur, cujus parameter ſubtangenti logiſticæ æqualis; ſemiordinatæ parabolæ eædem ſunt cum ſemiordinatis logiſticæ, illius autem abſciſſis hujus ſubnormales æquantur.

PROBLEMA 93.

221. *Determinare ſubtangentem curvæ exponentialis, ad quam* $x^x = y$.

Quo-

Quoniam $xlx = ly$

erit $lxdx + xdx : x = dy : y$

$ylxdx + ydx = dy$

Ergo ſubtangens $ydx : dy = ydx : (ylxdx + ydx) = 1 : (lx + 1)$.

Eſt itaque PT tertia proportionalis ad AB + AP $= 1 + lx$ & AB $= 1$ (§. 208).

PROBLEMA 94.

222. *Determinare ſubnormalem curvæ, ad quam* $x^x = y$.

Quia $ylxdx + ydx = dy$ (§. 221); erit ſubnormalis $ydy : dx = (y^2lxdx + y^2dx) : dx$ (§. 34) $= y^2lx + y^2 = y^2(lx + 1)$

Quærenda igitur eſt ad AB $= 1$ & CG $= y$ tertia proportionalis y^2 & hinc porro ad AB $= 1$ AB + AP $= 1 + lx$ atque lineam inventam y^2 quarta proportionalis.

PROBLEMA 95.

223. *Determinare minimam applicatam SR in curva exponentiali, ad quam* $x^x = y$.

Quoniam $ylxdx + ydx = dy$ (§. 221); fiat

$ylxdx + ydx = 0$ (§. 61).

erit $lx + 1 = 0$

$1 = -lx$.

Fiat ergo AT $=$ AB $= 1$; erit TV $=$ AR $= x$ (§. 506 *part.* 1).

Quodſi pro lx in æquatione curvæ $xlx = ly$ ſubſtituatur valor modo inventus -1; prodibit $x = -ly$. Fiat igitur AQ $=$ VT $= -x$; erit NQ $= y$ (§. *cit. part.* 1).

PROBLEMA 96.

224. *Quadrare curvam exponentialem, ad quam* $x^x = y$.

Quoniam elementum areæ ydx (§. 87); erit area curvæ $= \int x^x dx = \int xlxdx =$ (ſi pro x ponatur $1 + v$) $\frac{1}{0.1.2}v^2 + \frac{1}{1.2.3}v^3 - \frac{1}{2.3.4}v^4 + \frac{1}{3.4.5}v^5 - \frac{1}{4.5.6}v^6$ &c. in infinitum.

PROBLEMA 97.

225. *Invenire æquationem ad curvam, cujus ſubtangens* $= 1 : (1 + lx)$.

Quoniam $1 : (1 + lx) = ydx : dy$ (§. 20)

erit $dy = y(1 + lx)dx$

$dy : y = dx + lxdx$

$\int dy : y = ly \quad \int(dx + lxdx) = xlx$

$ly = xlx$

$y = x^x$ (§. 307 *Arithm.*)

PROBLEMA 98.

226. *Invenire æquationem ad curvam, cujus ſubnormalis* $y^2(lx + 1)$.

Quoniam $y^2(lx + 1) = ydy : dx$ (§. 34)

erit $y^2(lx+1)dx = ydy$

$\overline{} y^2$

$lxdx + dx = dy : y$

$xlx = ly$ (§.190)

$x^x = y$ (§.307 *Arithm.*)

PROBLEMA 99.

227. *Invenire æquationem ad curvam, cujus ſubnormalis* y^2la.

Quoniam $y^2la = ydy : dx$ (§.34)

erit $y^2ladx = ydy$

$ladx = dy : y$

$xla = ly$ (§.190)

$a^x = y$ (§.307 *Arithm.*)

Eſt ergo Curva quæſita Logarithmica vulgaris ſeu Logiſtica (§.212).

PROBLEMA 100.

228. *Invenire æquationem ad curvam, cujus area* $(2x^2lx - x^2) : 4la$.

Quoniam (§.86)

$(4xlxdx + 2xdx - 2xdx) : 4la = ydx$

erit $4xlx = 4yla$

$xlx = yla$

$x^x = a^y$ (§.307 *Arithm.*).

Tab. Curva hæc vi probl. 88 (§.208)
III. ita conſtruitur ope Logarithmicæ
Fig. vulgaris MBN. Sit nempe AB =
32. 1; quæ in infinitum producatur. Fiat AD = a & AC = x, ducanturque DI & CM ipſi AP, HI & PM ipſi AC parallelæ; erit DI = AH = la & CM = DL = AP = lx (§.208). Fiat AF = AH & ducatur FE ipſi CG parallela, per A vero & E recta AG ipſi CM continuatæ in G occurrens; erit CG = $xlx : la = y$ (§.253 *Geom.*) adeoque punctum G in curva quæſita.

COROLLARIUM 1.

229. Quia $lxdx + dx = lady$ (§.206)

erit $dx = lady : (lx+1)$

$ydx : dy = yla : (lx+1)$ (§.20).

Eſt ergo ſubtangens curvæ hujus exponentialis quarta proportionalis ad AB + AP, CG & conſtantem AH.

COROLLARIUM 2.

230. Quia $(lxdx + dx) : la = dy$ (§.229); erit $ydy : dx = y(lx+1) : la$, adeoque ſubnormalis curvæ hujus exponentialis eſt quarta proportionalis ad conſtantem AH, ad AP + AB & ad CG.

COROLLARIUM 3.

231. Eſt ergo ſubtangens ad ſubnormalem ut $yla : (lx+1)$ ad $y(lx+1) : la$, hoc eſt, ut la^2 ad $(lx+1)^2$ (§.104 *part.* 1). Quare quadratum compoſitæ ex conſtante AB & variabili AP eſt ad quadratum conſtantis AH ut ſubnormalis curvæ exponentialis ad ejus ſubtangentem.

SECTIO IV.
DE CALCVLO DIFFERENTIO-DIFFERENTIALI.
CAPVT I.
DE
NATVRA CALCVLI DIFFERENTIO-DIFFERENTIALIS.

DEFINITIO 14.

232. *Calculus differentio-differentialis* eſt methodus quantitates differentiales denuo differentiandi.

COROLLARIUM.

233. Quoniam ſignum differentialis eſt d (§. 8); differentiale ipſius dx erit ddx; differentiale ipſius ddx erit $dddx$ & ita porro.

HYPOTHESIS.

234. *Scribantur* ddx, dddx, ddddx &c. *compendioſius* d^2x, d^3x, d^4x &c.

DEFINITIO 15.

235. *Differentiale primi gradus* eſt infiniteſima quantitatis ordinariæ, ut dx. *Differentiale ſecundi gradus* eſt infiniteſima quantitatis differentialis primi gradus, veluti ddx, $dxdx$ vel dx^2, $dxdy$. *Differentiale tertii gradus* eſt infiniteſima quantitatis differentialis ſecundi gradus, ut $dddx$, dx^3, $dxdydz$ & ita porro.

PROBLEMA 101.

236. *Invenire regulas differentiandi differentialia quæcunque data.*

RESOLUTIO.

Eodem prorſus modo inveſtigari poſſunt, quo ſupra invenire docuimus regulas differentiandi quantitates ordinarias (§. 17. 19): id quod uno alteroque exemplo oſtendere libet.

E. gr. I. Sit inveſtigandum differentiale ipſius xdx.

Fiat $$xdx = v$$

erit $$dx = v:x$$

$$d^2x = (xdv - vdx):x^2 \quad (§. 19)$$

$$x^2d^2x = xdv - vdx$$

$$vdx + x^2d^2x = xdv$$

hoc eſt, ob $v = xdx$,

$$xdx^2 + x^2d^2x = xdv$$

$$dx^2 + xd^2x = dv$$

Differentiatur ergo xdx eodem modo, quo duæ quantitates ordinariæ ſe mutuo multiplicantes differentiari ſolent (§. 12).

II. Sit differentiale ipſius $x:dx$ inveſtigandum.

Fiat $x : dx = v$

$$x = v dx$$

$$dx = v d^2x + dx dv \text{ per caſ. præc.}$$

$$dx - v d^2x = dx dv$$

hoc eſt, ob $v = x : dx$

$$dx - x d^2x : dx = (dx^2 - x d^2x) : dx = dx dv$$

$$(dx^2 - x d^2x) : dx^2 = dv$$

Differentiatur itaque $x : dx$ eodem modo, quo quantitates ordinariæ ſe mutuo dividentes differentiari ſolent (§. 19).

III. Sit differentiale ipſius dx^2 inveſtigandum.

Fiat $dx^2 = v$

erit $dx = v : dx$

$$d^2x = (dx dv - v d^2x) : dx^2 \text{ per caſ. 2)}$$

$$dx^2 d^2x = dx dv - v d^2x$$

$$v d^2x + dx^2 d^2x = dx dv$$

hoc eſt, ob $v = dx^2$

$$dx^2 d^2x + dx^2 d^2x = 2 dx^2 d^2x = dx dv$$

$$2 dx d^2x = dv$$

Differentialium igitur potentiæ, veluti dx^2, eodem modo differentiantur, quo potentiæ quantitatum ordinariarum differentiari ſolent (§. 193 & ſeqq.)

COROLLARIUM 1.

237. Cum differentialia compoſita aut ſe mutuo multiplicent, aut ſe mutuo dividant, aut potentiæ ſive perfectæ, ſive imperfectæ differentialium primi gradus exiſtant; differentialia eodem modo, quo quantitates ordinariæ, differentiantur.

COROLLARIUM 2.

238. Calculus adeo differentio-differentialis non eſt diverſus a calculo differentiali (§. 232).

PROBLEMA 102.

239. *Differentiare differentialia.*

RESOLUTIO.

Differentialia conſiderentur inſtar ordinariarum quantitatum & ex circumſtantiis caſuum ſpecialium dijudicetur, quænam ſint variabiles, quænam conſtantes. Ipſa vero differentiatio abſolvatur per problemata *cap. 1. ſect. 1.* (vi §. 238).

E. gr. Sit differentiale denuo differentiandum $= 1 : dx$ & 1 quantitas conſtans erit $d(1 : dx) = - d^2x : dx^2$ (§. 19). Similiter reperitur $d(y dy : dx) = (dy^2 + y d^2y) : dx$, ſi dx conſtans; vel $(dx\, dy^2 - y dy d^2x) : dx^2$, ſi dy conſtans.

CAPUT

CAPUT II.
De
USU CALCULI DIFFERENTIO-DIFFERENTIALIS IN INVENIENDO PUNCTO FLEXUS CONTRARII CURVARUM.

DEFINITIO 16.

Tab. III. Fig. 33. n. 1. 240. *Punctum flexus contrarii* eſt punctum M in quo curva flectitur in partes contrarias, ut ſcilicet axi, aut puncto cuidam fixo, convexitatem obvertat, cùm antea concavitatem obverteret. Vocatur *Punctum regreſſus*, ſi curva AMI in contrarias partes flexa regreditur verſus verticem A.

PROBLEMA 103.

241. *Determinare punctum flexus contrarii in curvis, quarum ordinatæ ſunt inter ſe parallelæ.*

RESOLUTIO.

Tab. III. Fig. 33. n. 1. 2. Sint duæ curvæ AMS, quarum una axi concavitatem, altera convexitatem obvertat. Ducatur tangens TM, ſintque PM, *pm* & QS infinitæ propinquæ, & $Pp = pQ$, hoc eſt, dx ſit conſtans. Demittantur ex punctis curvarum M & *m* perpendiculares MR & *mr*. Quoniam *pm* ipſi QS parallela, *per hypoth*: erit $m = S$ (§. 222 *Geom.*) Sed $MR = mr$, *per hypoth.* Ergo $mR = rS$. Eſt vero $Sr > Tr$, quando curva axi concavitatem obvertit, & $Sr < Tr$, quando convexitas curvæ axem reſpicit. Quamobrem in caſu priore differentia ſemiordinatarum dy continuo decreſcit, in poſteriore autem creſcit, ſumta abſciſſæ differentia dx pro conſtante. In puncto itaque flexus contrarii differentia ſemiordinatarum dy eſt minimum aliquod, quando curva primum ad axem concava, deinde convexa; maximum vero aliquod, quando curva ad axem primum convexa, deinde concava. Invenitur adeo illud punctum ſi fiat $ddy = 0$ vel $ddy = \infty$, hoc eſt, ſi ſumta dx pro conſtante, valor ipſius dy denuo differentietur (§. 61).

COROLLARIUM.

242. Quodſi æquatio ad curvam ignotam detur; inveniri poteſt, utrum convexitatem, an concavitatem axi obvertat, ſi ex æquatione differentiali eruatur ratio *mr* & MR. E. gr. In parabola (§. 352 *part.* 1)

$$ax = y^2$$

adeoque $adx = 2ydy$

$$a : 2y = dy : dx$$

hoc eſt, $a : 2\sqrt{ax} = dy : dx$

Creſcente adeo abſciſſa x, decreſcit ratio $a : 2\sqrt{ax}$ (§. 189 *Arithm.*). Quare cum dx ſit conſtans, *per hypoth.* dy decreſcere debet (§. 187 *Arithm.*). Parabola igitur conſtanter concavitatem axi obvertit, adeoque punctum flexus contrarii habet nullum.

PROBLEMA 104.

Tab. III. Fig. 34. 243. *Determinare punctum flexus contrarii M in Cycloide* AMN *ejus naturæ, ut ſit* AQB : BN = AQ : QM.

Sit AQB $= p$, BN $= a$, AB $= 1$, PQ $= v$, AQ $= z$ PM $= y$. Quoniam *per hypoth.*

$$AQB : BN = AQ : QM$$
$$p : a = z : \frac{bz}{p}$$

erit PM = PQ + QM $= v + az : p$. Eſt adeo æquatio ad curvam

$$y = v + az : p$$

unde $dy = dv + adz : p$

Sed $dz = dx : 2\sqrt{(x - xx)}$ (§. 137) & , ob $v = \sqrt{(x - xx)}$ (§. 341 *part.* 1), $dv = (dx - 2xdx) : 2\sqrt{(x - xx)}$.

Ergo $dy = (pdx - 2pxdx + adx) : 2\sqrt{(x - xx)}$. Quodſi adeo dx ſumatur pro conſtante; erit (§. 239) $ddy = -2p\sqrt{(x - xx)}\, dx^2 : 4(x - xx) - (pdx^2 + 4pxdx^2 - adx^2 - 4px^2dx^2 + 2axdx^2) : 4(x - x^2)\, 2\sqrt{(x - xx)} = [-4px + 4px^2 - p + 4px - a - 4px^2 + 2ax]\, dx^2 : 8(x - x^2)\sqrt{(x - xx)} = (2ax - p - a)\, dx^2 : 8(x - x^2)\sqrt{(x - x^2)}$. Quare (§. 241)

$$(2ax - p - a)\, dx^2 : 8(x - x^2)\sqrt{(x - x^2)} = 0$$

$$2ax - p - a = 0$$

$$2ax = a + p$$

$$x = \tfrac{1}{2} + p : 2a$$

Ergo CP = AP - AC $= x - \frac{1}{2} = p : 2a$. Eſt adeo $a : \frac{1}{2} = p :$ CP

BN : AQB = BC : CP.

PROBLEMA 105.

244. *Determinare punctum flexus contrarii in curva, ad quam* $axx = (xx + aa)\, y$.

Quoniam $axx = (xx + aa)y$

erit $axx : (xx + aa) = y$

$$\frac{2ax^3dx + 2a^3xdx - 2ax^3dx}{(xx + aa)^2} = dy$$

hoc eſt, $$\frac{2a^3xdx}{x^4 + 2a^2x^2 + a^4} = dy$$

Quodſi adeo dx ſumatur pro conſtante, reperietur (§. 239).

$[(2a^3x^4 + 4a^5x^2 + 2a^7)\, dx^2 - (8a^3x^4 - 8a^5x^2)\, dx^2] : (x^2 + a^2)^4 = (2a^7 - 6a^3x^4 - 4a^5x^2)\, dx^2 : (x^2 + a^2)^4 = ddy$. Quare (§. 241)

$2a^7 - 6a^3x^4 - 4a^5x^2 = 0$

$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; 2a^3$

$a^4 - 3x^4 - 2a^2x^2 = 0$

$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; aa + xx$

$aa - 3x^2 = 0$

$aa = 3x^2$

$\frac{1}{3}aa = x^2$

$\sqrt{\frac{1}{3}aa} = x$

Quodſi valor ipſius x^2 in æquatione data $axx = (xx + aa)y$ ſubſtituatur; prodibit

$\frac{1}{3}a^3 = \frac{4}{3}aay$

$\overline{\qquad\qquad} \; y\,aa$

$\frac{1}{4}a = y$

Quare ſi $\sqrt{\frac{1}{3}aa}$ & $\frac{1}{4}a$ jungantur ad angulos rectos, punctum flexus contrarii determinatur, utut curva nondum fuerit deſcripta.

PROBLEMA 106.

245. *Determinare punctum flexus contrarii in curva, ad quam* $ay^2 = x^3 - bx^2$.

Quia $ayy = x^3 - bx^2$

erit $2aydy = 3x^2dx - 2bxdx$

$dy = \dfrac{3x^2dx - 2bxdx}{2ay}$

$ddy = (12axydx^2 - 4abydx^2 - 6ax^2dxdy + 4abxdxdy) : 4a^2y^2 = 0$

Hinc $(12axy - 4aby)\,dx^2 = (6ax^2 - 4abx)\,dxdy$

$(6x - 2b)\,ydx : dy = (3x^2 - 2bx)\,dx$

$\overline{3x^2 - 2bx} \qquad\qquad \overline{2ay}$

$(12x - 4b)\,ayy = (3x^2 - 2bx)^2$

$(12x - 4b)(x^3 - bx^2) = (3x^2 - 2bx)^2$

hoc eſt,

$12x^4 - 16bx^3 + 4b^2x^2 = 9x^4 - 12bx^3 + 4b^2x^2$

$13x^4 - 4bx^3 = 0$

$\overline{\qquad\qquad} \; x^3$

$3x - 4b = 0$

$3x = 4b$

$x = \frac{4b}{3}$

Subſtituatur valor ipſius x in æquatione data $ayy = x^3 - bx^2$; reperietur

$ayy = \frac{64}{27}b^3 - b^3 = \frac{37}{27}b^3$

$y = \frac{1}{3}\sqrt{(37b^3 : a)}$

PROBLEMA 107.

246. *Determinare punctum flexus contrarii in curva, ad quam* $y - a = (x - a)^{3:5}$

Quoniam $y - a = (x - a)^{3:5}$

erit $dy = \frac{3}{5}(x - a)^{-2:5}dx$

Quodſi ergo dx ſumatur pro conſtante, reperietur

ddy

$$ddy = -\tfrac{6}{25}(x-a)^{-7:5}dx^2 = 0$$

$$-\tfrac{6}{25}(x-a)^{-7:5} = 0$$

$$-6 = 0$$

Quoniam nullus valor ipſius x prodit in hypotheſi $ddy = 0$; ponatur

$$-6dx^2 : 25\sqrt[5]{(x-a)^7} = \infty$$

erit $25\sqrt[5]{(x-a)^7} = 0$

$$x - a = 0$$

$$x = a$$

PROBLEMA 108.

Tab. III. Fig. 35. n. 1. 2.

247. *Determinare punctum flexus contrarii in curvis, quarum ſemiordinatæ CM, Cm, ex puncto fixo C ducuntur.*

RESOLUTIO.

Ducatur CM ipſi Cm infinite propinqua fiatque $mH = Mm$. Tangat Tm curvam in M. Quoniam angulus CmT & CMm infinite parvo MCm differunt (§. 224 *Geom.*); æquales ſunt (§. 4). Angulus adeo CmH creſcentibus ſemiordinatis decreſcit, ſi concavitas curvæ centrum C reſpicit; creſcit autem, ſi convexitas eidem obvertitur. Unde angulus iſte, ſeu, quod perinde eſt, menſura ejus eſt vel ex minimorum, vel ex maximorum genere, ſi curva in contrarias partes flectitur, adeoque reperitur, ſi arcus TH ſeu differentiale ipſius fiat vel nihilo, vel infinito æquale (§. 61). Ut itaque arcus TH inveniatur, ducatur mL ea lege, ut angulus TmL ſit æqualis ipſi mCL: erunt ſectores mCH & mTI ſimiles. Quare ſi fiat $Cm = y$, $mr = dx$, $mT = dt$; erit

$$mC : mr = mT : Ti$$

$$y : dx = dt : \frac{dtdx}{y}$$

Ducatur porro radio CH arcus Ho; erunt ob rectos ad r & H (§. 37), rectulæ mr & oH inter ſe parallelæ (§. 241 *Geom.*), conſequenter $\triangle oLH \backsim \triangle mLr$ (§. 253 *Geom.*). Quoniam vero HI etiam perpendicularis ad mL (§. 37); $\triangle LHI \backsim \triangle oLH$ (§. 314 *Geom.*). Ergo $\triangle LHI \backsim \triangle mLr$, conſequenter (§. 252 *Geom.*)

$$mL : mr = LH : HI$$

$$dt : dx = -ddy : \frac{-dxddy}{dt}$$

Nimirum mT & mL differunt tantum infiniteſima iL, adeoque æquales habentur (§. 4). HL vero eſt differentiale ipſius Hr, quæ eſt differentia ipſius $Cm = y$. Eſt autem HL negativa quantitas, quia creſcentibus ordinatis CM, earum differentia rH decreſcit. Habemus

mus adeo $Ti + iH = TH = dtdx : y - dxddy : dt = (dt^2dx - ydxddy) : ydt$, conſequenter

$$\frac{dt^2dx - ydxddy}{ydt} = 0$$

$$dt^2 - yddy = 0$$

hoc eſt, ob $dt^2 = dx^2 + dy^2$ (§.128)

$$dx^2 + dy^2 - yddy = 0$$

vel $dx^2 + dy^2 = yddy$

PROBLEMA 109.

248. *Determinare punctum flexus contrarii in conchoide* Nicomedis.

Sit $AB = QM = a$, $BC = b$, $CQ = z$, $CM = y$, $Mr = dx$, erit $mr = dy$ & (§.489 *part.* 1)

$$z + a = y$$

$$dz = dy$$

Porro $BQ = \sqrt{(zz - bb)}$ (§. 394 *Geom.*) & ducto arculo qt, erit ob rectos t & B atque s & q non niſi infinite parvo angulo qCs differentes (§. 224 *Geom.*) adeoque æquales (§.4) $\triangle Sqt \backsim \triangle BCQ$ (§.252), conſequenter:

$$BQ : BC = St : tq$$

$$\sqrt{(z^2 - b^2)} : b = dz : \frac{bdz}{\sqrt{(z^2 - b^2)}}$$

Et ob ſectores Cqt & CMr ſimiles eſt

$$Cq : qt = CM : Mr$$

$$z : \frac{bdz}{\sqrt{(z^2 - b^2)}} = z + a : \frac{bzdz + abdz}{z\sqrt{(z^2 - b^2)}}$$

Unde $dx = (bzdz + abdz) : z\sqrt{(z^2 - b^2)}$

$$\frac{zdx\sqrt{(z^2 - b^2)} = bzdz + abdz}{}$$

$$\frac{zdx\sqrt{(z^2 - b^2)}}{ab + bz} = dz = dy$$

Si itaque dx ſumatur pro conſtante, reperitur $ddy = (2abz^2 - ab^3 + 2bz^3 - b^3z)\, dzdx : (ab + bz)^2 \sqrt{(z^2 - b^2)} - bz\sqrt{(z^2 - b^2)} : (ab + bz)^2 = (2abz^2 - ab^3 + bz^3)\, dzdx : (ab + bz)^2 \sqrt{(z^2 - b^2)} =$, ſubſtituto valore ipſius dz, $(2abz^3 - ab^3z + bz^4)\, dx^2 : (ab + bz)^3$.

Quoniam in puncto flexus contrarii

$$yddy = dx^2 + dy^2 \quad (§.247)$$

hinc tandem eruitur

$$b(z + a)(2az^3 - ab^2z + z^4)\, dx^2 : (ab + bz)^3 = dx^2 + (z^4 - b^2z^2)\, dx^2 : (ab + bz)^2$$

$$2az^3 - ab^2z + z^4 = (ab + bz)^2 + z^4 - b^2z^2$$

$$2az^3 - ab^2z + z^4 = a^2b^2 + 2ab^2z + b^2z^2 + z^4 - b^2z^2 = a^2b^2 + 2ab^2z + z^4$$

$$2az^3 - ab^2z = a^2b^2 + 2ab^2z$$

$$\frac{2az^3 - 3ab^2z = a^2b^2}{2a}$$

$$z^3 - \tfrac{3}{2}b^2z - \tfrac{1}{2}ab^2 = 0$$

Deſcribatur itaque parametro b parabola & (§. 578 *part.* 1) fiat $AL = \frac{3}{4}b$ & $LI = \frac{1}{4}a$. Ex centro I per verticem A deſcribatur parabola: dico eſſe $PM = z$. Nam $AI^2 =$ Tab. I. Fig. 14.

$LI^2 + AL^2 = \frac{1}{16}aa + \frac{25}{16}bb$ & $MR = z - \frac{1}{4}a$, $AP = z^2 : b$, $IR = z^2 : b - \frac{5}{4}b$. Quare ob $AI^2 = MI^2 = MR^2 + IR^2$

$$\frac{1}{16}aa + \frac{25}{16}bb = \frac{z^4}{bb} - \frac{10}{4}z^2 + \frac{25}{16}b^4$$
$$+ z^2 - \frac{1}{2}az + \frac{1}{16}aa$$

$$\frac{z^4}{bb} - \frac{6}{4}z^2 - \frac{1}{2}az = 0$$

--- $z : bb$

$$z^3 - \frac{3}{2}b^2z - \frac{1}{2}ab^2 = 0.$$

SCHOLION.

Tab. I. Fig. 5. 249. *Niſi inconſulta nobis viſa fuiſſet figurarum multiplicatio, parabolam circa axem CT deſcripſiſſemus, ſtatuto vertice in C & crure ſurſum tendente.*

PROBLEMA 110.

Tab. III. Fig. 36. 250. *Determinare punctum flexus contrarii in ſpirali parabolica* AMC, *quæ generatur, ſi axis parabolæ in peripheriam circuli incurvatur.*

Quoniam ſemiordinatæ PM ad axem perpendiculares; in centro C concurrere debent (§. 37) Quare ſi parameter parabolæ a, abſciſſa $AP = v$, $PM = y$; erit æquatio ad ſpiralem parabolicam

$$av = y^2$$

adeoque $adv = 2ydy$

$$dv = 2ydy : a$$

Sit porro radius circuli $= r$, $MR = dx$; erit $CM = r - y$ &

$$CP : Pp = CM : MR$$
$$r : dv = r - y : dx$$

$$rdx = rdv - ydv$$

$$dx = (r - y)\, dv : r$$

hoc eſt, ſubſtituto valore ipſius dv,

$$(2rydy - 2y^2dy) : ar = dx$$
$$(4r^2y^2 - 8ry^3 + 4y^4)\, dy^2 : a^2r^2 = dx^2$$

&, ſi dx ſumatur pro conſtante,

$$(2ar^2dy^2 + 2ar^2yddy - 4arydy^2 - 2ary^2ddy) : a^2r^2 = 0$$

$$2rdy^2 + 2ryddy - 4ydy^2 - 2y^2ddy = 0$$

$$ryddy - y^2ddy = 2ydy^2 - rdy^2$$

$$yddy = (2ydy^2 - rdy^2) : (r - y)$$

Habemus adeo ob $dx^2 + dy^2 = yddy$ (§. 247)

$$\frac{(4r^2y^2 - 8ry^3 + 4y^4 + a^2r^2)\, dy^2}{a^2r^2} = \frac{(2y - r)\, dy^2)}{r - y}$$

$$4r^3y^2 - 8r^2y^3 + 4ry^4 + a^2r^3 - 4r^2y^3 + 8ry^4 - 4y^5 - a^2r^2y = 2a^2r^2y - a^2r^3$$

$$4y^5 - 12ry^4 + 12r^2y^3 - 4r^3y^2 + 3a^2r^2y - 2a^2r^3 = 0$$

Hujus æquationis radix y eſt ſemiordinata PM in puncto flexus contrarii.

CAPUT

CAPUT III.

De
USU CALCULI DIFFERENTIO-DIFFERENTIALIS IN INVESTIGANDIS EVOLUTIS CURVARUM ET RADIO OSCULI.

DEFINITIO 17.

Tab. III. Fig. 37. 250. Si curvæ BCF filum circumplicetur & ſucceſſive iterum ab ea abducatur, extremitas ejus A in rectam MC extenſi curvam aliam deſcribit, quam *Hugenius* inventor (k) *Curvam ex evolutione deſcriptam*; ſicut alteram, quæ evolvitur, *Evolutam* vocat.

DEFINITIO 18.

251. Portio fili MC apellatur *Radius Evolutæ*, item *Radius curvedinis*, *Radius oſculi.* Circulus enim, qui radio evolutæ MC ex centro C deſcribitur, dicitur curvam ex evolutione deſcriptam in M *oſculari.*

COROLLARIUM 1.

252. Evoluta igitur BCF eſt locus centrorum omnium circulorum curvam ex evolutione deſcriptam AMI oſculantium.

COROLLARIUM 2.

253. Quando punctum B cadit in A, radius evolutæ MC æquatur arcui BC, alias aggregato ex AB & arcu BC.

COROLLARIUM 3.

254. Quia elementum arcus M*m* in curva ex evolutione deſcripta eſt arcus circuli radio CM deſcriptus (§. 250); radius evolutæ CM eſt ad curvam AI perpendicularis (§. 37.)

COROLLARIUM 4.

255. Quoniam radius evolutæ MC ipſam evolutam BCF continuo tangit, ceu ex geneſi manifeſtum (§. 250); curvæ ex evolutione per innumera puncta deſcribuntur, ſi tangentes in quodlibet punctis evolutæ producantur, donec arcubus ſibi reſpondentibus æquales fiant.

SCHOLION.

256. *Meditatio de curvarum oſculis debetur illuſtri* Leibnitio, *qui primus evolutarum* Hugenianarum *in metienda curvedine curvarum uſum oſtendit.*

PROBLEMA III.

257. *Determinare radium oſculi in curvis, quarum ſemiordinatæ* PM *&* pm *ſunt ad axem perpendiculares.* Tab. III. Fig. 37.

(k) in Horolog. Oſcillatorio part. 3. def. 3. f. 60.

RESOLUTIO.

Sit ſemiordinata pm alteri PM infinite propinqua; ſit item radius oſculi Cm alteri CM infinite propinquus. Ducatur GE ipſi AB parallela, donec ſemiordinatæ MP continuatæ in E occurrat, & MG eidem axi AB parallela. Quoniam anguli E & R ſunt recti & ob EMG & CMm (§. 254) rectos, EMC $=$ GMm; erit (§. 352 *Geom.*)

$$MR : Mm = ME : MC$$

$$dx : \sqrt{(dx^2+dy^2)} = t : t\sqrt{(dx^2+dy^2)}$$

$$\overline{dx}$$

Jam cum radius MC conſtans intelligatur, quamdiu ex centro C arcus infinite parvus Mm deſcribitur, interea vero ME augeatur quantitate differentiali Rm; erit radii oſculi CM differentiale nullum (§. 7). Sed, ſi dx ſumatur pro conſtante, differentiale ipſius MC eſt $dtdx\sqrt{(dx^2+dy^2)} : dx^2 + tdydx\,ddy : \sqrt{(dx^2+dy^2)}\,dx^2 = (dtdx^2 + dtdy^2 + tdyddy) : dx\sqrt{(dx^2+dy^2)}$. Ergo

$$\frac{dtdx^2 + dtdy^2 + tdyddy}{dx\sqrt{(dx^2+dy^2)}} = 0$$

$$dtdx^2 + dtdy^2 = -tdyddy$$

Quoniam mR differentiale ſemiordinatæ etiam differentiale ipſius ME ob PE conſtantem; erit $dt = dy$.

Quare $dx^2 + dy^2 = -tddy$

$$(dx^2+dy^2) : -ddy =$$

Quodſi itaque ex æquatione ad curvam datam ſubſtituatur valor ipſius dy^2 & $-ddy$; prodibit ME $= t$ in quantitatibus ordinariis.

Si vero radius evolutæ MC ipſe deſideretur (quem interdum invenire præſtat) fiat (§. 253 *Geom.*) ob PH $= ydy : dx$ (§. 34)

$$MP : PH = ME : EC$$

$$y : \frac{ydy}{dx} = \frac{dx^2+dy^2}{-ddy} : \frac{dx^2dy+dy^3}{-dxddy}$$

Unde $EC^2 = \dfrac{dx^4dy^2 + 2dx^2dy^4 + dy^6}{dx^2ddy^2}$

$$ME^2 = \frac{dx^4 + 2dx^2dy^2 + dy^4}{ddy^2} = \frac{dx^6 + 2dx^4dy^2 + dx^2dy^4}{dx^2ddy^2}$$

$$MC^2 = \frac{dx^6 + 3dy^2dx^4 + 3dy^4dx^2 + dy^6}{dx^2ddy^2}$$

$$= (dx^4 + 2dx^2dy^2 + dy^4)(dx^2+dy^2) : dx^2ddy^2$$

$$MC = (dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)} : -dxddy.$$

PROBLEMA 112.

258. *Data æquatione ad curvam Algebraicam, invenire æquationem ad evolutam.*

RESOLUTIO.

1. Inveſtigentur quantitates BN & CN

& CN in valore abſciſſæ AP aut ſemiordinatæ PM. Nimirum ME invenitur (§. 257): unde ſubducta PM relinquit PE = NC. Sed per analogiam PM : PH = ME : EC (§. 253 *Geom.*) reperitur EC. Si vero ex AP + EC = AN ſubtrahatur AB radius evolutæ in vertice B per probl. præc. determinandus, relinquitur BN.

2. Fiat valor ipſius BN = v, CN = z; & communis æquationum reductio dabit æquationem ad evolutam in puris v & z atque conſtantibus.

PROBLEMA 113.

259. *Invenire radium circuli parabolam oſculantis & æquationem ad ejus evolutam.*

I. Quoniam $ax = y^2$

erit $adx = 2ydy$

$$adx : 2y = dy$$

$$a^2dx^2 : 4y^2 = dy^2$$

h. e. $adx^2 : 4x = dy^2$

Et, ſi dx ſumatur pro conſtante, invenietur ob $adx : 2\sqrt{ax} = dy$

$$-adx^2 : 4x\sqrt{ax} = ddy$$

Unde $(dx^2 + dy^2) : -ddy = (4x dx^2 + adx^2) 4x\sqrt{ax} : 4axdx^2 = (a + 4x)\sqrt{ax} : a = \sqrt{ax} + 4x\sqrt{ax} : a = y + 4xy : a = t$ = ME = PM + PE. Eſt vero PM = y. Ergo PE = $4xy : a$ hoc eſt, quia $x = y^2 : a$, PE = $4y^3 : aa$.

Conſtructio. Quoniam PM = y, TP = $2y^2 : a$ (§. 21); ſi in T excitetur perpendicularis TE ipſi MP continuatæ in E occurrens; erit PE = $4y^4 : aay = 4y^3 : aa$ (§. 314 *Geom.*). Quodſi ergo ulterius in E & M excitentur perpendiculares EC & MC ad ME & MT; communis interſectio in C radium oſculi MC determinabit (§. 254).

II. Quoniam EC ipſi PH parallela; erit (§. 253 *Geom.*) ob PH = $\frac{1}{2}a$ (§. 35).

$$PM : PH = ME : EC$$

$$y : \tfrac{1}{2}a = y + \frac{4xy}{a} : \tfrac{1}{2}a + 2x$$

adeoque $EC^2 = \frac{1}{4}aa + 2ax + 4xx$

$$ME^2 = ax + 8x^2 + 16x^3 : a$$

$$MC^2 = \tfrac{1}{4}aa + 3ax + 12x^2 + 16x^3 : a$$

Jam cum MC coincidit in AB, hoc eſt, quando radius evolutæ eſt AB, $x = 0$. Quare $AB^2 = \frac{1}{4}aa$ & hinc AB = $\frac{1}{2}a$. Eſt adeo BN = AP + PN - AB = $3x + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a = 3x$. Sit jam BN = v, CN = PE = z: erit

$$v = 3x \qquad z = 4x\sqrt{ax} : a$$

$$\tfrac{1}{3}v = x \qquad z = \tfrac{4}{3}v\sqrt{\tfrac{1}{3}av} : a$$

$$3az = 4v\sqrt{\tfrac{1}{3}av}$$

 $9a^2z^2$

$$9a^2z^2 = \tfrac{16}{3}av^3$$
$$\overline{} \quad a:3$$
$$27az^2 = 16v^3$$

En æquationem ad evolutam Parabolæ *Apollonianæ*: unde intelligitur evolutam parabolæ *Apollonii* eſſe parabolam ſecundi generis, cujus parameter $\frac{27}{16}$ parametri in parabola *Apolloniana*.

PROBLEMA 114.

260. *Determinare radium oſculi MC in infinitis parabolis aut paraboloidibus.*

Ad infinitas parabolas (§. 475 *part.* 1.)

$$y^m = a^{m-1}x$$
$$my^{m-1}dy = a^{m-1}dx$$

Quodſi ergo dx ſumatur pro conſtante, erit

$$(m^2-m)\,y^{m-2}dy^2 + my^{m-1}ddy = 0$$
$$(m^2-m)\,y^{m-2}dy^2 = -my^{m-1}ddy$$
$$(m-1)\,y^{-1}dy^2 = -ddy$$

Quamobrem

$$(dx^2+dy^2):-dyy = (ydx^2+ydy^2):(m-1)\,dy^2$$

hoc eſt ob $dx^2 = m^2y^{2m-2}dy^2:a^{2m-2}$ $ME = (m^2y^{2m-1}dy^2 + a^{2m-2}ydy^2):(m-1)\,a^{2m-2}dy^2 = (m^2y^{2m-1}+a^{2m-2}y):(m-1)\,a^{2m-2} = m^2y^{2m-1}:(m-1)\,a^{2m-2} + y:(m-1) = \frac{1}{m-1}y + \frac{m^2x^2}{(m-1)y}$

PROBLEMA 115.

261. *Determinare radium oſculi in circulo.*

Quoniam ad circulum (§. 341 *part.* 1)

$$y^2 = 2rx - xx$$

erit
$$2ydy = 2rdx - 2xdx$$
$$ydy = rdx - xdx$$

Quare ſi dx ſumatur pro conſtante, erit

$$dy^2 + yddy = -dx^2$$
$$(dx^2+dy^2):y = -ddy$$

Quare (§. 257)

$$\frac{dx^2+dy^2}{-ddy} = y\,\frac{(dx^2+dy^2)}{dx^2+dy^2} = y$$

Eſt itaque $MC = y$, hoc eſt, punctum C cadit in P, adeoque C in centrum circuli H (§. 37. 254). Radius igitur circuli idem eſt cum radio oſculi, hoc eſt, circulus, qui circulum oſculatur, huic congruit, & circuli evoluta eſt centrum ejus.

PROBLEMA 116.

262. *Invenire radium oſculi in ellipſi.*

Quoniam ad ellipſin (§. 378 *part.* 1)

$$ay^2 = abx - bx^2$$

erit
$$2aydy = abdx - 2bxdx$$

dy

$dy = (abdx - 2bxdx)\surd a : 2\surd(abx - bx^2) = (abdx - 2bxdx) : 2\surd(a^2bx - ab^2x)$ Unde, ſi dx ſumatur pro conſtante, $ddy = -4bdx^2\surd(a^2bx - abx^2) : (4a^2bx - abx^2) - (a^3b^2dx^2 + 4a^2b^2xdx^2 - 4ab^2x^2dx^2) : (4a^2bx - abx^2)\surd(a^2bx - abx^2) = (-4a^2b^2xdx^2 + 4ab^2x^2dx^2 - a^3b^2dx^2 - 4ab^2x^2dx^2) : (4a^2bx - abx^2)\surd(a^2bx - abx^2) = -a^3b^2dx^2 : (4a^2bx - 4abx^2)\surd(a^2bx - abx^2)$.

Habemus itaque (§. 257) $MC = (dx^2 + dy^2)\surd(dx^2 + dy^2) : -dxddy = [dx^2(1 + [a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2] : 4a^2bx - 4abx^2)dx\surd(1 + [a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2) 2\surd(a^2bx - abx^2)] : [a^3b^2dx^2 : (4a^2bx - 4abx^2)\surd(a^2bx - abx^2)] = (4a^2bx - 4abx^2 + a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2) : 2a^3b^2$.

Eſt vero (§. 43) normalis $MH = y\surd(dy^2 + dx^2) : dx = \surd(abx - bx^2) dx\surd(4a^2bx - 4abx^2 + a^2b^2 - 4ab^2 + 4b^2x^2) : 2\surd(a^2bx - abx^2) dx\surd a = \surd(4a^2bx - 4abx^2 + a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2) : 2a$. Tab. III. Fig. 38.

Ergo $MC = 4MH^3 : b^2$.

Conſtructio. Fiat $b : MH = MH : \frac{MH^2}{b}$ & $MH : \frac{MH^2}{b} = \frac{MH^2}{b} : \frac{MH^3}{b^2}$ hoc eſt, quæratur ad parametrum b & normalem MH quarta continue proportionalis; erit hujus quadrupla radius oſculi MC.

COROLLARIUM.

263. Si AP ſive $x = 0$; circuli in A ellipſin oſculantis AB reperitur $a^2b^2\surd a^2b^2 : 2a^3b^2 = a^3b^3 : 2a^3b^2 = \frac{1}{2}b$.

PROBLEMA 117.

264. *Invenire radium oſculi in hyperbola.*

Quoniam ad hyperbolam (§. 417 *part.* 1) $ay^2 = abx + bx^2$; radius oſculi MC eodem prorſus, ut in probl. præced. modo invenitur $(4a^2bx + abx^2 + a^2b^2 + 4ab^2x + 4b^2x^2)\surd(4a^2bx + abx^2 + a^2b^2 + 4ab^2x + 4b^2x^2) : 2a^3b^2 = 4MH^3 : bb$.

PROBLEMA 118.

265. *Invenire radium circuli MC cycloidem AMB in M oſculantis.* Tab. III. Fig. 39.

Sit diameter circuli genitoris $AD = 1$, $AP = x$, $PM = y$, erit $QP = \surd(x - xx)$ (§. 341 *part.* 1), arcus $AQ = \int(dx : 2\surd[x - xx])$ (§. 136), adeoque $PM = PQ + QM = \surd(x - xx) + \int[dx : 2\surd(x - xx)]$ (§. 527 *part.* 1). Quamobrem

$$y = \surd(x - xx) + \frac{\int dx}{2\surd(x - xx)}$$

$$dy = \frac{dx - 2xdx}{2\surd(x - xx)} + dx = \frac{2dx - 2xdx}{2\surd(x - xx)}$$

$= dx(1 - x) : \surd x\surd(1 - x) = dx\surd(1 - x) : \surd x$

Quodſi ergo dx ſumatur pro conſtante, reperietur $ddy = -dx^2\surd x : 2x\surd(1 - x) - dx^2\surd(1 - x) : 2\surd x = (-2xdx^2 - 2dx^2 + 2xdx^2) :$

$2xdx^2) : 4x\sqrt{(x-xx)} = -dx^2 : 2x\sqrt{(x-xx)}$.

Unde ob $dx^2 + dy^2 = dx^2 + dx^2 (1-x) : x = (xdx^2 + dx^2 - xdx^2) : x = dx^2 : x$ eruitur $MC = (dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)} : -dxddy$ (§. 257)

Tab. III. Fig. 39. $= \frac{dx^3}{x\sqrt{x}} : \frac{dx^3}{2x\sqrt{(x-xx)}} = 2xdx^3\sqrt{(x-xx)} : xdx^3\sqrt{x} = 2\sqrt{(x-xx)} : \sqrt{x} = 2\sqrt{(1-x)} = 2DQ$. Nam

$PD^2 = 1 - 2x + xx$
$PQ^2 = x - xx$

$DQ^2 = 1-x$. Ergo $DQ = \sqrt{(1-x)}$.

Conſtructio. Quoniam tangens TM ipſi AQ parallela (§. 117); TMQ = AQP (§. 222 *Geom.*). Eſt vero AQD rectus (§. 302 *Geom.*) & TMC itidem rectus (§. 254): Ergo QMC = PQD (§. 83 *Arithm.*), conſequenter MC ipſi QD parallela. Conſtructio igitur talis eſt: ducatur MC ipſi QD parallela & fiat EC = EM; erit C punctum in evoluta cycloidis.

COROLLARIUM 1.

266. Si $x = 0$; erit radius evolutæ $2\sqrt{1} = 2 = 2AD$, quia $AD = 1$. Quare ſi DG fiat = AD; in G terminabitur evoluta ex una parte. Si $x = AD = 1$; erit radius evolutæ $2\sqrt{(1-1)} = 2\sqrt{0} = 0$. Quare evoluta ex altera parte in B terminatur.

COROLLARIUM 2.

267. Quodſi BL ipſi QD vel MC parallela ducatur, erit LBD = BDQ (§. 222 *Geom.*) adeoque arcus QD & BL (§. 307 *Geom.*) chordæque cognomines (§. 274 *Geom.*), conſequenter BL = EC (§. 565) & hinc LC ipſi BE æqualis & parallela (§. 242 *Geom.*). Eſt vero BE arcui QD (§. 527 *part.* 1) adeoque & alteri BL, *per demonſtr.* æqualis. Quare LC æqualis arcui BL (§. 79 *Arithm.*). Eſt itaque evoluta cycloidis itidem cyclois æqualis & ſimilis (§. 527 *part.* 1), hoc eſt, cyclois ſui evolutione ſeipſam deſcribit.

SCHOLION.

268. *Cum radius oſculi vel evolutæ aut æqualis ſit arcui evolutæ vel eundem quantitate data excedat* (§. 253); *omnes arcus evolutarum geometrice rectificantur, quarum radii per conſtructiones geometricas exhiberi poſſunt. Unde patet, cur arcus cycloidis BC ſit chordæ BL duplus* (§. 141): *eſt enim radius evolutæ MC ejusdem duplus* (§. 565) *& evoluta cycloidis ipſa quoque cyclois eſt* (§. 567). *Liquet etiam innumeras inveniri poſſe curvas, quæ ſaltem geometrice rectificantur.*

SE-

SECTIO V.
DE ARITHMETICA INFINITORUM.
CAPUT I.
De NATURA ARITHMETICÆ INFINITORUM.

DEFINITIO 19.

269. *Arithmetica infinitorum* eſt methodus ſummandi ſeries numerorum infinitis terminis conſtantes, aut earum rationes inveſtigandi.

PROBLEMA 119.

270. *Invenire ſummam fractionum infinitarum, quarum numerator communis eſt unitas, denominatores vero progrediuntur in ratione numeratoris primæ ad ſuum denominatorem.*

Sit fractio prima $1:e$. Numerus terminorum cum ſit infinitus & termini continuo decreſcant, devenietur tandem ad infiniteſimam (§. 2) adeoque ſumma fractionis primæ & hujus, quæ tanquam ultima conſideratur, ipſi fractioni primæ $1:e$ æqualis (§. 4). Diviſa ergo per $e-1$ dat ſummam omnium terminorum $1:(ee-e)$ excepto primo (§. 99 *part.* 1). Quare ſumma integræ ſeriei $1:(ee-e)+1:e=(ee-e+e):(e^3-e^2)=ee:(e^3-e^2)=1:(e-1)$.

Sit E. gr. $e=2$; erit $\int(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$ &c. in infinit.$)=1$.

Sit $e=3$; erit $\int(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}$ &c. in infinit.$)=\frac{1}{2}$.

Sit $e=4$; erit $\int(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}$ &c. in infinit.$)=\frac{1}{3}$.

Sit $e=5$; erit $\int(\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}$ &c. in infinit.$)=\frac{1}{4}$.

Sit $e=6$; erit $\int(\frac{1}{6}+\frac{1}{36}+\frac{1}{216}$ &c. in infinit.$)=\frac{1}{5}$.

PROBLEMA 120.

271. *Invenire ſummam infinitarum fractionum, ubi numerator communis eſt unitate minor denominatore primæ & denominatores progrediuntur in ratione unitatis ad denominatorem primæ.*

Sit denominator fractionis primæ $=m$; erit numerator $=m-1$. Summa primi & ultimi termini utpote primo æqualis $=(m-1):m$, quæ per $m-1$ diviſa dat ſummam omnium terminorum excepto maximo ſeu primo $(m-1):(m^2-m)$. Quare ſumma integræ ſeriei $=(m-1):(m^2-m)+(m-1):m=(m$

$-1+m^2-2m+1):(m^2-m)] = (m^2-m):(m^2-m) = 1.$

Sit e. gr. $m=2$, erit $\int(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$ &c. in infinit.) $=1$, ut ante (§. 270). Sit $m=3$, erit $\int(\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}$ &c in infinit.) $=1$.

Sit $m=4$, erit $\int(\frac{3}{4}+\frac{3}{16}+\frac{3}{64}$ &c. in infinit.) $=1$.

SCHOLION.

272. *Poterat idem per modum corollarii ex theoremate præcedente deduci. Eſt enim* $\int(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}$ &c.) $=\frac{1}{2}$ (§. 270). *Ergo duplum hujus ſeriei, hoc eſt,* $\int(\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}$ &c.) $=\frac{2}{2}=1$. *Et in genere* $\int(\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\frac{1}{m^4}$ &c. *in infinit.*) $=1:(m-1)$. *Ergo multiplum hujus ſeriei, cujus denominator* m-1, *ſit neceſſe eſt* $(m-1):(m-1)=1$.

PROBLEMA 121.

273. *Invenire ſummam infinitarum fractionum, ubi numerator communis deficit a denominatore primæ data quantitate, denominatores vero progrediuntur in ratione unitatis ad denominatorem primi.*

Sit terminus primus $=(m-n):m$, qui utpote æqualis ſummæ primi & ultimi diviſus per $(m-1)$ dat ſummam omnium terminorum maximo excepto $(m-n):(m^2-m)$. Quare ſumma ſeriei integræ $=(m-n):(m^2-m)+(m-n):m=(m-n+m^2-mn-m+n):(m^2-m)=(m^2-mn):[m^2-m]=[m-n]:(m-1)$.

Sit e. gr. $n=1$, erit $(m-n):(m-1)=(m-1):(m-1)=1$.

Sit $n=2$, $m=4$, erit $\int(\frac{2}{4}+\frac{2}{8}+\frac{2}{16}$ &c.) $=(4-2):(4-1)=\frac{2}{3}$.

Sit $n=2$, $m=5$; erit $\int(\frac{3}{5}+\frac{3}{25}+\frac{3}{125}$ &c.) $=(5-2):(5-1)=\frac{3}{4}$.

Sit $n=2$, $m=6$; erit $\int(\frac{4}{6}+\frac{4}{36}+\frac{4}{216}$ &c.) $=(6-2):(6-1)=\frac{4}{5}$.

Sit $n=2$, $m=7$; erit $\int(\frac{5}{7}+\frac{5}{49}+\frac{5}{343}$ &c.) $=\frac{5}{6}$.

Similiter

Sit $n=3$, $m=6$; erit $\int(\frac{3}{6}+\frac{3}{36}+\frac{3}{216}$ &c.) $=(6-3):(6-1)=\frac{3}{5}$.

Sit $n=3$, $m=7$) erit $\int(\frac{4}{7}+\frac{4}{49}+\frac{4}{343}$ &c.) $(7-3):(7-1)=\frac{4}{6}$.

Sit $n=3$, $m=8$; erit $\int(\frac{5}{8}+\frac{5}{64}+\frac{5}{512}$ &c. $=(8-3):(8-1)=\frac{5}{7}$.

Porro

Sit $n=4$, $m=8$; erit $\int(\frac{4}{8}+\frac{4}{64}+\frac{4}{512}$ &c.) $=(8-4):(8-1)=\frac{4}{7}$.

Sit $n=4$, $m=9$; erit $\int(\frac{5}{9}+\frac{5}{81}+\frac{5}{729}$ &c.) $=(9-4):(9-1)=\frac{5}{8}$.

Sit $n=4$, $m=10$; erit $\int(\frac{6}{10}+\frac{6}{100}+\frac{6}{1000}$ &c.) $=(10-4):(10-1)=\frac{6}{9}$.

&c. &c.

PROBLEMA 122.

274. *Invenire ſummam fractionum infinitarum, quarum communis eſt numerator, denominatores vero in ratione quacunque progrediuntur.*

Sit numerator communis $=m$, denominator fractionis primæ $=a$, denominator rationis $=n$; erit ſeries

ſeries ſummanda $\frac{m}{a} + \frac{m}{na} + \frac{m}{n^2 a} + \frac{m}{n^3 a}$ &c. in infinit. Unde eodem, quo in problematibus præcedentibus, modo reperitur ſumma $m:(na-a)+m:a=(m+mn-m):(na-a)=mn:(na-a)=mn:a(n-1)$.

Sit e. gr. $m=5$, $a=6$, $n=2$; erit $\int(\frac{5}{6}+\frac{5}{12}+\frac{5}{24}+\frac{5}{48}$ &c.$)=10:6(2-1)=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$.

Sit $m=3$, $a=5$, $n=4$; erit $\int(\frac{3}{5}+\frac{3}{20}+\frac{3}{80}+\frac{3}{320}$ &c.$)=12:5(4-1)=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$.

Sit $m=1$, $a=7$, $n=2$; erit $\int(\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}+\frac{1}{56}$ &c.$)=2:7(2-1)=\frac{2}{7}$.

SCHOLION

275. *Hoc problema univerſalitate ſua antecedentia omnia complectitur.*

PROBLEMA 123.

276. *Invenire rationem ſummæ progreſſionis arithmeticæ ſimplicis ab* 1 *in infinitum continuatæ* (1+2+3+4+5+6 &c.) *ad ſummam totidem maximo æqualium.*

Terminus primus $=1$, numerus terminorum $=n$, differentia $=1$. Ergo ultimus $=n$ & hinc $\int(1+2+3+4+5$ &c.$)=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$ (§ 90 *part.* 1) & $\int n=n^2$. Cum n ſit infinitus numerus, atque (§. 59 *Arithm.*) $1:n=n:n^2$; erit n^2 ipſo n infinities majus, adeoque n reſpectu n^2 pro nihilo habendum (§. 3), conſequenter $\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n=\frac{1}{2}n^2$. Eſt itaque $\int(1+2+3+4+5$ &c in infinit.$):\int n=\frac{1}{2}n^2:n^2=1:2$.

Theorema. Summa ſeriei numerorum naturalium in infinitum continuatæ eſt ad ſummam totidem maximo æqualium ut 1 ad 2.

PROBLEMA 124.

277. *Invenire rationem ſummæ progreſſionis arithmeticæ ſive finitæ, ſive infinitæ, cujus terminus primus eſt* 0, *ad ſummam totidem maximo æqualium.*

Terminus primus $=o$, ultimus $=v$, numerus terminorum $=n$; erit ſumma progreſſionis $=\frac{1}{2}nv$ (§. 90 *part.* 1), ſumma vero totidem maximo æqualium nv. Eſt ergo illa ad hanc ut $\frac{1}{2}nv$ ad nv, hoc eſt, ut 1 ad 2 (§. 104 *part.* 1).

PROBLEMA 125.

278. *Invenire rationem, quam habet ſumma omnium quadratorum ab* 0 *in infinitum continuatorum ad ſummam totidem maximo æqualium.*

Sit terminus maximus n; erit ſumma quadratorum $\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$ (§. 172 *part.* 1). Eſt vero $1:n=n^2:n^3$ (§. 59 *Arithm.*) ergo quia 1 infiniteſima ipſius n; *per hypoth.* erit etiam n^2 infiniteſima ipſius n^3, conſequenter $\frac{1}{2}n^2$ adeoque multo magis $\frac{1}{6}n$, reſpectu ipſius $\frac{1}{3}n^3$ pro nihilo habendum (§. 3). Eſt ergo

 ſumma

ſumma infinitorum quadratorum $\frac{1}{3}n^3$. Quadratorum vero totidem maximo æqualium ſumma eſt n^3. Quare illa ad hanc ut $\frac{1}{3}n^3$ ad n^3, hoc eſt, ut 1 ad 3 (§. 104 *part.* 1).

PROBLEMA 126.

279. *Invenire rationem, quam habet ſumma omnium cuborum ab* o *in infinitum continuatorum ad ſummam totidem maximo æqualium.*

Sit terminus maximus n; erit ſumma cuborum $\frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$ (§. 172 *part.* 1). Sed eodem modo, quo in problemate præcedente, oſtenditur, $\frac{1}{2}n^3$, adeoque multo magis $\frac{1}{4}n^2$, reſpectu ipſius $\frac{1}{4}n^4$ tandem evaneſcere. Erit ergo ſumma infinitorum cuborum $\frac{1}{4}n^4$. Sed ſumma totidem cuborum maximo æqualium eſt n. Quare illa ad hanc ut $\frac{1}{4}n^4$ ad n^4, hoc eſt, ut 1 ad 4 (§. 104 *part.* 1).

PROBLEMA 127.

280. *Invenire rationem, quam habet ſumma omnium potentiarum cujuscunque gradus ab* o *in infinitum continuatarum ad ſummam totidem maximæ æqualium.*

Quoniam omnes potentiæ inferiores numeri infiniti reſpectu ſuperioris evaneſcunt (id quod eodem modo, quo in probl. 125 oſtenditur); ſumma omnium potentiarum ab o in infinitum continuatarum eſt $\frac{1}{m+1}(n+1)^{m+1}$ [§ 170 *part.* 1] $= \frac{1}{m+1}n^{m+1}$ in caſu infiniti. Sed potentia maxima eſt n^m adeoque ſumma totidem maximæ æqualium n^{m+1}. Ergo ſumma illa ad hanc ut $\frac{1}{m+1}n^{m+1}$ ad n^{m+1}, conſequenter ut 1 ad $m+1$ [§. 104 *part.* 1.].

E. gr. Sit $m = 2$; erit ſumma quadratorum infinitorum ad totidem maximo æqualium ut 1 ad 3.

Sit $m = 3$; erit ſumma cuborum infinitorum ad totidem maximo æqualium ut 1 ad 4.

Sit $m = 7$; erit ſumma potentiarum ſeptimi gradus ad totidem maximæ æqualium ut 1 ad 8.

SCHOLION I.

281. *In infinitum continuari revera non aliud ſignificat, quam eo usque continuari, donec quantitates quædam reſpectu aliarum evaneſcant. Nam* e. gr. (§. 278) *in ſumma quadratorum* $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ *ratio termini primi* $\frac{1}{3}n^3$ *ad reliquos* $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ *continuo decreſcit. Unde non mirum, ſi ratio poſteriorum tandem adeo exigua evadat, ut aſſignari amplius nequeat.* E. gr.

Sit $n = 2$;	erit $\int n^2 = 2\frac{2}{3}$	$+2$	$+\frac{1}{3}$
$n = 3$;	$\int n^2 = 9$	$+4\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
$n = 4$;	$\int n^2 = 21\frac{1}{3}$	$+8$	$+\frac{2}{3}$
$n = 5$;	$\int n^2 = 41\frac{2}{3}$	$+12\frac{1}{2}$	$+\frac{5}{6}$
$n = 6$;	$\int n^2 = 72$	$+18$	$+1$
$n = 100$;	$\int n^2 = 333333\frac{1}{3}$	$+5000$	$+16\frac{2}{3}$
	&c.	&c.	

Apparet

Apparet, rationem termini primi ad ſecundum eſſe $1\frac{1}{3}$: 1 = 4:3, *in caſu primo* ; 2 : 1 *in ſecundo* ; 64:24 = 8 : 3 *in tertio* ; 250 : 75 = 10:3 *in quarto* ; 72 : 18 = 4 : 1 *in quinto* ; 1000 000 : 15000 = 200:3 *in ultimo. Terminus igitur ſecundus continuo fit pars minor ipſius primi, adeoque tandem reſpectu primi evaneſcit. Sed multo citius evaneſcere debet tertius reſpectu ſecundi. Eſt enim ratio ſecundi ad tertium* 6 : 1 *in caſu primo* ; 9 : 1 *in ſecundo* ; 12 : 1 *in tertio* ; 15 : 1 *in quarto* ; 18 : 1 *in quinto* ; 300 : 1 *in ultimo.*

SCHOLION. 2.

282. *Eodem modo plurima alia Arithmeticæ infinitorum theoremata inveniri poſſunt ſi utamur iis, quæ in* Analyſi *finitorum* (§. 173 & ſeqq.) *de numeris figuratis demonſtrata ſunt.*

SCHOLION 3.

283. *Uſum Arithmeticæ infinitorum in Geometria oſtenderunt* (l) Walliſius *inventor, & qui eam magis excoluit*, Iſmael Bullialdus (m). *Enimvero cum per calculum* Leibnitii *ſummatorium non modo ea, quæ per* Arithmeticam *infinitorum eruuntur, longe facilius; ſed & plurima huic inſuperabilia inveniri poſſint; e re noſtra non eſſe judico, ut de ejus uſu multa proferamus. Suffecerit igitur pauca eam in rem attuliſſe.*

CAPUT II.
DE
USU ARITHMETICÆ INFINITORUM IN GEOMETRIA.

PROBLEMA 128.

284. *Invenire rationem trianguli* Tab. III. Fig. 40. *ACB ad parallelogrammum AEFB ſuper eadem vel æquali baſi AB & ejusdem altitudinis.*

Concipiatur altitudo CD in partes infinite parvas & inter ſe æquales diviſa; triangulum ACD reſolvetur in parallelogrammula, quorum baſes ſunt ordinatæ trianguli M*m*, N*n*, O*o* &c. altitudines infiniteſimæ ipſius CD; parallelogrammum vero EABF in totidem parallelogrammula & inter ſe & maximo in triangulo æqualia, quorum nempe baſes baſi trianguli AB ſigillatim æquales ſunt. Parallelogrammula itaque ſeu elementa trianguli progrediuntur in ratione ordinatarum M*m*, N*n*, O*o* &c. [§. 372 *Geom.*]. Ordinatæ vero ſunt ut abſciſſæ CP, CQ, QR (§. 378 *Geom.*) &, quoniam altitudo in partes æquales diviſa, abſciſſæ creſcunt

(l) In Arithmetica infinitorum, quæ extat. in Vol. I. Oper. Mathem.
(m) in Opere Novo ad Arithmeticam infinitorum.

ſcunt in progreſſione arithmetica 0.1.2.3.4.5 &c. Ergo elementa trianguli conſtituunt progreſſionem arithmeticam, a cyphra inchoatam & in infinitum continuatam. Eſt adeo triangulum ACB ad parallelogrammum EABF ut 1 ad 2 (§. 277).

PROBLEMA 129.

Tab. II. Fig. 28. 285. *Invenire rationem ſpatii parabolici externi* AKLPA *ad rectangulum* AKLN *ſuper eadem baſi* KL *& ejusdem altitudinis* AK.

Si ſpatium parabolicum APLKA & rectangulum KN in parallelogrammula reſolvantur, ut in probl. præc. (§. 584), altitudine communi AK in partes infinite parvas æquales diviſa; elementa parabolici progrediuntur ut ſemiordinatæ HI, QP, KL &c. iisdem vero in rectangulo totidem reſpondent maximo, cujus baſis KL, æqualia. Quodſi parameter parabolæ fuerit a, AH $=1$, AQ $=2$, AK $=3$ &c. erit HI $=1:a$, QP $=4:a$, KL $=9:a$ &c. (§. 352 *part.* 1), hoc eſt, baſes elementorum, adeoque elementa ipſa (§. 372 *Geom.*), progrediuntur in ratione duplicata abſciſſarum, hoc eſt, ut 0, 1, 4, 9 &c. Eſt ergo ſpatium parabolicum AKLPA ad rectangulum ANLK ut 1 ad 3 (§. 278), adeoque ANLPA ad idem rectangulum ANLK ut 2 ad 3.

PROBLEMA 130.

286. *Invenire rationem ſpatii paraboloidici cujuscunque* AKLPA *ad rectangulum* AKLN. Tab. II. Fig. 28.

Si abſciſſæ AH, AQ, AK fuerint ut 1, 2, 3 &c. in paraboloidibus quibuscunque, erunt ſemiordinatæ HI, QP, KL ut 0, 1, 2^m, 3^m &c. (§. 475 *part.* 1). Quare cum etiam ſpatii paraboloidici AKLPA elementa progrediantur ut 1, 2^m, 3^m &c. (§. 285), iisdem vero in rectangulo reſpondeant totidem maximo æqualia, erit illud ad hoc ut 1 ad $1+m$ (§. 280), conſequenter ANLPA ad idem rectangulum NK ut $1 - \frac{1}{1+m}$ ad 1, hoc eſt, ut $\frac{m}{1+m}$ ad 1, ſeu ut m ad $1+m$ (§. 104 *part.* 1.).

PROBLEMA 131.

287. *Invenire rationem pyramidis & coni ad priſma & cylindrum ſuper eadem baſi & ejusdem altitudinis.* Tab. III. Fig. 41.

Si pyramidis ADBC altitudo concipiatur in partes infinite parvas æquales diviſa; in priſmata reſolvitur, quæ inter ſe ſunt ut baſes (§. 511 *Geom.*), hoc eſt, ut plana ſimilia a, b, c, d (§. 445 *Geom.*). Quoniam vero altitudines illorum priſmatum ſunt ut 1, 2, 3 &c. planorum latera homologa erunt itidem

dem ut 0, 1, 2, 3 &c. (§. 505 *Geom.*) adeoque ipſa plana ut 0, 1, 4, 9 &c. (§. 381 *Geom.*). Quare cum elementis pyramidis reſpondeant in priſmate ſuper eadem baſi & ejusdem altitudinis totidem maximo æqualia; pyramis ad priſma eſt ut 1 ad 3 (§. 278).

Quodſi ACBD fuerit conus, plana *a, b, c, d* erunt circuli: qui cum progrediantur ut 0, 1, 4, 9 &c. (§. 387 *Geom.*), in cylindro vero ipſis reſpondeant totidem maximo *d* æquales; conus quoque ad cylindrum ſuper eadem baſi & ejusdem altitudinis eſt ut 1 ad 3 (§. 278).

PROBLEMA 132.

Tab. II. Fig. 2. 288. *Invenire rationem conoidis parabolici ex rotatione parabolæ AMSR circa axem AN geniti ad cylindrum ſuper eadem baſi & ejusdem altitudinis.*

Conſtat ex ſuperioribus (§. 144), altitudine AN in particulas infinite parvas & æquales diviſa conoides reſolvi in cylindrulos, quorum baſes ſunt circuli radiis PM, QN, SR deſcripti, quique adeo ſunt ut iſti circuli (§. 511 *Geom.*). Quodſi AP = 1, AQ = 2, AR = 3; erit PM = 1, QN = $\sqrt{2}$, AR = $\sqrt{3}$ (§. 586 *part.* 1) adeoque circuli ſunt ut 0, 1, 2, 3 &c. (§. 387 *Geom.*). Quare cum iisdem reſpondeant in cylindro totidem maximo æquales; omnia elementa conoidis ad omnia elementa cylindri ſunt ut 1 ad 2 (§. 277).

FINIS Analyſeos infinitorum.

Errata

Errata ita Corrigenda.

Pag.	Lin.	Errat.	Corrig.
264	25	$10a^3b^3$	$10a^3b^2$
270	15	d^3y^5	d^3y^6
296	ult.	165	165 *Arithm*
299	19	64:3	216 : 3-15-5
	20	&c.	:3-1:3=55
308	22	$m=$	$x=$
	31	impar	impar isque primus
324	12	BF^2	DF^2
327	21	$\frac{1}{2}b$	$\frac{1}{2}f$
333	26 ult.	tetraëdri	octaëdri
349	18	$y^3 3\sqrt{31}$ &c.	$y^3:3-3\sqrt{3y}:\sqrt{3}-2$
352	21	tertii	quarti
356	20	18 +	18 -
357	1	+	$+x$
360	4	3649	2629
393	3	& n	vel n
	18	$\frac{bb}{a}$	bb
402	23 ſeqq.	$bb:a$	$bb-ax$
	28	$-xx$	

Pag.	Lin.	Errat.	Corrig.
367	23	> PH	> PA
368	2	ſubtriplicata	ſubduplicata
369	17	x^2	z^2
370	1. 2	HL	OL
376	2	AP	PC
377	11	r^2z	vz
379	1.2	$\frac{m^2x}{t^2}$	$\frac{m^2x^2}{t^2x^2}$
381	ult.	$(b+v)$	$(a+v)$
382	10. 11	AE	Af
421	ult.	GF	QR
425	27.28	QN & qn &c.	QN vero falſa.
431		Fig.98	Fig.101
455	1	nx	ndx
456	2	y^m	my^m
463	29	CA	GA
468	1. 2	m^2	$\frac{1}{4}m^2$
470	2	x^3	y^3
	3	$3y^3$	$3x^3$
471	ult.	C	I
473	5	quarti	tertii
	10	$=x$	$=x^3$
479	1	$x(x+a)$	$(x+a)$
493	3	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
496	16	diameter	ſemidiameter
	23	$2r$	$6ar$

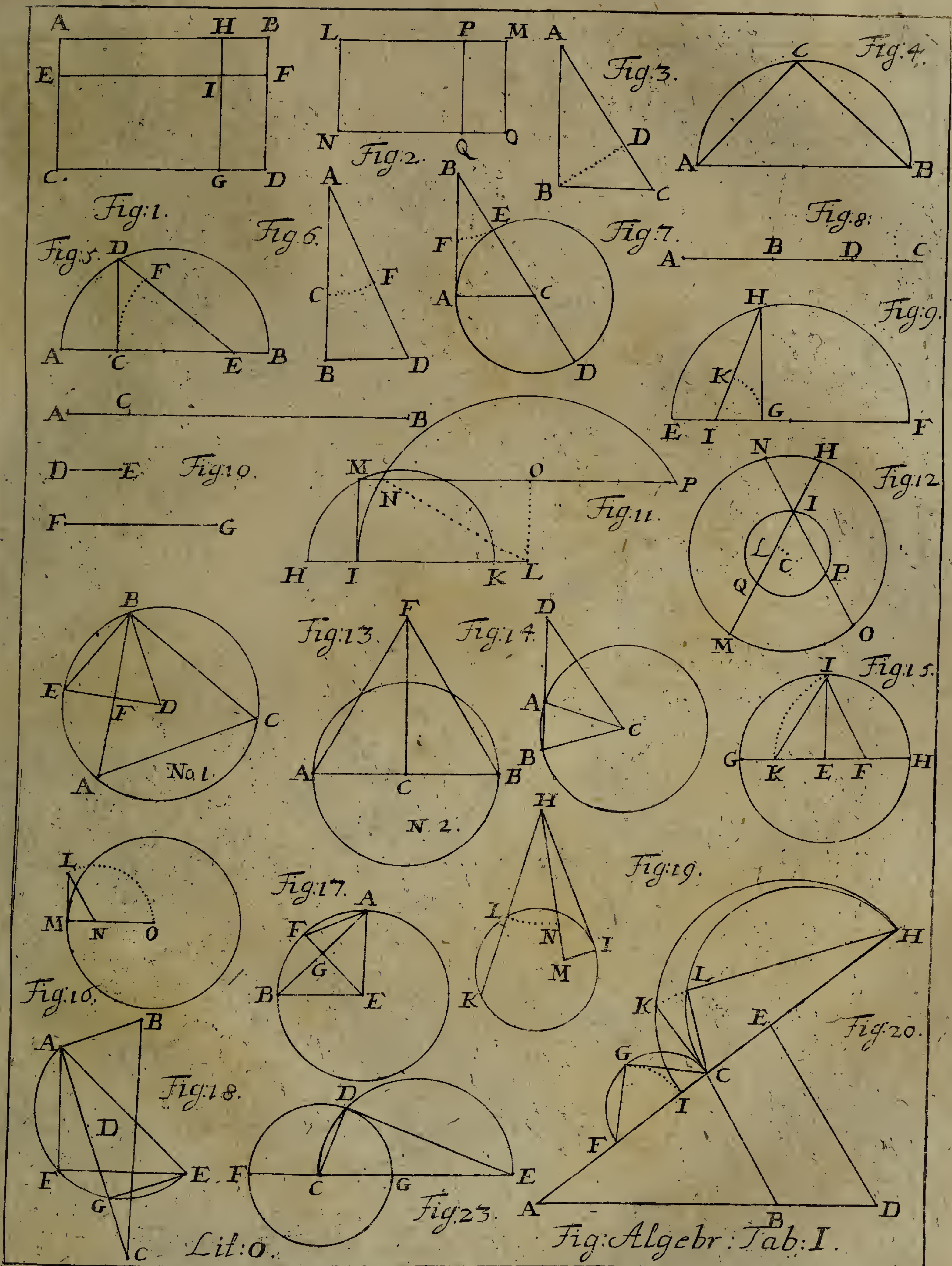
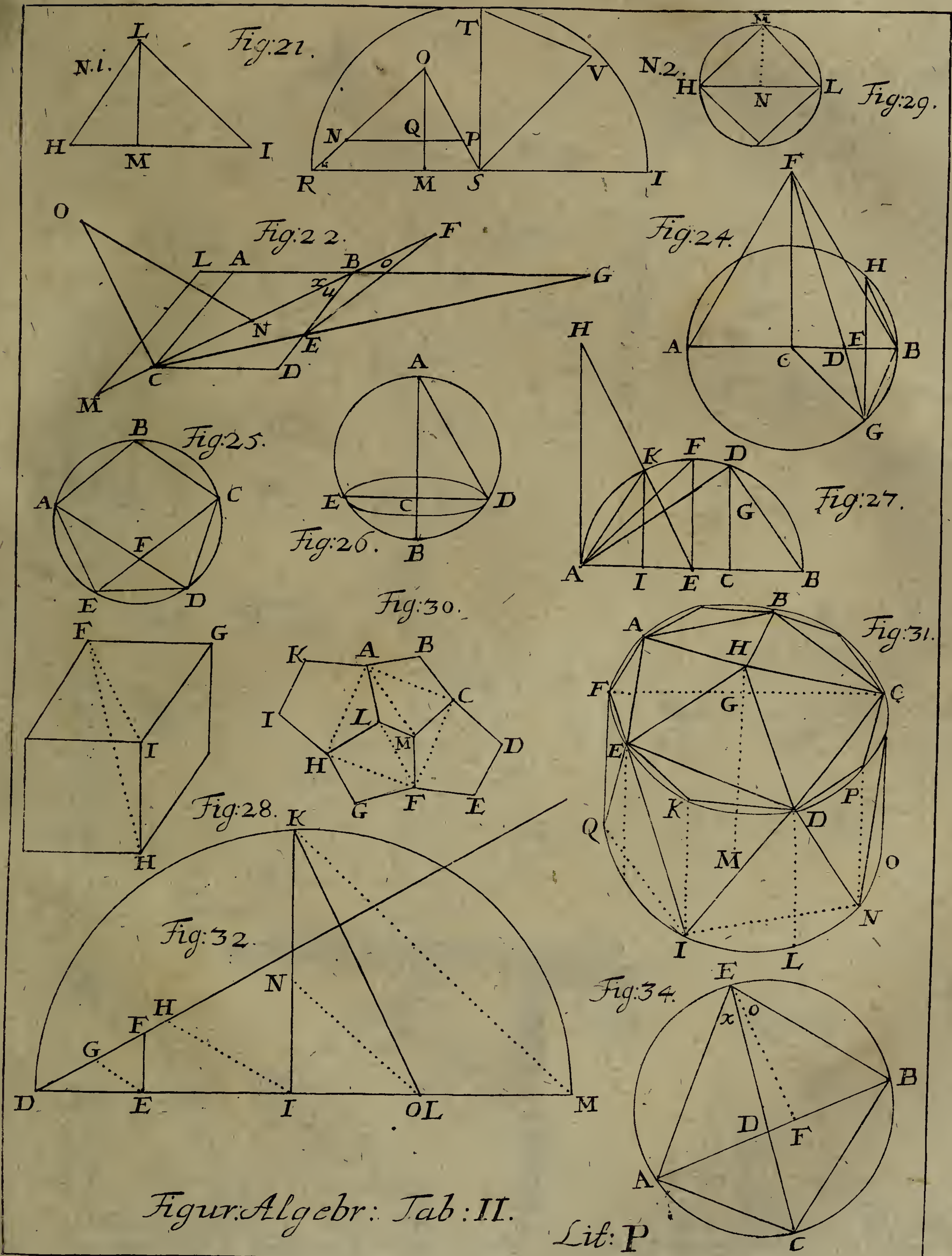


Fig: Algebr: Tab: I.



Figur:Algebr: Tab: II.

Lit: P

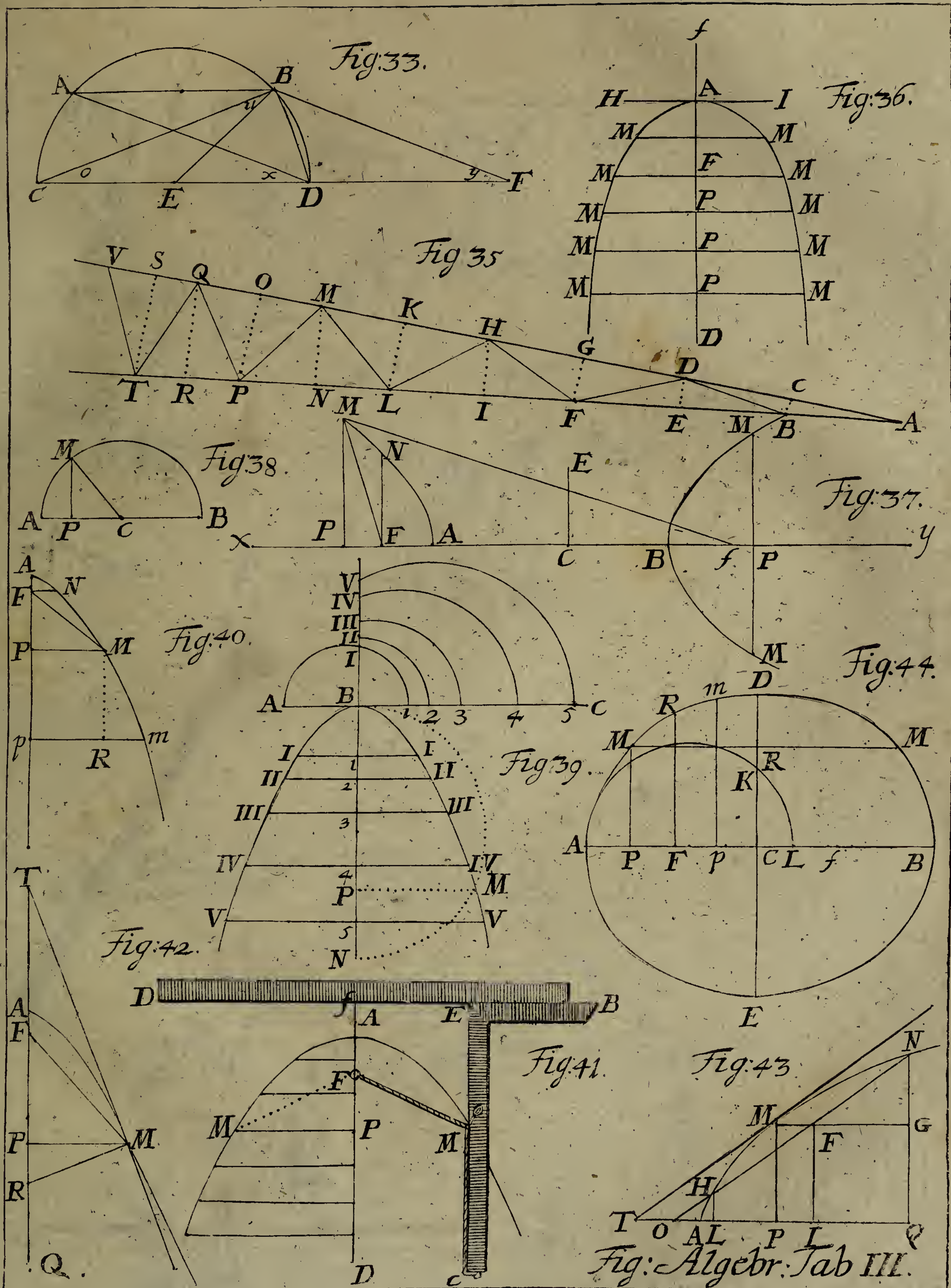


Fig: Algebr: Tab III.

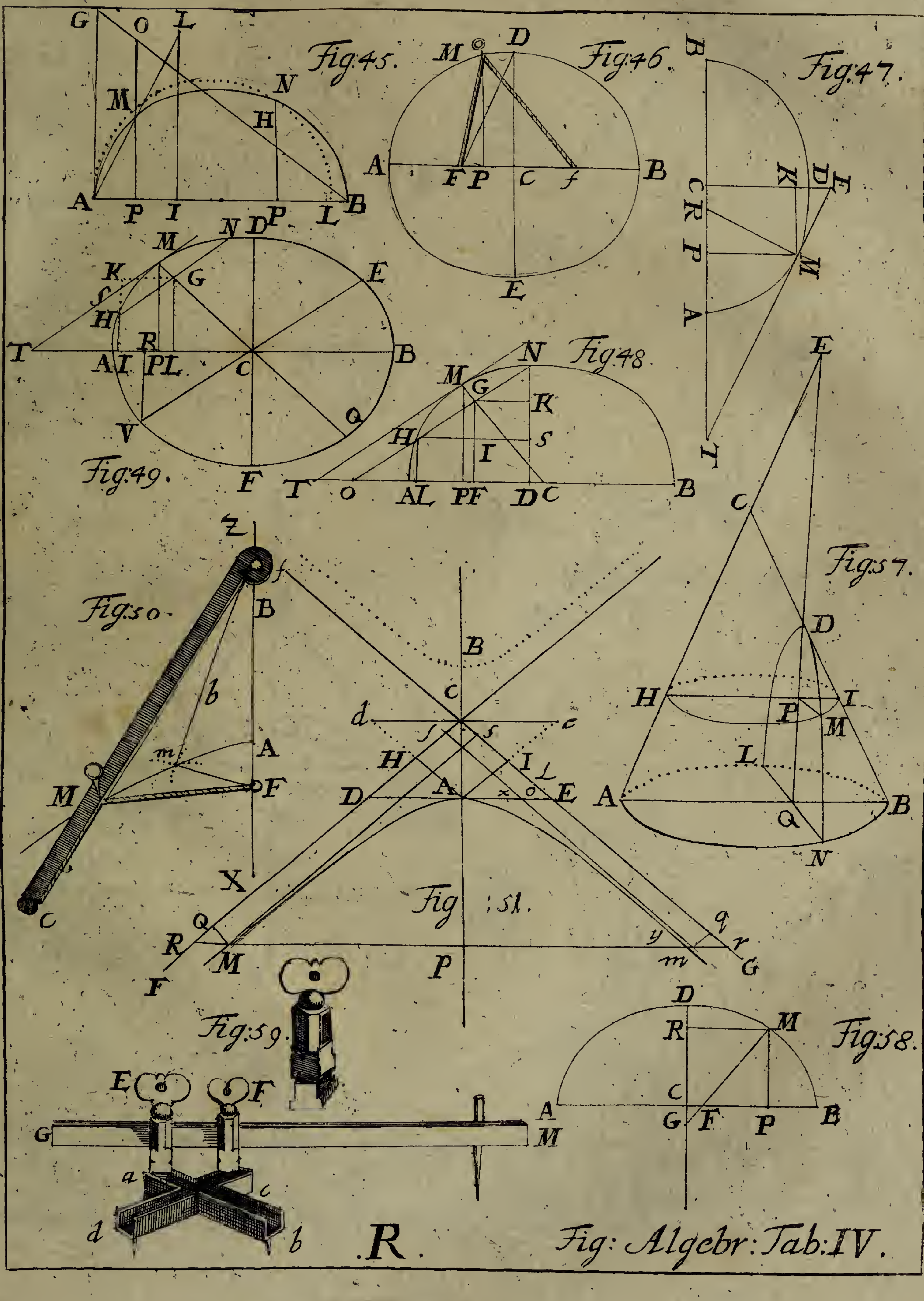
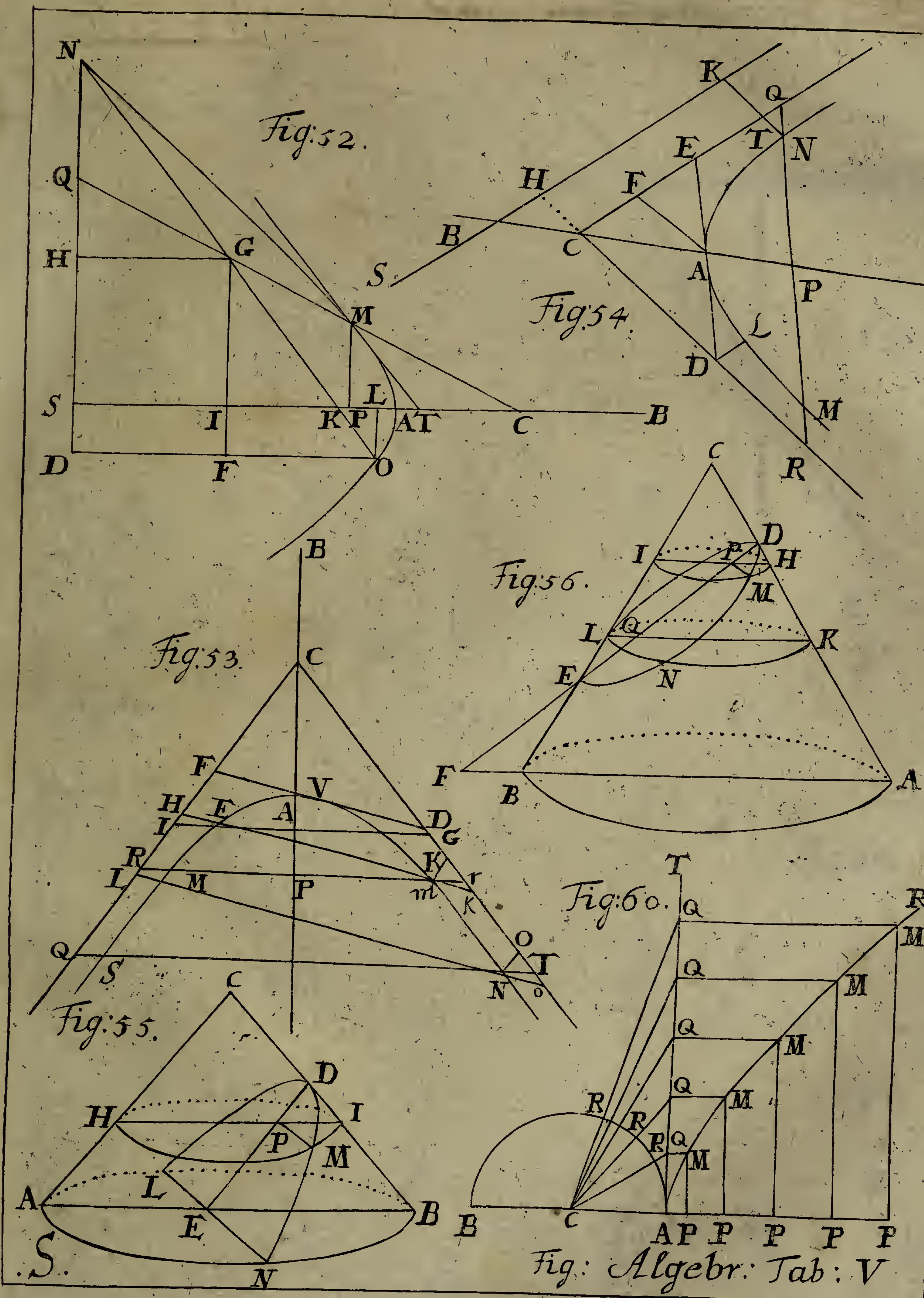
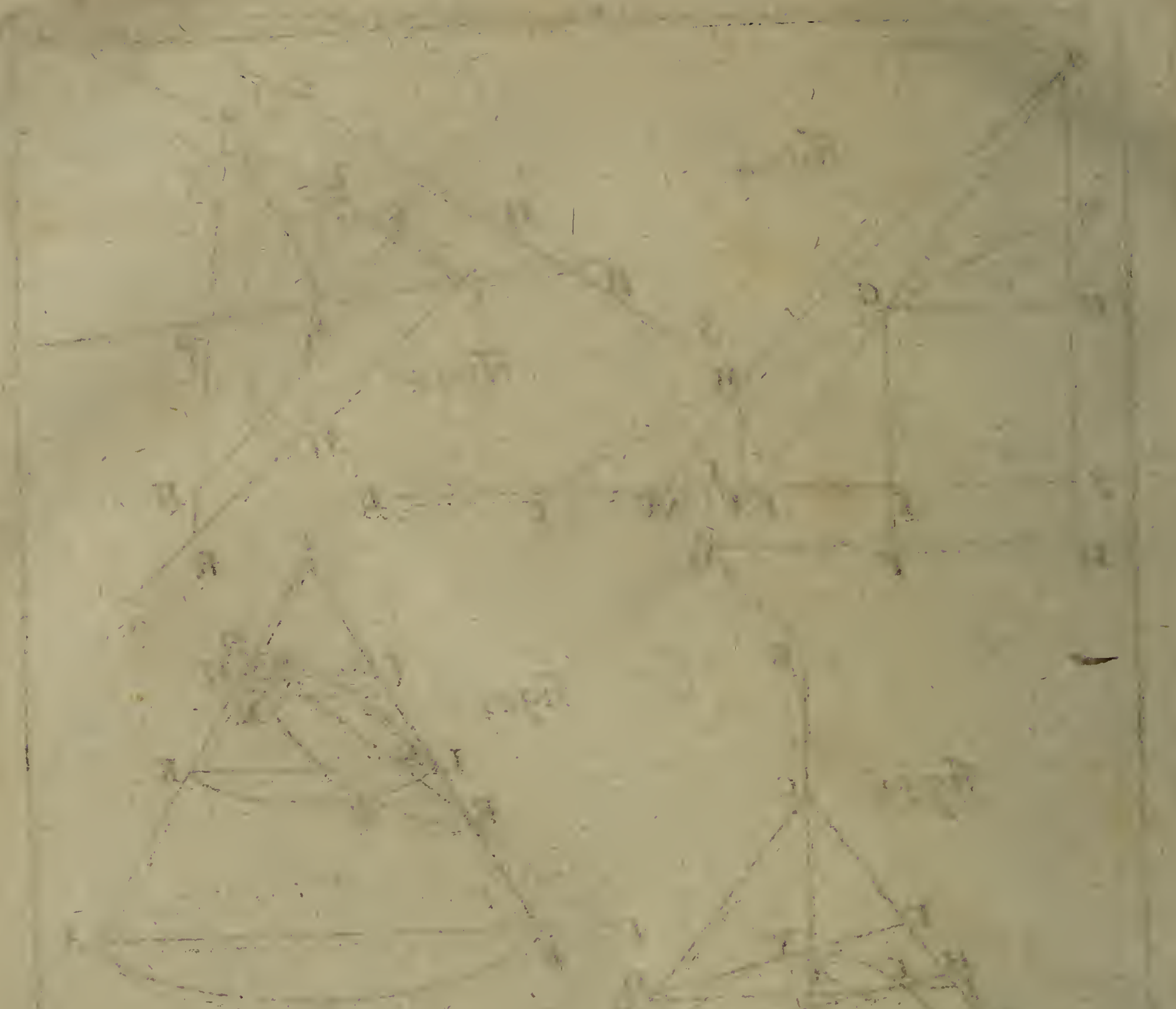


Fig: Algebr: Tab: IV.


Fig:52.
Fig:54.
Fig:56.
Fig:53.
Fig:60.
Fig:55.
Fig: Algebr: Tab: V



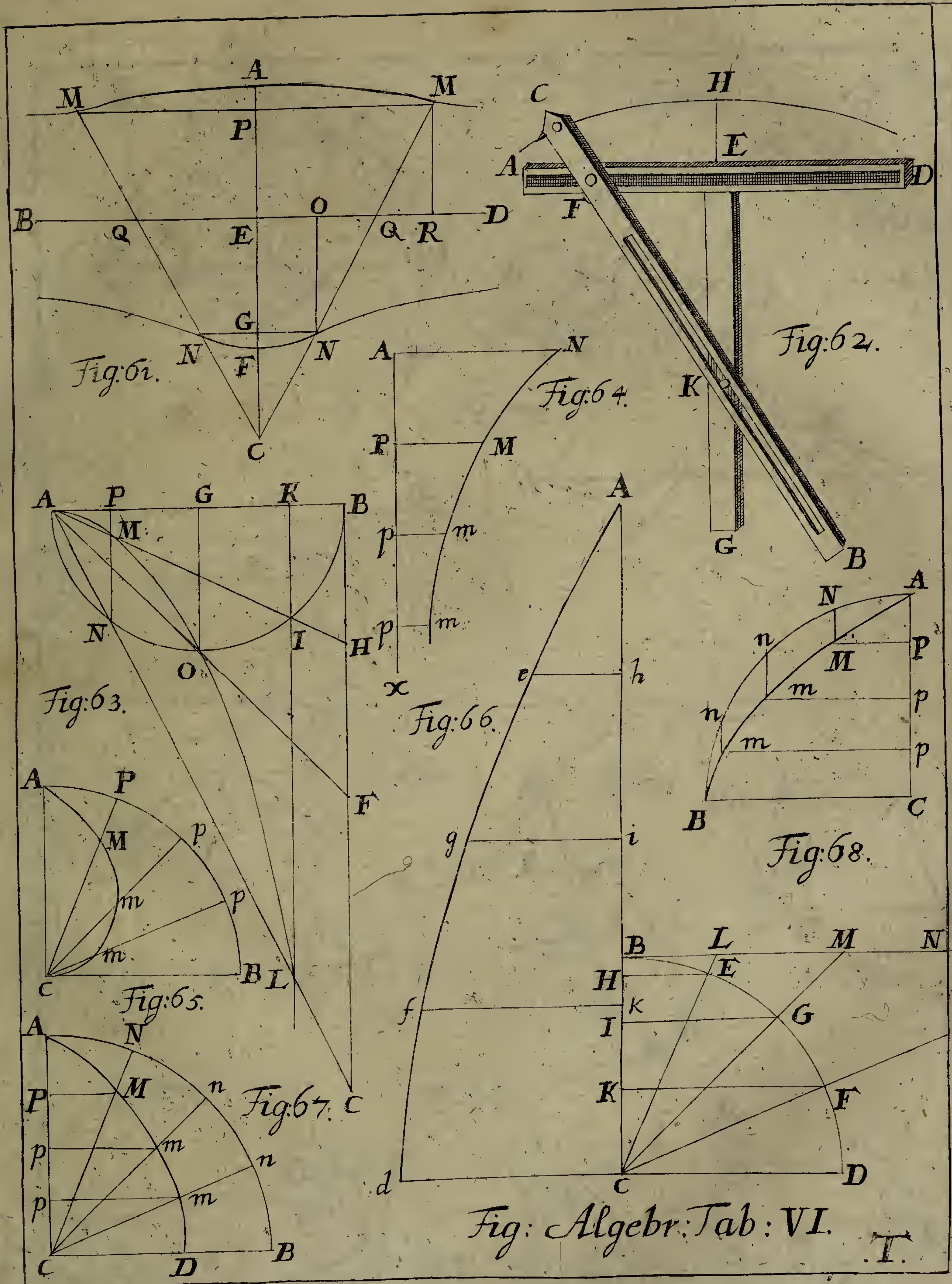


Fig: Algebr: Tab: VI.

T.

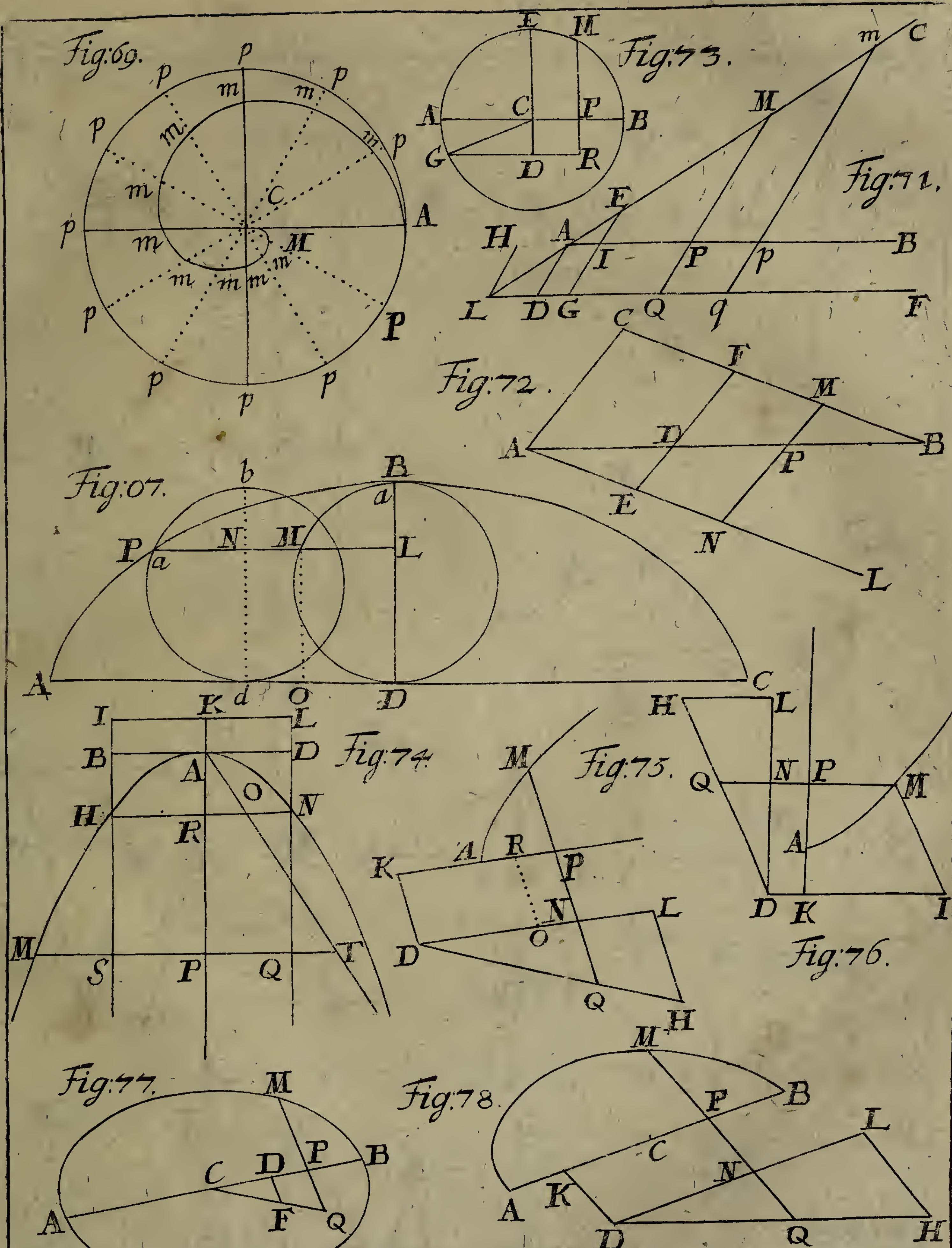
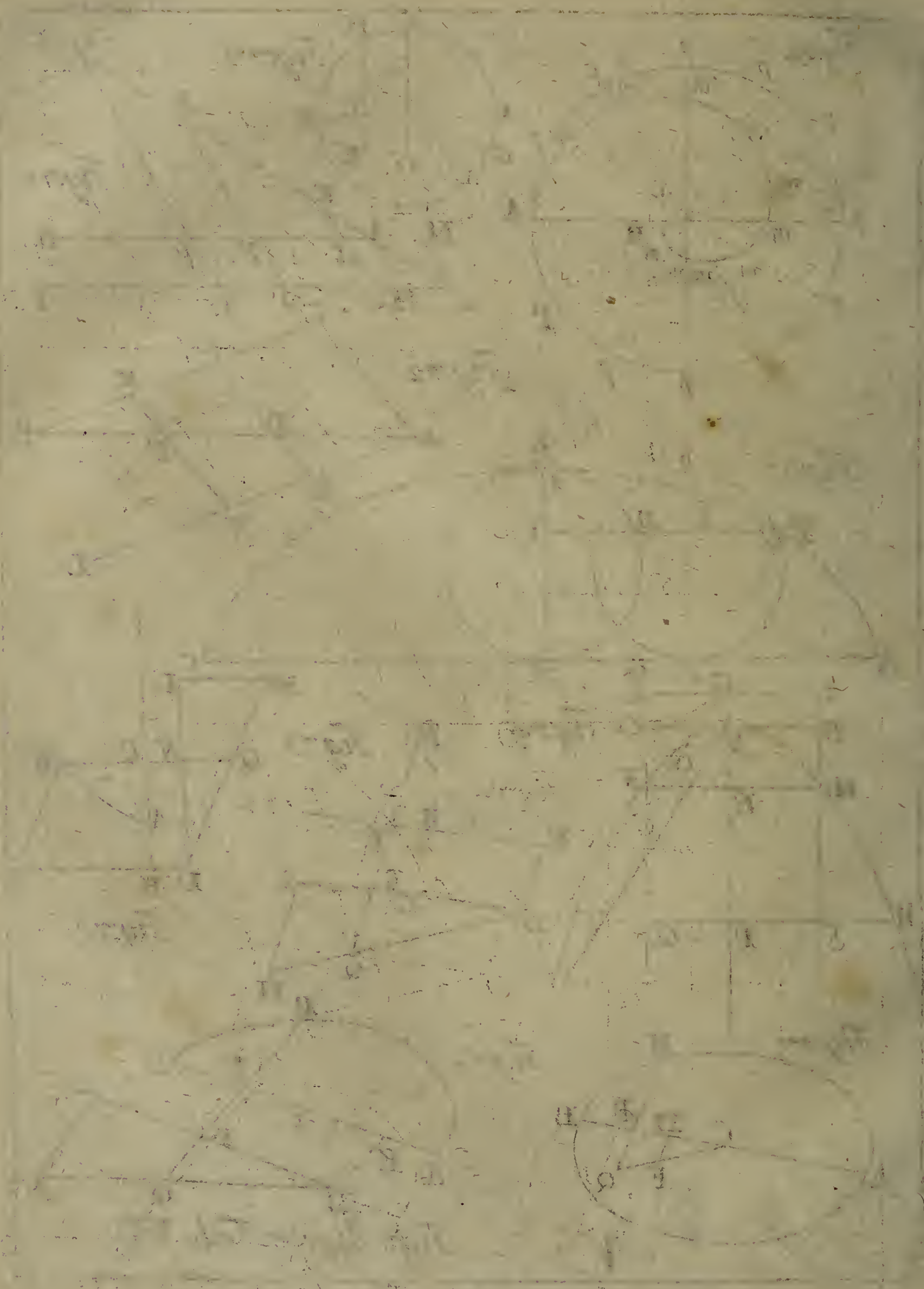
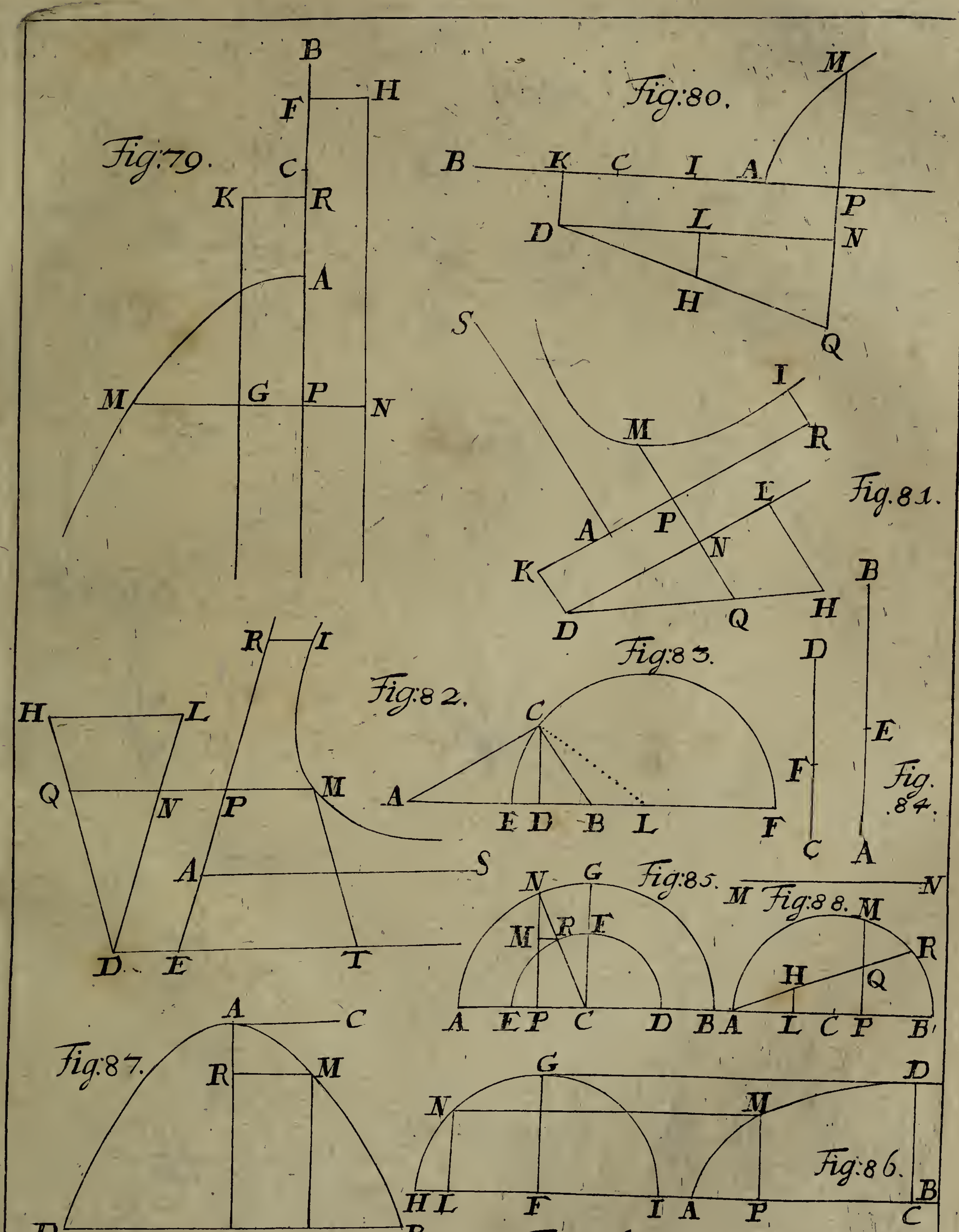


Fig: Algebr: Tab: VII.

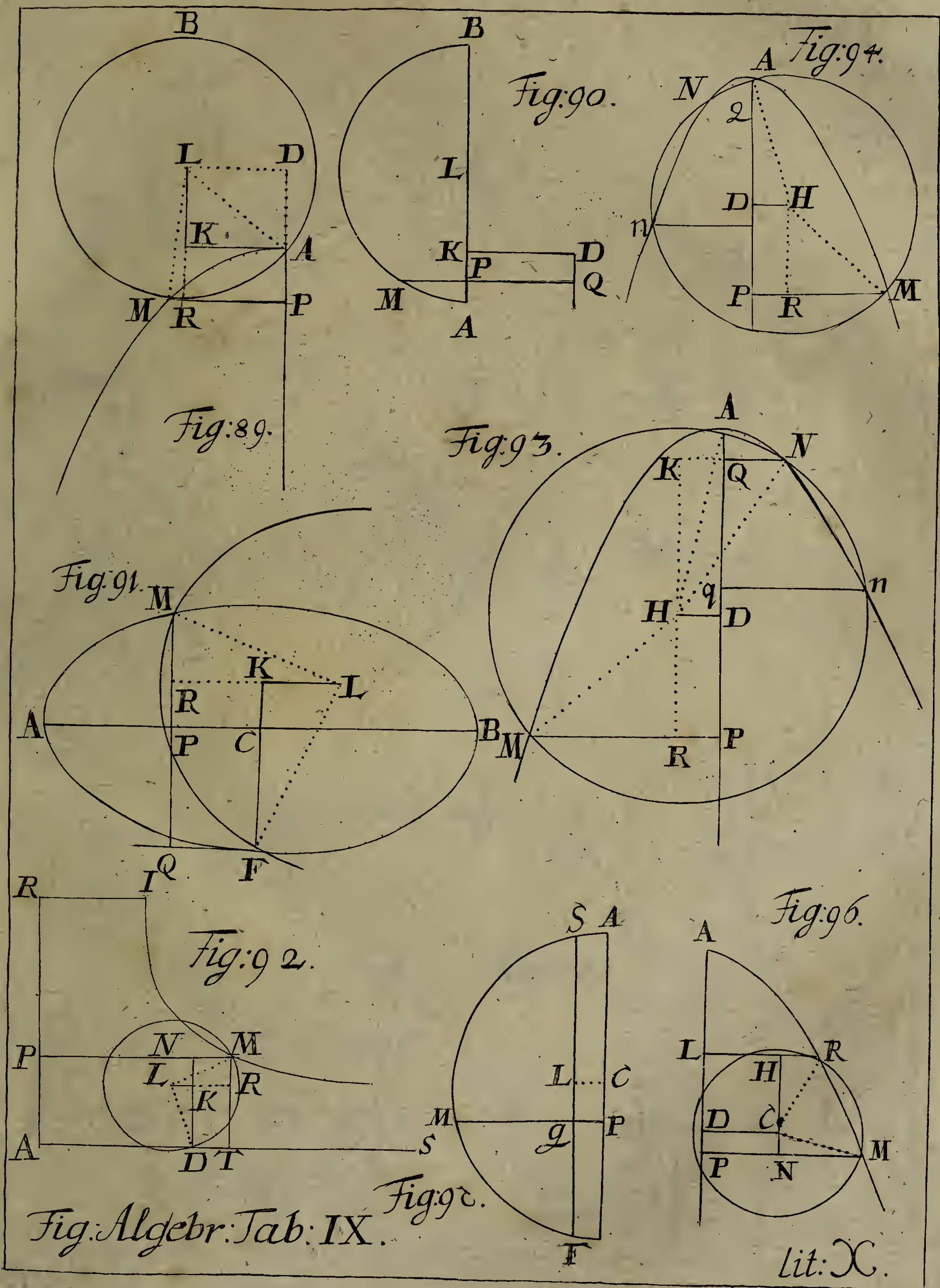
V





W

Fig: Algebr: Tab: VIII.


Fig:89.
Fig:90.
Fig:91.
Fig:92.
Fig:93.
Fig:94.
Fig:95.
Fig:96.
Fig:Algebr:Tab:IX.
lit:X.

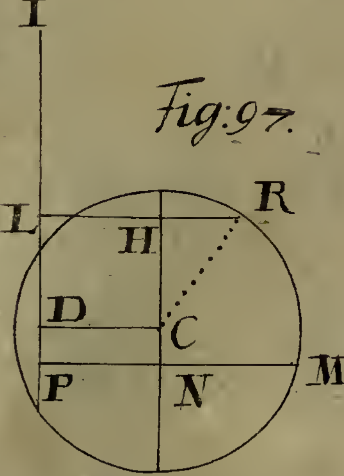


Fig: 97.

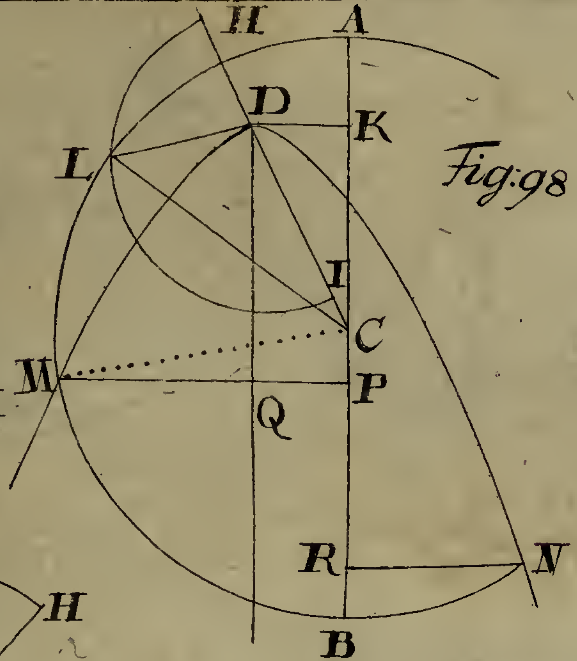


Fig: 98

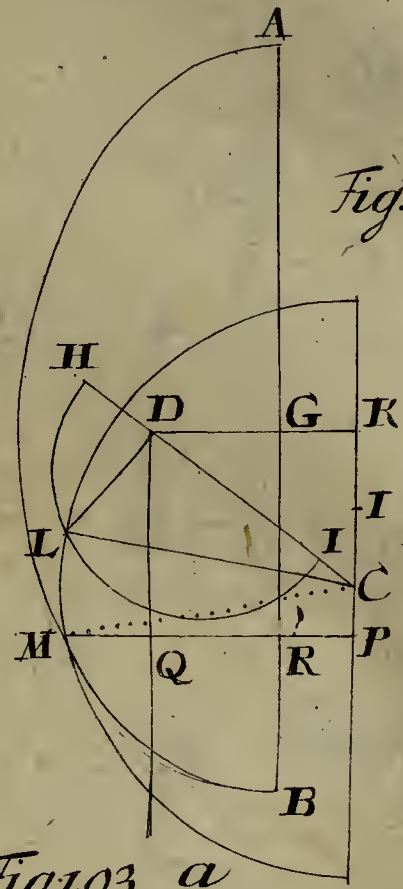


Fig: 99.

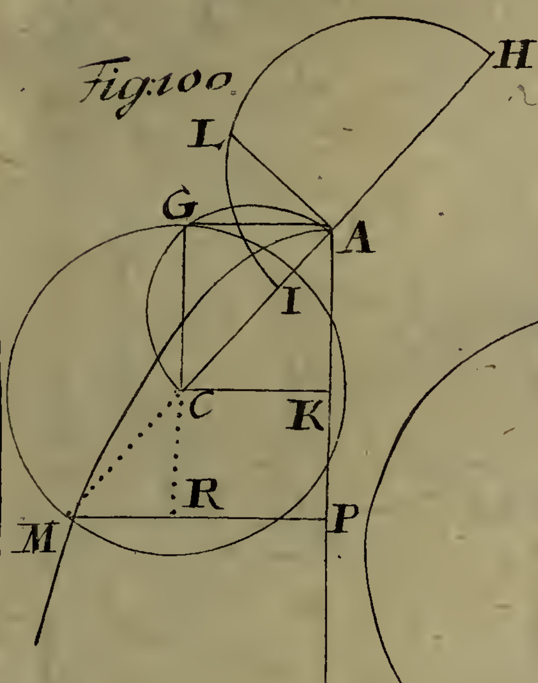


Fig: 100.

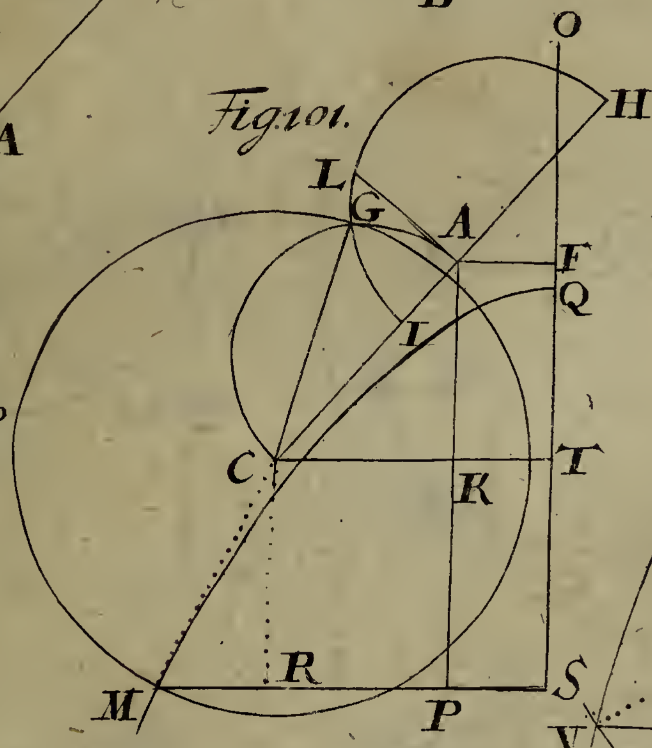


Fig: 101.

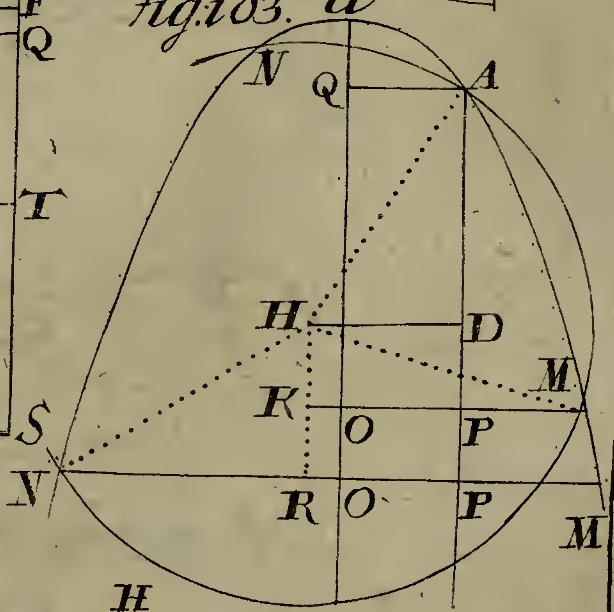


Fig: 103.

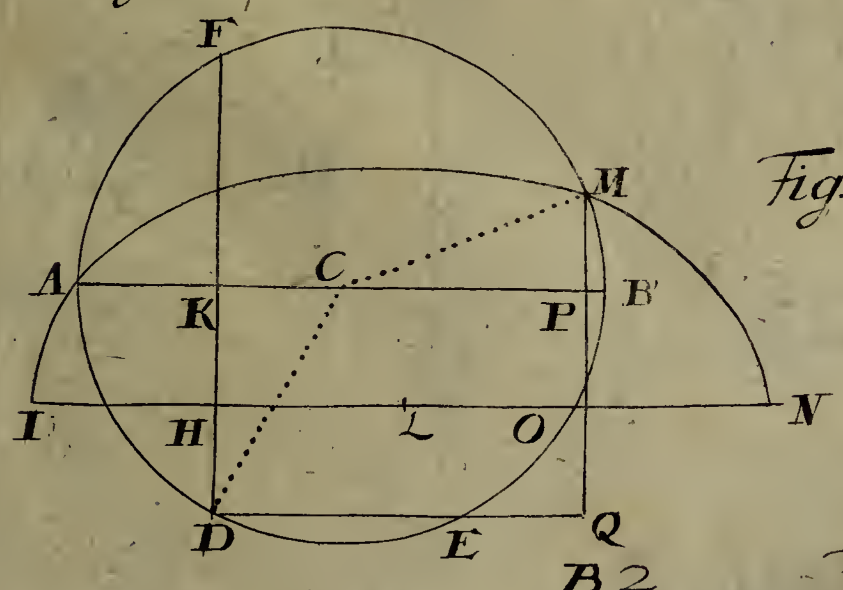


Fig: 104.

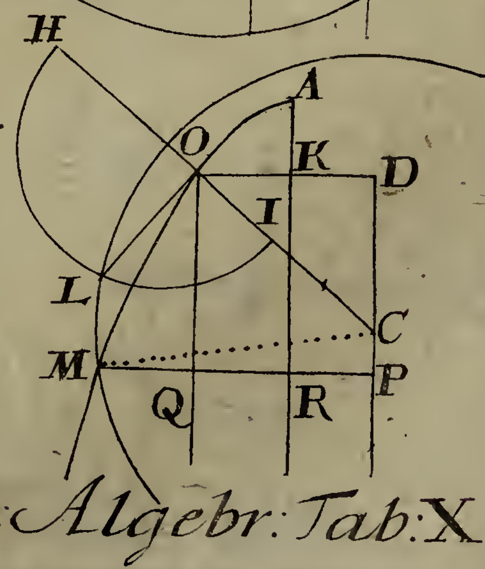


Fig: 102.

B 2

Fig: Algebr: Tab: X.

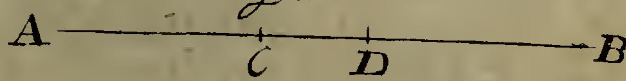


Fig: 106.

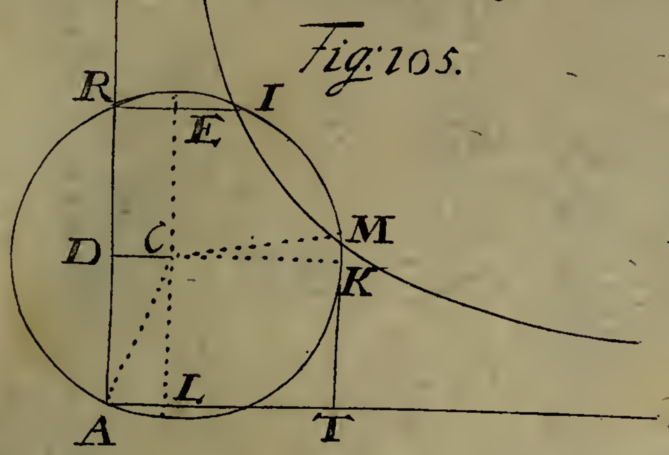


Fig: 105.

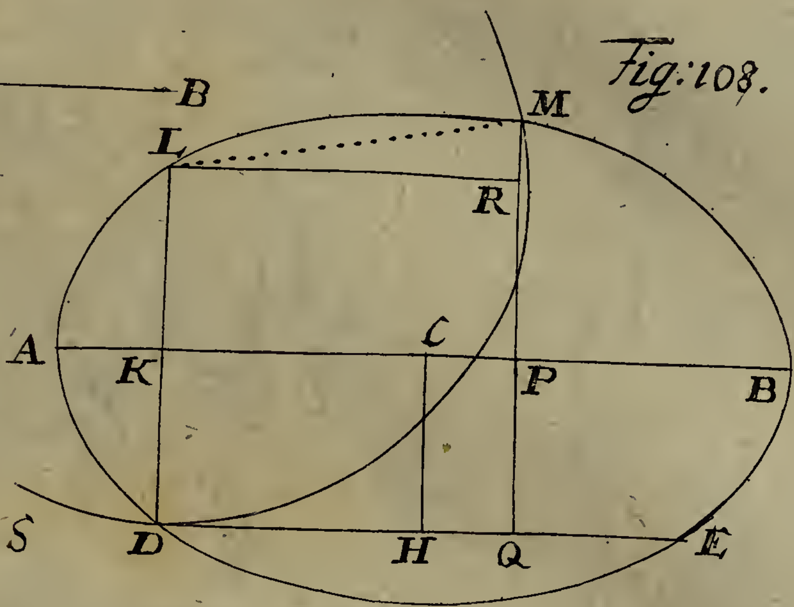


Fig: 108.

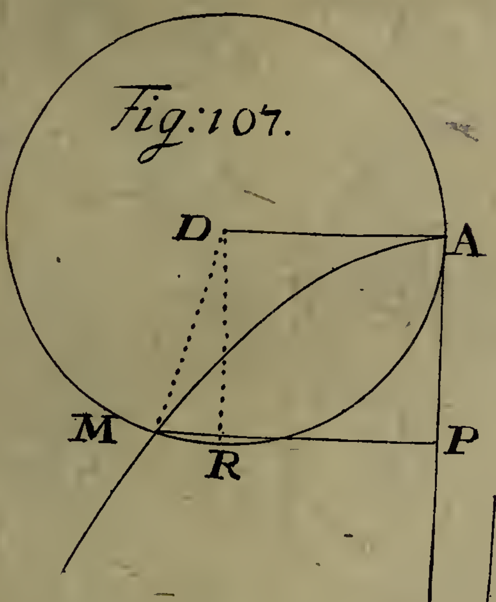


Fig: 107.

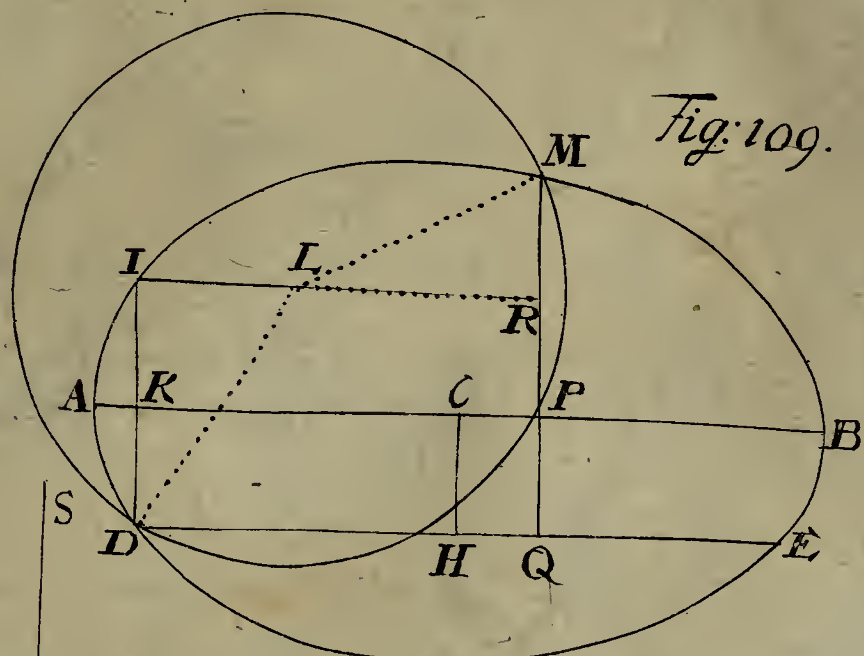


Fig: 109.

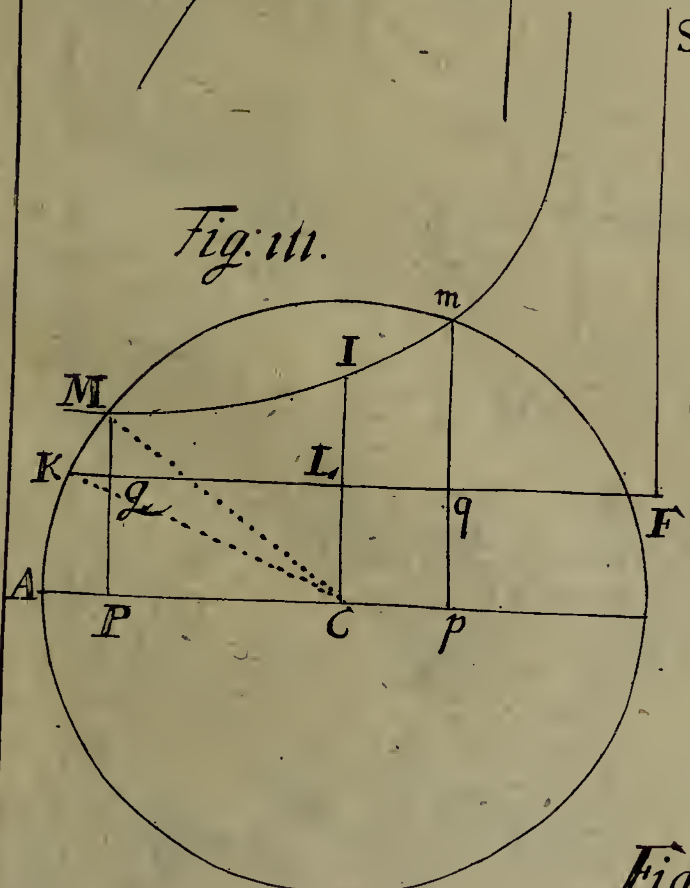


Fig: 111.

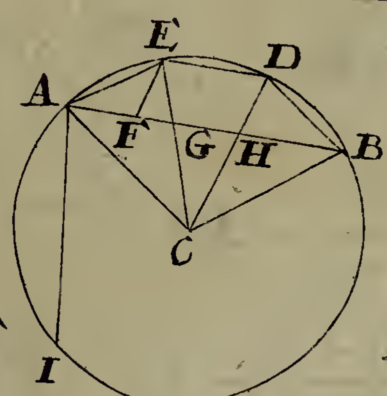


Fig: 110.

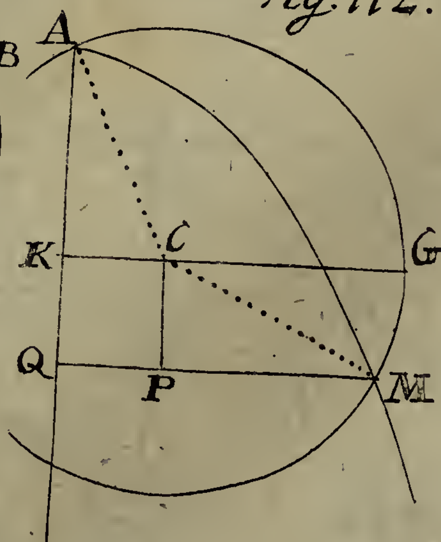


Fig: 112.

Fig: Algebr: Tab: XI. lit: B. 3.

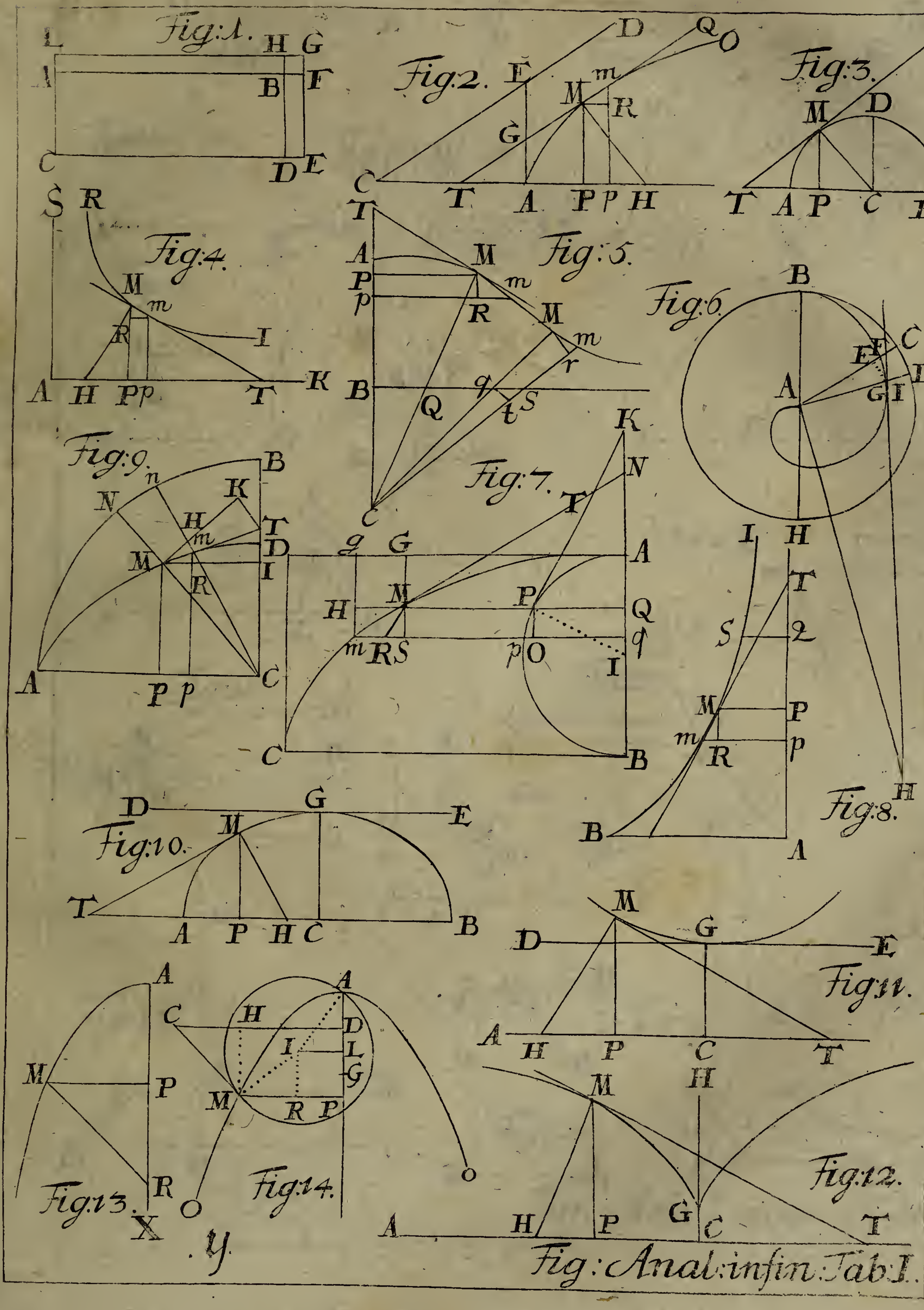


Fig: Anal: infin: Tab. I.

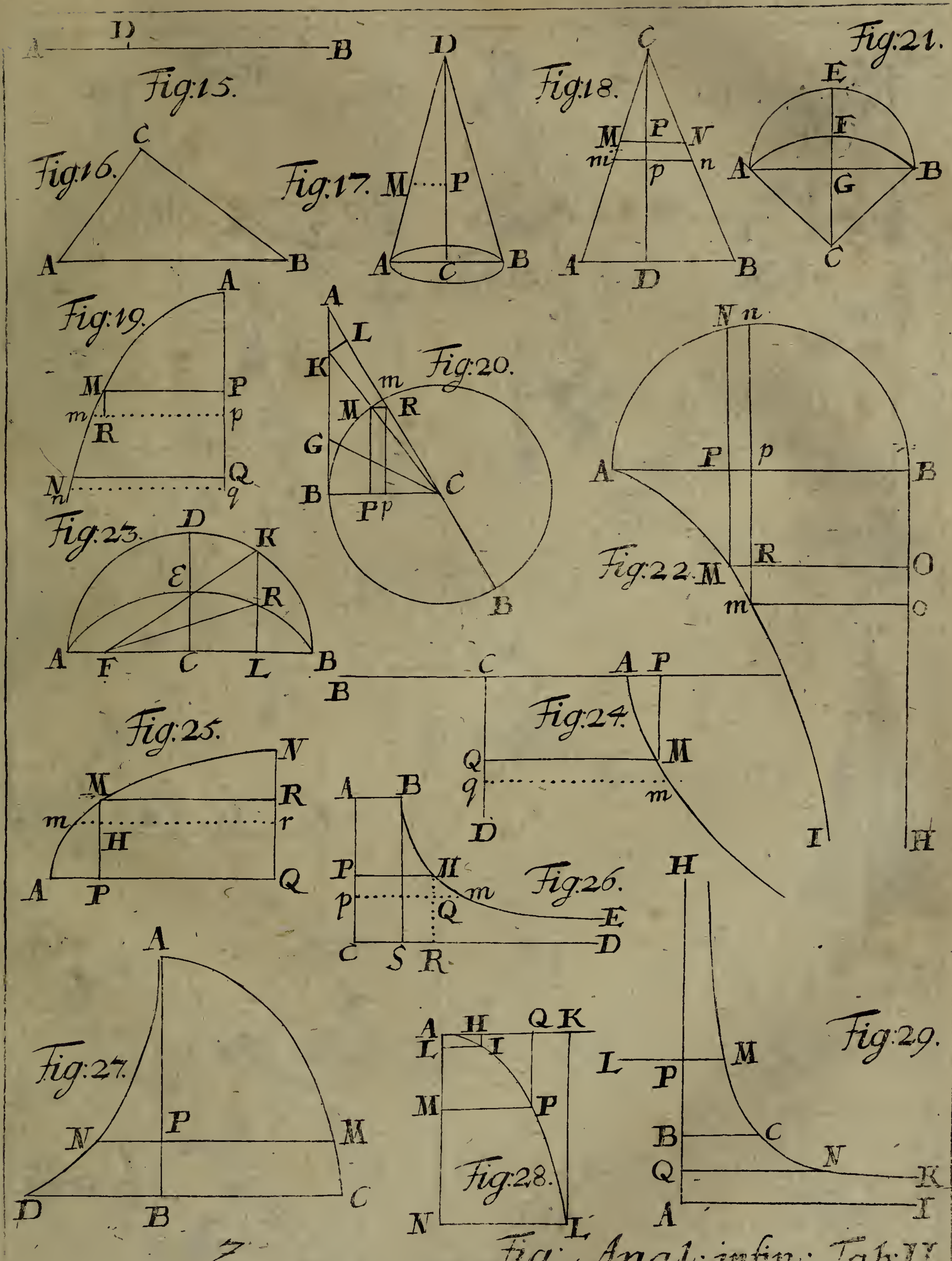


Fig: Anal: infin: Tab. II.

Z

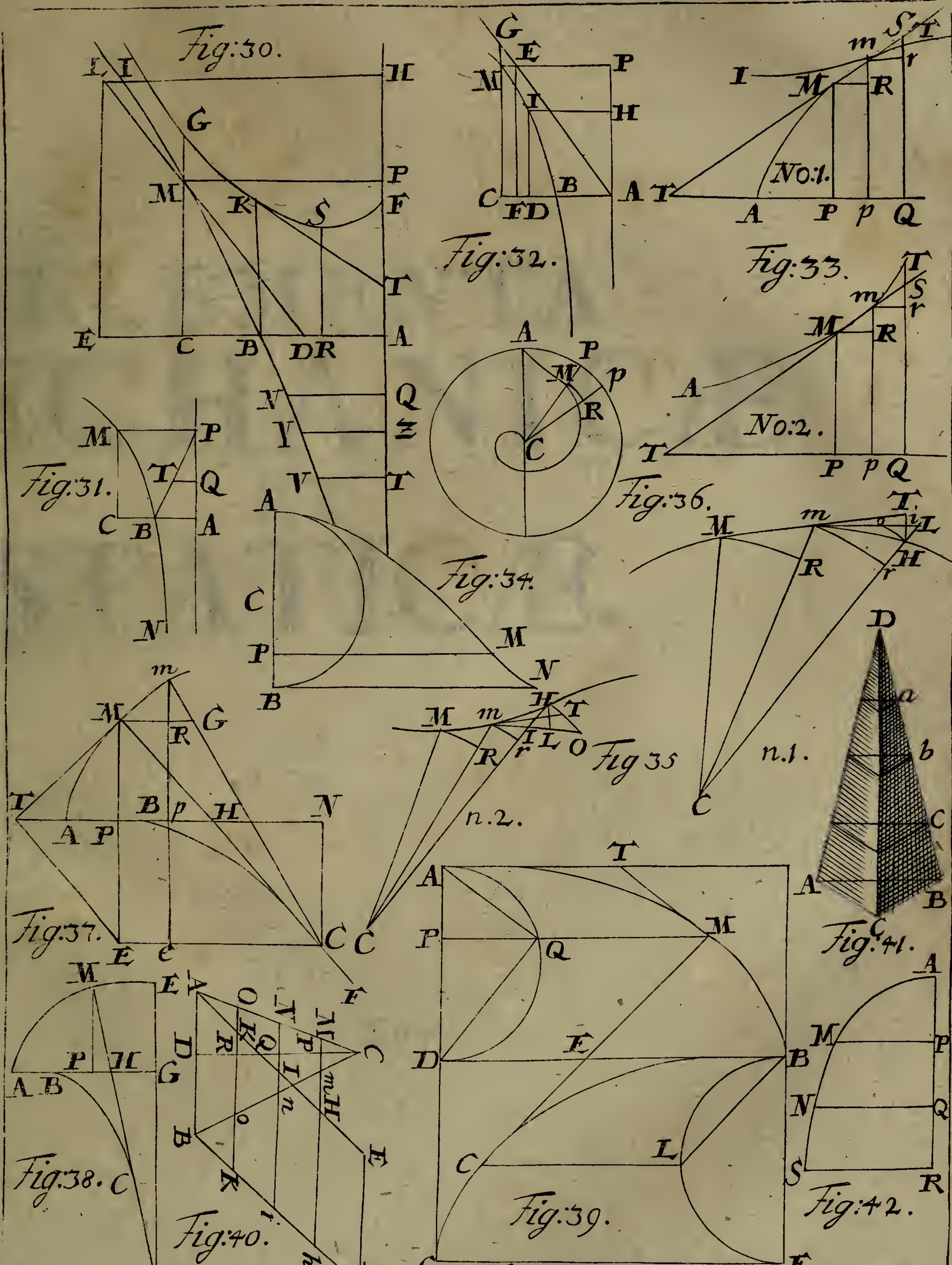


Fig: Anal. infin. Tab: III.

ELEMENTA MECHANICÆ ET STATICÆ.

PRÆFATIO.

A Pleriſque Autoribus, qui Mechanicæ elementa in uſum tyronum explicarunt, non omnis motus ratio habetur, ſed ejus tantum, qui vel virium vel temporis aliquo compendio ope machinarum perficitur. Nec improbandum eſt eorum inſtitutum, ſi quidem plura docere non intendunt, quam quæ in conſtruendis & examinandis machinis uſum præbere poſſunt. Quoniam tamen nobis conſtitutum eſt, Matheſeos elementa dare non modo ad uſum vitæ humanæ ſed & ad profectum ſcientiarum, Phyſicæ præſertim, ſufficientia; ideo conſultum duximus, ut de iis quoque tractaremus, quæ ad illuſtrandam motus doctrinam hactenus inventa. Hæc enim neceſſaria ſunt ad Naturæ cognitionem, ut ſine iis certa obtineri nunquam poſſit, cum in motu plurimorum phœnomenorum ratio contineatur. Ipſarum vero etiam machinarum conſideratio minime negligenda ab eo, qui cum laude in phyſicis aliquando

verſaturus, cùm motus corporum organicorum explicatio fruſtra ſine his principiis tentetur. Quanta felicitatis humanæ pars motuum ſcientiæ ſuperſtruatur, experientia clariſſime loquitur. Huic enim acceptum ferimus, quod pecudes & corpora inanimata peragant, quæ nos neceſſitatibus vitæ humanæ impulſi non ſine maximo ſudore perageremus. Eum igitur in finem non ſolum machinarum ſimplicium (quod vulgo fieri ſolet) rationem omnem fideliter expoſui; verum etiam hinc inde annotavi, quæ ad earum conſtructionem ſcitu neceſſaria ſunt, & deſideratam hactenus in iſtiusmodi elementis tractationem de potentiarum ad machinas applicatione addidi. Quos rerum naturalium cognitio parum juvat, his ſolis contenti præterire poſſunt motus regulas: machinarum enim vires ſine iis plerumque plene intelligent. Quamvis vero nonnulli Staticam a Mechanica ſejungant; conſultius tamen viſum fuit Sororio vinculo utramque connecti, cum ita demonſtrationes nexu pulchriori concatenare liceret.

ELE-

ELEMENTA MECHANICÆ.

CAPUT I.

De MOTU ÆQUABILI.

DEFINITIO 1.

1. Mechanica eſt ſcientia motus. *Staticam* vocant nonnulli ejus partem, quæ de motu corporum a gravitate pendente tractat.

DEFINITIO 2.

2. *Quies* eſt permanentia corporis in eodem loco. *Motus* vero eſt continua loci mutatio.

SCHOLION.

3. Moveri *nempe dicitur corpus, ſi ſucceſſive aliis aliisque corporibus quieſcentibus aut ejuſdem corporis quieſcentis partibus ſit contiguum.*

DEFINITIO 3.

4. *Gravitas* eſt niſus deorſum verſus centrum terræ.

DEFINITIO 4.

5. *Gravitatio* eſt preſſura, quam corpus in aliud ſibi ſubjectum vi gravitatis ſuæ exercet.

DEFINITIO 5.

6. *Maſſa* corporis eſt materia ipſi cohærens, hoc eſt, quæ una cum corpore movetur & gravitat.

DEFINITIO 6.

7. *Moles* ſeu *volumen* eſt expanſio corporis ſecundum longitudinem, latitudinem & profunditatem.

COROLLARIUM.

8. Invenitur adeo per regulas geometriæ.

DEFINITIO 7.

9. *Vis Motrix* ſeu *vis* ſimpliciter eſt, quod motum producit. Dicitur *viva*, ſi motum actu producit, ſeu cum motu actuali conjungitur, qualis eſt in globo cadente; *Mortua* vero vocatur, ſi ad motum producendum tendit quidem, verum motum actu nondum producit, qualis eſt in globo ex filo ſuſpenſo.

SCHOLION.

10. *Hanc virium diſtinctionem dudum agnovere inter homines plebejos molitores noſtrates.* Mortuam *enim vocant* aquam *in alveo ſtagnantem aut ſegniter admodum fluentem;* vivam *vero, quæ impetu concepto rotis molendinorum circumagendis ſufficit. Acuti*ſſi-

tiſſimus Leibnitius *cum magnum momentum in ea ſitum eſſe deprehenderet ad motuum doctrinam rite tradendam, eandem in mechanicam introduxit* (a).

DEFINITIO 8.

11. *Tempus* voco eam temporis partem, qua motus duraſſe ſupponitur.

DEFINITIO 9.

12. *Spatium* eſt linea, quam mobile inſtar puncti conſideratum motu ſuo deſcribere concipitur.

DEFINITIO 10.

13. *Velocitas* ſeu *celeritas* eſt ea corporis affectio, qua mobile aptum redditur dato tempore ſpatium datum percurrendi.

COROLLARIUM 1.

14. Ut adeo celeritatis aliqua menſura conſtituatur, ſpatium dividendum eſt in tot partes æquales, in quot tempus dividi concipitur. Quantitas enim ſpatii iſtiusmodi temporis articulo reſpondens eſt menſura celeritatis.

SCHOLION.

15. *E. gr. ponamus mobile A intervallo* 40 *minutorum ſecundorum abſolvere ſpatium* 80 *pedum. Quodſi* 80 *per* 40 *dividas, quotus* 2 *indicabit, eam eſſe mobilis velocitatem, ut intervallo unius minuti ſecundi intervallum duorum pedum emetiri poſſit. Recte adeo velocitas ejus exprimitur per* $\frac{80}{40}$, *hoc eſt, per* 2. *Sit alind mobile B, quod intervallo* 30 *minutorum ſecundorum ſpatium* 90 *pedum percurrat; erit celeritatis ejus index* 3. *Quare cum in utroque caſu ſpatiorum menſura ſit pes, qui utrobique ejusdem longitudinis ſupponitur; temporum vero menſura ſit ſcrupulum ſecundum, quod utrobique ejusdem durationis aſſumitur; indices celeritatum* 2 & 3 *ſunt homogenei, adeoque recte dicimus, celeritatem ipſius A eſſe ad celeritatem ipſius B ut* 2 *ad* 3.

COROLLARIUM 2.

16. Quodſi ergo ſpatium ſit $= s$, tempus $= t$, celeritas per $s : t$ exprimi poteſt.

DEFINITIO 11.

17. *Impetus* eſt factum ex maſſa in celeritatem.

COROLLARIUM.

18. Quare ſi celeritas $= c$, maſſa $= m$; erit impetus $= cm$.

SCHOLION.

19. *Coincidit impetus cum quantitate motus momentanea. Carteſiani equidem* Quantitatem motus integri *æſtimant ex facto maſſa in celeritatem; ſed cum motus ſit ens ſucceſſivum, quod partes una coexiſtentes non habet, ejus utique quantitas conſtitui debet per aggregatum ſingularum partium ſucceſſive exiſtentium. Æqualis adeo eſt facto ex impetibus in tempus.*

DEFINITIO 12.

20. *Linea directionis* eſt, juxta quam corpus progredi nititur.

DEFINITIO 13.

21. *Vis reſiſtendi* dicitur, quæ in con-

(a) Act. Erudit. A. 1695 p. 194.

contrarium vis cujuscunque alterius agit.

DEFINITIO 14.

22. *Motus æquabilis* eſt, ſi mobile continuo eadem celeritate fertur.

AXIOMA. 1.

23. *Nihil eſt ſine ratione ſufficiente, cur potius ſit, quam non ſit.*

THEOREMA 1.

24. *Effectus pleni ſunt viribus cauſarum ſuarum proportionales.*

DEMONSTRATIO.

Si enim vis aliqua determinata indifferens eſſet ad effectum quantumlibet producendum, nulla daretur ratio, cur hunc potius, quam alium produceret. Nihil vero eſt ſine ratione ſufficiente, cur potius ſit, quam non ſit (§. 23). Ergo fieri nequit, ut vis determinata ſit indifferens ad quantumlibet effectum producendum, adeoque ipſi determinata effectus quantitas ex neceſſitate reſpondet. Quare ſi vis V ut V, ſeclusa omni vi alia ſive adjuvante, ſive impediente, effectum E ut E producit; etiam alia V ut V effectum E ut E producet, conſequenter mV ut mV (ubi m notat multiplum aut ſubmultiplum ipſius V) producet effectum mE ut mE. Eſt igitur $V : mV = E : mE$ (§. 139 *Arithm.*), hoc eſt, effectus pleni ſunt viribus ſuarum cauſarum proportionales. *Q. e. d.*

THEOREMA 2.

25. *Duorum corporum motu æquabili latorum celeritates* C *&* c *ſunt in ratione compoſita ex directa ſpatiorum* S *&* ſ *&* reciproca *temporum* T *&* t.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim $C = S : T$ & $c = ſ : t$ (§. 16)

Quare $C : c = S : ſ$
$ T : t$

$C : c = St : ſT$ (§. 104 *Anal. fin.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

26. Quodſi $C = c$, erit $St = ſT$ adeoque $S : ſ = T : t$ (§. 269 *Arithm.*), hoc eſt, ſi duo corpora motu æquabili & eadem celeritate ferantur, ſpatia ſunt ut tempora.

COROLLARIUM 2.

27. Si præter $C = c$ etiam fuerit $t = T$; erit $S = ſ$, adeoque corpora æquali celeritate lata motu æquabili æquali tempore ſpatia æqualia deſcribunt.

THEOREMA 3.

28. *Spatia* S *&* ſ *a duobus mobilibus peracta ſunt in ratione compoſita temporum* T *&* t *& celeritatum* C *&* c.

DE-

DEMONSTRATIO.

Eſt enim $C:c = St:ſT$ (§. 25).

Quare $CſT = cSt$ (§. 267 *Arithm.*) & $S:ſ = CT:ct$ (§. 269 *Arithm.*). Q. e. d.

COROLLARIUM 1.

29. Si $S = ſ$; erit $CT = ct$, adeoque $C:c = t:T$ (§. 269 *Arithm.*), hoc eſt, ſi duo corpora motu æquabili æqualia ſpatia deſcribant; celeritates habent temporum rationem reciprocam.

COROLLARIUM 2.

30. Si ulterius $t = T$; erit etiam $C = c$, adeoque corpora, quæ motu æquabili tempore æquali ſpatia æqualia percurrunt, æquali celeritate feruntur.

THEOREMA 4.

31. *Impetus duorum corporum, quæ motu æquabili feruntur,* I *&* i, *ſunt in ratione compoſita celeritatum* C *&* c *& maſſarum* M *&* m.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim $I = CM$ & $i = cm$ (§. 18). Quare $I:i = CM:cm$, hoc eſt, I habet ad i rationem compoſitam ipſius C ad c & ipſius M ad m (§. 148 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

32. Si $I = i$; erit $CM = cm$, adeoque $C:c = m:M$ (§. 269 *Arithm.*), hoc eſt, ſi duorum mobilium motu æquabili latorum impetus fuerint æquales; celeritates habent rationem maſſarum reciprocam.

COROLLARIUM 2.

33. Quare ſi ulterius $M = m$; erit etiam $C = c$, hoc eſt, ſi duorum mobilium motu æquabili latorum impetus & maſſæ fuerint æquales; æquali celeritate feruntur.

THEOREMA 5.

34. *Duorum corporum, quæ motu æquabili feruntur, celeritates* C *&* c *ſunt in ratione compoſita ex impetuum* I *&* i *directa & maſſarum* M *&* m *reciproca.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam $I:i = CM:cm$ (§. 31) erit $Icm = iCM$ (§. 267 *Arithm.*) $C:c = Im:iM$ (§. 269 *Arithm.*). Q. e. d.

COROLLARIUM 1.

35. Si $C = c$; erit $Im = iM$, adeoque $I:i = M:m$ (§. 269 *Arithm.*) hoc eſt, ſi duo mobilia motu æquabili & eadem celeritate ferantur; impetus maſſarum rationem habent.

COROLLARIUM 2.

36. Quodſi ulterius fuerit $M = m$; erit etiam $I = i$, adeoque ſi duo mobilia æqualem maſſam habentia motu æquabili & eadem velocitate ferantur; impetus eorum æquales ſunt.

THEOREMA

THEOREMA 6.

37. *In motu æquabili maſſæ cor-[p]orum* M *&* m *ſunt in ratione com-[p]oſita ex impetuum* I *&* i *directa & [c]eleritatum* C *&* c *reciproca.*

DEMONSTRATIO.

[Q]uoniam $I : i = CM : cm$ (§. 31)

erit $Icm = iCM$ (§. 267 *Arithm.*)

$M : m = Ic : iC$ (§. 269 *A-[r]ithm.*). Q. e. d.

COROLLARIUM.

38. Si $M = m$; erit $Ic = iC$, adeo-[q]ue $I : i = C : c$ (§. 269 *Arithm.*), hoc [eſ]t, ſi duorum mobilium motu æqua-[b]ili latorum maſſæ fuerint æquales; [i]mpetus ſunt ut velocitates.

THEOREMA 7.

39. *In motu æquabili impetus* I & [i] *ſunt in ratione compoſita ex ratio-[n]ibus directis maſſarum* M *&* m *at-[q]ue ſpatiorum* S *&* ſ *& reciproca [te]mporum* T *&* t.

DEMONSTRATIO.

[Q]uoniam $C : c = St : ſT$ (§. 28)
& $I : i = CM : cm$ (§. 31)

erit $CI : ci = CMSt : cmſT$ (§. 197 *Arithm.*)

$I : i = MSt : mſT$ (§. 172 *[A]rithm.*). Q. e. d.

COROLLARIUM 1.

40. Si $I = i$; erit $MSt = mſT$ adeoque $M : m = ſT : St$, $S : ſ = mT : Mt$ & $T : t = MS : mſ$, hoc eſt, ſi duorum mobilium motu æquabili latorum impetus fuerint æquales; 1. maſſæ eorundem ſunt in ratione compoſita ex directa temporum & reciproca ſpatiorum; 2. Spatia ſunt in ratione compoſita ex directa temporum & reciproca maſſarum; 3. Tempora denique ſunt in ratione compoſita maſſarum & ſpatiorum.

COROLLARIUM 2.

41. Si præterea $M = m$; erit $ſT = St$, adeoque $S : ſ = T : t$ (§. 269 *Arithm.*). Nempe ſi duorum mobilium motu æquabili latorum impetus ac maſſæ fuerint æquales; ſpatia temporum rationem habent.

COROLLARIUM 3.

42. Si ulterius $T = t$; erit quoque $S = ſ$. Duo igitur mobilia, quorum maſſæ ac impetus æquales ſunt, eodem tempore motu æquabili ſpatia æqualia deſcribunt.

COROLLARIUM 4.

43. Si præter $I = i$ fuerit $S = ſ$; erit $mT = Mt$ (§. 40) adeoque $M : m = T : t$ (§. 269 *Arithm.*) hoc eſt, ſi duo mobilia, quorum impetus æquales ſunt, æquabili motu æqualia ſpatia percurrant; maſſæ eorundem ſunt temporibus proportionales.

COROLLARIUM 5.

44. Si ulterius T = *t*; erit etiam M = *m*, adeoque corporum, quorum impetus æquales ſunt & quæ eodem tempore motu æquabili ſpatia æqualia deſcribunt, maſſæ æquales ſunt.

COROLLARIUM 6.

45. Si præter I = *i* fuerit T = *t*; erit MS = *mſ* (§. 40), adeoque S : ſ = *m* : M, hoc eſt, ſpatia a duobus mobilibus, quorum impetus æquales ſunt, eodem tempore motu æquabili deſcripta ſunt in ratione maſſarum reciproca.

THEOREMA 8.

46. *In motu æquabili ſpatia* S *&* ſ *ſunt in ratione compoſita ex rationibus directis impetuum* I *&* i *atque temporum* T *&* t *& reciproca maſſarum* M *&* m.

DEMONSTRATIO.

Quoniam I : *i* = MS*t* : *mſ*T (§. 39)

erit I*mſ*T = *i*MS*t* (§. 267 *Arithm.*). Unde S : ſ = IT*m* : *it*M (§. 269 *Arithm.*). Q. e. d.

COROLLARIUM 1.

47. Si S = ſ; erit IT*m* = *it*M, adeoque I : *i* = *t*M : T*m*, M : *m* = IT : *it*, T : *t* = *i*M : I*m* (§. 269 *Arithm.*). Quodſi adeo duo mobilia motu æquabili per æqualia ſpatia ferantur; erunt 1. impetus in ratione compoſita ex directa maſſarum & reciproca temporum: 2. maſſæ in ratione compoſita impetuum atque temporum: 3. tempora in ratione compoſita ex directa maſſarum & impetuum reciproca.

COROLLARIUM 2.

48. Si præter S = ſ fuerit M = *m*; erit IT = *it*, adeoque I : *i* = *t* : T (§. 269 *Arithm.*). Nimirum duorum mobilium, quorum maſſæ æquales ſunt, impetus ſunt in ratione temporum reciproca, quibus per æqualia ſpatia feruntur.

COROLLARIUM 3.

49. Si præter S = ſ fuerit T = *t*; erit *i*M = I*m* (§. 47), adeoque I : *i* = M : *m* (§. 269 *Arithm.*). Duorum itaque mobilium, quæ per æqualia ſpatia æquali tempore motu æquabili feruntur, impetus maſſis proportionales ſunt.

THEOREMA 9.

50. *Corporum motu æquabili latorum maſſæ* M *&* m *ſunt in ratione compoſita ex rationibus directis impetuum* I *&* i *atque temporum* T *&* t *& reciproca ſpatiorum* ſ *&* S.

DEMONSTRATIO.

Quoniam I : *i* = MS*t* : *mſ*T (§. 39) erit I*mſ*T = *i*MS*t* (§. 267 *Arithm.*) Unde M : *m* = ITſ : *it*S (§. 269 *Arithm.*). Q. e. d.

COROLLARIUM 1.

51. Si M = *m*; erit ITſ = *it*S adeoque I : *i* = *t*S : Tſ, S : ſ = IT : *it* &

t & T : t = iS : Iſ (§. 269 *Arithm.*) hoc eſt, duorum mobilium æquabili motu latorum, quorum maſſæ æquales, 1. impetus ſunt in ratione compoſita ex directa ſpatiorum & reciproca temporum: 2. ſpatia ſunt in ratione impetuum & temporum compoſita: 3. tempora ſunt in ratione compoſita ex directa ſpatiorum & reciproca impetuum.

COROLLARIUM 2.

52. Si præter M = m fuerit T = t; erit iS = Iſ, adeoque I : i = S : ſ (§. 269 *Arithm.*) hoc eſt, impetus duorum mobilium, quorum maſſæ æquales ſunt, ſpatiis æquali tempore peractis proportionales ſunt.

THEOREMA 10.

53. *In motu æquabili tempora* T *& t ſunt in ratione compoſita ex rationibus directis maſſarum* M *&* m *atque ſpatiorum* S *&* ſ *& reciproca impetuum* I *&* i.

DEMONSTRATIO.

Quoniam I : i = MSt : mſT (§ 39); erit ImſT = iMSt (§. 267 *Arithm.*). Unde T : t = iMS : Imſ (§. 269 *Arithm.*). Q. e. d.

COROLLARIUM.

54. Si T = t; erit iMS = Imſ, adeoque I : i = MS : mſ, M : m = Iſ : iS & S : ſ = Im : iM (§. 269 *Arithm.*) hoc eſt, ſi motus æquabilis duorum mobilium fuerit æquidiuturnus; erunt 1. impetus in ratione maſſarum & ſpatiorum compoſita: 2. maſſæ in ratione compoſita ex impetuum directa & ſpatiorum reciproca: 3. ſpatia in ratione compoſita ex directa impetuum & reciproca maſſarum.

SCHOLION.

55. *Suadeo tyronibus, ut hactenus demonſtrata numeris illuſtrent: ita enim futurum, ut facilius eorundem vim animo comprehendant. Ponamus itaque corpus A, cujus maſſa ſit ut 7, e. gr. 7 librarum, tempore 3 ſecundorum emetiri ſpatium 12 pedum, & corpus aliud B, cujus maſſa ſit ut 5, tempore 8 ſecundorum emetiri ſpatium 16 pedum: habebimus* M = 7, T = 3, S = 12, m = 5, t = 8, ſ = 16, *adeoque* C = 4, c = 2 (§. 16), I = 28, i = 10 (§. 18). *Hinc utique deprehenditur*

C : c = St : ſT (§. 25)
4 : 2 = 12. 8 : 16. 3 = 4 : 2
S : ſ = CT : ct (§. 28)
12 : 16 = 4. 3 : 2. 8 = 12 : 16
T : t = cS : Cſ
3 : 8 = 2. 12 : 4. 16 = 1. 3 : 2. 4 = 3 : 8
C : c = Im : iM (§. 34)
4 : 2 = 28. 5 : 10. 7 = 4. 1 = 2. 1 = 4 : 2
M : m = Ic : iC (§. 37)
7 : 5 = 28. 2 : 10. 4 = 7. 1 : 5. 1 = 7 : 5
S : ſ = TIm : tiM (§. 46)
12 : 16 = 3. 28. 5 : 8. 10. 7 = 3. 4. 1 : 8. 2. 1 = 12 : 16
M : m = TIſ : tiS (§. 50)
7 : 5 = 3. 28. 16 : 8. 10. 12 = 3. 7. 2 : 1. 10. 3 = 7 : 5

$$I : i = MSt : m\text{ſ}T \quad (\S.\ 50)$$

$$28 : 10 = 7.12.8 : 5.16.3 = 7.4.1 : 5.2.1 = 28 : 10$$

Eodem modo illuſtrantur ſingula theorematum corollaria.

Sit enim $S = 12$, $T = 6$, $\text{ſ} = 8$, $t = 4$; *erit* $C = 12 : 6 = 2$ & $c = 8 : 4 = 2$, *conſequenter ob* $C = c$ (§. 26)

$$S : \text{ſ} = T : t$$

$$12 : 8 = 6 : 4$$

Sit $S = 12$ & $\text{ſ} = 12$. *Quoniam* $S = CT$ & $\text{ſ} = ct$ (§. 16); *ſi* $C = 2$ & $c = 3$, *erit* $T = 6$ & $t = 4$. *Habemus adeo* (§. 29)

$$C : c = t : T$$

$$2 : 3 = 4 : 6$$

Si pro S & ſ *ponatur* I & i, *pro* M & m *vero* T & t; *idem exemplum illuſtrabit primum theorematis quarti corollarium* (§. 32). *Iisdem obſervatis, exemplum præcedens in Corollarium primum theorematis quinti quadrat.*

Sit denique $I = 12$, $i = 8$, $M = 4$, $m = 4$; *erit* $C = 12 : 4 = 3$ & $c = 8 : 4 = 2$, (§. 18) *adeoque* (§. 38)

$$I : i = C : c$$

$$12 : 8 = 3 : 2$$

CAPUT II.

De MOTU UNIFORMITER ACCELERATO ET RETARDATO.

DEFINITIO 15.

56. *Motus acceleratus* eſt, qui nova capit celeritatis incrementa. *Uniformiter acceleratus* eſt, qui temporibus æqualibus æqualia continuo capit celeritatis incrementa.

DEFINITIO 16.

57. *Motus retardatus* eſt, cujus celeritas decreſcit. *Uniformiter retardatus* dicitur, ſi continua celeritatis decrementa fuerint temporibus proportionalia.

AXIOMA 2.

58. *Corpus ſemel quieſcens nun quam movebitur, niſi aliunde ad mo tum concitetur: ſemel autem motun eadem velocitate & ſecundum ean dem directionem moveri perget, ni a cauſa aliqua ſtatum ſuum mutar cogatur.*

SHOLION.

59. *Hæc ſatis manifeſta ſunt ex axioma omnis philoſophiæ fundamentali, quod nihil ſine ratione ſufficiente* (§. 23). *Nec exper entiæ eidem repugnat, cum ſemper ratio a ſign*

ſignari poſſit tam motus retardati, quam directionis mutatæ, modo omnes circumſtantias ſuis perpendamus.

COROLLARIUM 1.

60. Corpus itaque, quod nonniſi impulſu ſemel facto movetur, per lineam rectam moveri debet.

COROLLARIUM 2.

61. Quodſi vero per curvam incedit, duplici vi urgeatur neceſſe eſt, altera nempe, qua progrederetur ſecundum lineam rectam, altera vero, qua a motu rectilineo continuo retrahitur.

AXIOMA 3.

62. Si niſus & reniſus duorum corporum fuerint æquales; motus nullus ſubſequitur, ſed corpora ſe mutuo impellentia juxta ſe invicem quiescunt.

AXIOMA 4.

63. Si corpus motum ſecundum eandem directionem, qua movetur, impellitur, motus acceleratur: a vi autem reſiſtente retardatur (§. 56. & 57.).

OBSERVATIO 1.

64. Gravitas corporum eadem in qualibet a ſuperficie telluris diſtantia, in qua experimentum capere liceret: quam in poſterum intervallum non nimis magnum dicemus.

OBSERVATIO 2.

65. Gravia deſcendunt motu accelerato.

THEOREMA 11.

66. Si corpus motu uniformiter accelerato fertur, ſpatia ſunt in ratione duplicata temporum.

DEMONSTRATIO.

Sit enim celeritas tempore t acquiſita $= c$, erit celeritas tempore $2t$ acquiſita $= 2c$, tempore $3t$ acquiſita $= 3t$ & ita porro (§. 56), adeoque ſpatia temporibus t, $2t$, $3t$ &c. reſpondentia ut tc, $4ct$, $9ct$ &c. (§. 28). Sunt igitur ſpatia ut 1, 4, 9 &c. tempora ut 1, 2, 3 &c. (§. 104 *Analyſ. finit*), hoc eſt, ſpatia habent rationem duplicatam temporum (§. 148 *Arithm.*). Q. e. d.

COROLLARIUM.

67. In motu uniformiter accelerato tempora ſunt in ratione ſubduplicata ſpatiorum.

THEOREMA 12.

68. Spatia, quæ corpus motu uniformiter accelerato percurrit, creſcunt temporibus æqualibus ſecundum numeros impares 1, 3, 5, 7, 9 &c.

DEMONSTRATIO.

Si tempora, quibus corpus motu uniformiter accelerato progreditur, fuerint ut 1, 2, 3, 4, 5, &c. ſpatium intra momentum 1 confectum erit ut 1, intra duo percurſum ut 4, intra tria ut 9, intra quatuor ut 16, intra quinque ut 25 &c. (§. 66). Quodſi ergo ſubtrahas ſpatium intra

tra minutum unum percurſum a ſpatio intra duo confecto 4; remanebit ſpatium minuto ſecundo reſpondens 3. Eodem modo reperitur ſpatium minuto tertio abſolutum $9-4=5$, ſpatium quarto reſpondens $16-9=7$, quod quinto convenit $25-16=9$ &c. & ita porro. Spatium ergo minuti primi eſt ut 1, ſecundi ut 3, tertii ut 5, quarti ut 7, quinti ut 9 &c. adeoque ſpatia corporis motu uniformiter accelerato incedentis temporibus æqualibus augentur ſecundum numeros impares 1, 3, 5, 7, 9 &c. Q. e. d.

THEOREMA 13.

69. *Spatia, quæ corpus motu uniformiter accelerato percurrit, ſunt in ratione duplicata celeritatum.*

DEMONSTRATIO.

Nimirum ſi celeritates fuerint C & c, tempora T & t, ſpatia S & $ſ$, erit $C : c = T : t$ (§. 56). Quare cum ſit $S : ſ = T^2 : t^2$ (§. 66); erit etiam $S : ſ = C^2 : c^2$ (§. 148. 156 *Arithm.*).

COROLLARIUM.

70. In motu itaque uniformiter accelerato velocitates ſunt in ratione ſubduplicata ſpatiorum (§. 104 *Analyſ. finit.*).

THEOREMA 14.

71. *Corpora gravia in medio non reſiſtente per intervalla non nimis magna motu uniformiter accelerato deſcendunt.*

DEMONSTRATIO.

Cum gravia deſcendant motu accelerato (§. 65); vis gravitatis ea continuo impellere debet (§. 63). Eſt vero gravitas in intervallo non nimis magno eadem (§. 64). Quare gravia eodem modo temporibus æqualibus deorſum impelli debent (§. 23). Itaque ſi tempuſculo primo impelluntur celeritate c, etiam ſecundo celeritate c impellentur, immo etiam tertio, quarto, quinto & alio quocunque æquali. Quoniam vero medium non reſiſtit *per hypoth.* celeritatem ſemel acquiſitam conſtanter retinent (§. 58), adeoque temporibus æqualibus æqualia continuo celeritatis incrementa capiunt, conſequenter motu uniformiter accelerato deſcendunt (§. 56). Q. e. d.

COROLLARIUM 1.

72. Sunt igitur ſpatia deſcenſus in temporum itemque in velocitatum ratione duplicata (§. 66. 69) & ſecundum numeros impares 1, 3, 5, 7, 9 &c. creſcunt (§. 68).

COROLLARIUM 2.

73. Tempora vero, itemque velocitates ſunt in ratione ſpatiorum ſubduplicata (§. 67. 70).

SCHOLION 1.

74. *Dum gravia deſcendere ſupponimus i*

*ædio non reſiſtente, ab omni externo impedi-
iento abſtrahimus, quocunque tandem nomi-
e veniat & a quacunque cauſa ortum tra-
at. Unde motum quoque ſecludimus, quo, ob
ertiginem Telluris in Aſtronomia adſtruen-
um, in transverſum rapiuntur gravia ipſo
eſcenſus tempore; quamvis in intervallo non
imis magno nulla inde in deſcenſum gravi-
m irregularitas irrepat.*

SCHOLION 2.

75. Gallilæus Gallilæi, *qui legem deſcen-
is corporum gravium ratiocinando invenit,
ndem quoque experientiis conſonam deprehen-
it.*(b) *In tabula ſcilicet lignea duorum circiter
ubitos longa canalem excavavit uno digito pau-
latiorem, agglutinata intus membrana, ne
abritie ſua pilam æneam bene politam in
ſcenſu remoraretur. Eam poſtea ſupra pla-
um horizontale uno, duobus & pluribus cu-
tis ſucceſſive elevavit, & tempus, in qua
la per canalem deſcendebat, accurate dime-
ens, iteratis vel centies experimentis, didicit
atia decurſa ſemper eſſe ut temporum qua-
ata. Notandum vero ſpatia computanda
e non in longitudine, ſed in altitudine plani,
eorum, quæ inferius demonſtrabuntur.*

SCHOLION 3.

76. *Eadem experimenta modo tamen di-
rſo ſæpius cum* Grimaldo *ſuo repetiit* Joh.
ptiſta Ricciolus (c) *plurimos globos creta-
s ejusdem molis, pondere* 8 *unciarum, ex
verſarum turrium aut ædium feneſtris de-
ittens & tempus deſcenſus perpendiculi vi-
ationibus dimetiens. Experimenta ſequens
præſentat tabella.*

Vibrationes penduli	Tempus		Spatium in fine temporis	Spatium ſingulis temporibus confectum
	''	'''	Ped.Rom.	Ped.Rom.
5	0	50	10	10
10	1	40	40	30
15	2	30	90	50
20	3	20	160	70
25	4	10	250	90
6	1	0	15	15
12	2	0	60	45
18	3	0	135	75
24	4	0	240	105

SCHOLION 4.

77. *Cum adeo experimenta* Riccioli *in ob-
ſervando maxime exercitati in tanto inter-
vallo inſtituta theoriæ apprime conſentiant;
vix attendenda eſſe videntur, quæ in contra-
rium affert* (d) Dechales, *qui ſe expertum
ſcribit, uno minuto ſemiſecundo grave deſcen-
ſu ſuo confeciſſe pedes* $4\frac{1}{4}$, *duobus* $16\frac{1}{2}$, *tribus*
36, *quatuor* 60, *quinque* 90, *ſex* 123. *Suf-
ficit, quod ipſe a reſiſtentia aëris irregularita-
tem deducat, quam in demonſtratione inſuper
habuimus.*

THEOREMA 15.

78. *Si grave in medio non reſi-
ſtente per intervallum non nimis ma-
gnum*

(b) in Dialogis de motu locali Dial. 3. p. m. 157. 156.
(c) Almageſt. Nov. Tom. 1. lib. 2. c. 21. prop. 4. f. 89. 90.
(d) Staticæ lib. 2. prop. 11. Mund. Math. Tom. 2. f. 275.

gnum deſcendit, ſpatium ab eo decurſum eſt ſubduplum ejus, quod eodem tempore motu uniformi cum ea velocitate conficitur, quam in fine temporis grave acquirit.

DEMONSTRATIO.

Tab. I. Fig. 4. Concipiatur recta AB, quæ tempus integrum deſcenſus repræſentet, in partes quotcunque æquales, diviſa, & ad abſciſſas AP, AQ, AS, AB applicentur rectæ PM, QI, SH, BC, quæ ſint ut celeritates cadendo in iſtis temporibus acquiſitæ. Quoniam itaque AP : AQ = PM : QI, AP : AS = PM : SH &c. (§. 71); erit ABC triangulum (§. 253 *Geom.*). Quodſi altitudo concipiatur in partes infinite parvas æquales diviſa cum in tempuſculo infinite parvo motus ſit uniformis; erit areola PpMm = Pp. PM (§. 87 *Analyſ. infinit.*) ut ſpatiolum tempuſculo Pp confectum (§. 28). Ergo ſpatium tempore AB percurſum eſt ut ſumma omnium iſtarum areolarum, hoc eſt, ut triangulum ABC. Spatium vero eodem tempore AB celeritate BC uniformiter deſcriptum cum ſit ut rectangulum AB CD (§. *cit.*); erit utique iſtud ad hoc ut 1 ad 2 (§. 368 *Geom.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

79. Spatium igitur, quod tempore ipſius AB dimidio celeritate BC conficitur, æquale eſt ſpatio, per quod grave ex quiete tempore AB integro deſcendit.

PROBLEMA I.

80. *Dato tempore, quo grave ex altitudine data deſcendit, ſpatia definire, quæ ſingulis iſtius temporis partibus confecit.*

RESOLUTIO.

Sit altitudo data $= a$, tempus $= t$, ſpatium parte temporis 1 confectum x; erit (§. 72)

$$1 : x = t^2 : a$$

$$t^2 x = a$$

$$x = a : t^2$$

Eſt adeo ſpatium parte temporis prima confectum $a : t^2$, adeoque decurſum parte ſecunda $= 3a : t^2$, tertia deſcriptum $= 5a : t^2$ &c. (§. 72).

E. gr. ſupra in experimentis *Riccioli* (§. 76) intra 4 ſecunda globus cretaceus deſcendit ex altitudine 240 pedum. Spatium igitur primo ſecundo confectum $= 240 : 16 = 15$, ſpatium confectum ſecundo $= 15 . 3 = 45$, confectum tertio $= 15 . 5 = 75$, confectum denique quarto $15 . 7 = 105$.

PROBLEMA 2.

81. *Dato tempore, quo grave in medio non reſiſtente per ſpatium datum deſcendit, determinare tempus, quo*

quo aliud ſpatium datum in eodem medio conficiet.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Cum ſpatia ſint ut quadrata temporum (§. 72), quæratur ad ſpatium, per quod grave dato tempore deſcendit, ſpatium quod in quæſtione eſt, & quadratum temporis dati, numerus quartus proportionalis, (§. 272 *Arithm.*) qui erit quadratum temporis quæſiti.

2. Quare ſi inde extrahatur radix quadrata (§. 248 *Arithm.*); prodibit ipſum tempus quæſitum. *Q. i. & d.*

E. gr. Globus cretaceus in experimentis *Riccioli* (§. 76) intervallo 4 minutorum deſcendit per ſpatium 240 pedum; quæritur quo tempore confecturus ſit ſpatium 135 pedum? Invenietur hoc tempus $= \sqrt{}(135.16:240) = \sqrt{}(135:15) = \sqrt{}9 = 3$.

PROBLEMA 3.

82. *Dato ſpatio, quod grave in medio non reſiſtente dato aliquo temporis intervallo confecit, determinare ſpatium, quod intra aliud temporis intervallum datum emetietur.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Cum ſpatia ſint ut quadrata temporum (§. 72); quæratur ad quadratum temporis, quo grave per datum ſpatium deſcendit, ad quadratum temporis, quo aliud quæſitum emetiri debet, atque ad ſpatium datum numerus quartus proportionalis (§. 272 *Arithm.*) qui erit ſpatium quæſitum.

E. gr. Per experimenta Riccioli globus cretaceus intervallo duorum ſecundorum confecit ſpatium 60 pedum: quæritur quantum ſpatium confecturus ſit intervallo 4 ſecundorum? Reperietur ſpatium quæſitum 16. 60:4 = 4. 60 = 240.

THEOREMA 16.

83. *Si corpus fertur motu uniformiter retardato, ſpatium dimidium ejus percurrit, quod motu uniformi eodem tempore conficeret.*

DEMONSTRATIO.

Concipiatur tempus datum AB in partes quotcunque æquales diviſum & ad eam applicentur rectæ BC SH, QI, PM, quæ ſint ut velocitates temporis partibus *o*, BS, BQ, BP, BA reſpondentes, ita ut demiſſis perpendicularibus HE, IF, MG rectæ CE, EF, CG, CB ſint ut celeritates temporibus HE, FI, GM, AB, hoc eſt, BS, BQ, BF, BA amiſſæ. Quoniam CE : CF = EH : FI, CG : CB = GM : BA (§. 71. 56); erit ABC triangulum (§. 253 *Geom.*). Quodſi B*b* ſit tempuſculum infinite parvum, motus erit uniformis, adeoque ſpatiolum a mobili deſcriptum ut areola B*bc*C (§. 28). Ergo ſpatium tempore AB confectum eſt ut triangulum ABC, nempe ut ſumma omnium areolarum, qualis B*bc*C. Enimvero ſpatium a mobili celeritate BC tempore AB uniformiter deſcri- *Tab. I. Fig. 1.*

Aaa a ptum

ptum eſt ut rectangulum ABCD (§. 28). Ergo illud hujus dimidium (§. 368 *Geom.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 17.

84. *Spatia motu uniformiter retardato deſcripta temporibus æqualibus ſecundum numeros impares retrogrado ordine decreſcunt.*

DEMONSTRATIO.

Tab. I. Fig. I. Percurrat mobile tempuſculo primo ſpatium 7 pedum; dico, quod ſecundo confecturum ſit ſpatium 5 pedum, tertio ſpatium 3, quarto ſpatium unius, ſi motus uniformiter retardetur. Sint enim partes axis trianguli æquales BS, SQ, QP, PA ut tempora, ſemiordinatæ BC, SH, QI, PM ut celeritates in initio temporis cujuslibet: erunt trapezia BSHC, SQIH QPMI, & △ PAM ut ſpatia temporibus iſtis deſcripta: quod patet ex demonſtratione theorematis præcedentis (§. 83). Sit igitur BC = 4 & BS = SQ = QP = PA = 1; erit SH = 3, QI = 2, PM = 1 (§ 71. 56), BSHC = (4 + 3) 1 : 2, = $\frac{7}{2}$, SQIH = (3 + 2) 1 : 2 = $\frac{5}{2}$, QPMI = (2 + 1) 1 : 2 = $\frac{3}{2}$ (§. 382 *Geom.*), PAM = $\frac{1}{2}$ (§. 375 *Geom.*), conſequenter ſpatia æqualibus temporibus deſcripta ſunt ut $\frac{7}{2}$. $\frac{5}{2}$. $\frac{3}{2}$. $\frac{1}{2}$, hoc eſt, ut 7. 5. 3. 1 (§. 170 *Arithm.*). *Q. e. d.*

CAPUT III.

DE
CENTRO GRAVITATIS.

DEFINITIO 17.

85. *Centrum gravitatis* eſt, per quod corpus dividitur in duas partes æquiponderantes. Dicitur autem pars una *æquiponderare* alteri, ſi neutra alteram movet.

COROLLARIUM 1.

86. Quodſi ergo deſcenſus centri gravitatis impeditur, grave quieſcit.

COROLLARIUM 2.

87. Quare ſi corpus ex centro gravitatis ſuſpenditur, grave non movetur.

COROLLARIUM 3.

88. Totam corporis gravitatem in centrum gravitatis coactam ſupponere licet, adeoque pro corpore gravi ſolum centrum gravitatis ſurrogari poteſt in demonſtrationibus.

DEFINITIO 18.

89. *Diameter gravitatis* eſt recta tranſiens per centrum gravitatis.

CO-

COROLLARIUM.

90. Interſectio itaque duarum diametrorum determinat centrum gravitatis.

DEFINITIO 19.

91. *Planum gravitatis* eſt figura plana, in quo ſitum eſt centrum gravitatis.

COROLLARIUM.

92. Communis ergo interſectio duorum planorum gravitatis aut plurium eſt diameter gravitatis.

DEFINITIO 20.

93. *Gravia homogenea* ſunt, quorum gravitates ſunt voluminibus proportionales. E. gr. Si grave dividas in partes quotcunque volumine æquales; ſingulæ erunt quoque pondere æquales.

DEFINITIO 21.

94. *Gravia heterogenea* ſunt, quorum gravitates non ſunt voluminibus proportionales. E. gr. Si totum grave dividas in partes quotcunque volumine æquales; ſingulæ inter ſe non erunt pondere æquales. Aut ſi duorum gravium partes ſumas volumine æquales & eædem ſint pondere inæquales; gravia inter ſe heterogenea ſunt, licet in ſe homogenea eſſe poſſint.

DEFINITIO 22.

95. *Centrum magnitudinis* eſt punctum, per quod linea vel figura dividitur in duas partes æquales.

OBSERVATIO 3.

96. *Corpora quævis gravia in medio non reſiſtente eadem velocitate cadunt.*

SCHOLION.

97. *In ſpatio ab aëre vacuo (quod quomodo obtineatur, in Aerometria docemus) leviſſima plumula eodem tempore ex data altitudine deſcendit, quo globus plumbeus. Imo ſi corpora magna & ponderoſa in aëre per æqualia intervalla demittantur, eodem tempore pavimentum attingunt, modo altitudines ſint mediocres, monente* Hugenio (d). *Pendulorum inprimis experientia id doceri poteſt. Unde experimenta, quibus* Ricciolus *globos argillaceos* 20 *unciarum, & chartaceos, ſed argillacea teſta ſuperinductos, mole iſtis æquales, ſed pondere ſubduplos per intervallum* 280 *pedum demittens contrarium probare conatur* (e) *ideo non conſentiunt, quia reſiſtentia aëris in utroque globorum genere fuit admodum diverſa.*

THEOREMA 18.

98. *Materia, quæ cum corporibus movetur, etiam cum ipſis gravitat.*

DEMONSTRATIO.

Quia velocitates gravium deſcendentium dato tempore æquales

(d) in Horologio oſcillatorio part. 4. prop. 5.
(e) Almag. Nov. Tom. I. lib. 2. c. 21. prop. 1. f. 89.

les ſunt (§. 96); impetus ſunt ut materiæ, quæ cum ipſis movetur, quantitates (§. 35). Impetus vero ſunt effectus pleni gravitatis adeoque cauſæ ſuæ nempe gravitati proportionales (§. 17.24). Ergo materia, quæ cum gravibus movetur, etiam cum ipſis gravitat. *Q. e. d.*

SCHOLION.

99. *Liquet jam veritas definitionis quartæ* (§. 6).

COROLLARIUM 1.

100. Maſſa igitur corporum recte æſtimatur per pondus.

COROLLARIUM 2.

101. Cum in corporibus homogeneis gravitates voluminibus proportionales ſint (§. 93); impetus eorum ſunt in ratione compoſita celeritatum & voluminum (§. 31) & ſi eadem celeritate ferantur, ut volumina (§. 35): quorum vero impetus æquales ſunt, eorum celeritates rationem voluminum reciprocam habent (§. 32).

COROLLARIUM 3.

102. Maſſa invariata pondus non mutatur, quomodocunque varietur figura.

AXIOMA 5.

103. *In homogeneis quæ ſecundum longitudinem in partes ſimiles & æquales ſecari poſſunt, centrum gravitatis idem eſt cum centro magnitudinis.*

COROLLARIUM.

104. Quodſi ergo linea recta AB bifariam ſecetur in C; erit C centrum gravitatis. Ta I. Fi 2

SCHOLION.

105. *Tale corpus homogeneum, quod ſecundum longitudinem in partes ſimiles ſecari poteſt, eſt e. gr. cylindrus plumbeus. Si enim longitudo AE concipiatur in tres partes æquales ED, DC & CA vel quotcunque plures diviſa; ſecabitur in cylindros æquales, cum eorum baſes & altitudines æquales ſint* (§. 474 Geom.) *atque ſimiles, cum altitudines ſint ut diametri baſium* (§. 501 Geom.). Ta I Fi 3

THEOREMA 19.

106. *Si centra gravitatis duorum corporum* A & B *jungantur recta* AB *centri gravitatis communis* C *diſtantiæ* BC & CA *a centris gravitatis particularibus* B & A *ſunt reciproce ut pondera* A & B. Ta I. Fi 4

DEMONSTRATIO.

Ponamus enim rectam AB diviſam eſſe in C in ratione reciproca ponderum A & B. Sit e. gr. pondus A 6 librarum, pondus B 2, & AC: CD = 1:3. Concipiatur recta AB utrinque producta in D & E, donec BD = AC & AE = CF; erit EC = CD (§. 80 *Arithm.*). Concipiatur porro recta ED in 8 partes æquales diviſa, quot nempe librarum ſunt pondera junctim ſumta, & quoniam gravitas non mutatur, quomodocunque varietur figura (§. 102), gravitas corporum A &

 B per

B per rectam CD æqualiter diffuſa concipiatur, centris gravitatis manentibus in A & B. Diffundetur adeo gravitas ipſius B per FD & gravitas ipſius A per EF uniformiter (§. 104), conſequenter pondera A & B junctim ſumta rectam ED repræſentabunt. Hujus vero centrum gravitatis commune eſt in C (§. *cit.*). Ergo idem eſt centrum gravitatis commune ponderum A & B. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

107. Quodſi gravitates corporum A & B fuerint æquales, centrum gravitatis commune C erit in medio rectæ AB centra gravitatis conjungentis.

COROLLARIUM 2.

108. Quia A : B = BC : AC; erit A. AC = B. BC. Unde patet vires æquiponderantium æſtimandas eſſe per factum ex maſſa in diſtantiam a centro gravitatis. Factum hoc *Momentum* ponderum vulgo vocant.

SCHOLION.

109. *Theorema hoc utiliſſimum experimento non inelegaanti illuſtrari poteſt. Ex ligno parentur parallelepipeda plura inter ſe æqualia & quorum latitudo ſit dupla profunditatis, longitudo vero ſextupla latitudinis: quamvis neceſſe non ſit, ut hæ rationes accurate obſerventur, ſufficit enim longitudinem aliquoties excedere reliquas dimenſiones. Parentur* Tab. I. Fig. 5. *præterea alia quadam: unum ſit longitudinis duplæ, alterum triplæ, tertium quadruplæ & ita porro. Quodſi parallelepipedum longitudinis duplæ colloces ſuper latere priſmatis trigoni, ita ut latus priſmatis ipſum dividat in partes æquales AC & CB; partes AC & CB æquiponderabunt: quo ipſo axioma (§. 103) confirmatur. Collocetur porro parallelepipedum triplæ longitudinis* DE *ea lege ſuper priſmate, ut ejus latus ipſum dividat in partes* DF & FE, *quæ ſunt in ratione ſubdupla: pars FE præponderabit. Quodſi vero tria parallelepipeda ſimplicis longitudinis ipſi DF ſuperimpoſueris; quatuor parallelepipeda duobus* FK & KE *in unum* FE *conjunctis æquiponderabunt. Eſt enim ipſius FE centrum gravitatis in K & ipſius DF in medio L per experimentum primum. Diſtantiæ igitur centrorum gravitatis a fulcro* LF & FK *ſunt ut DF & FE ſeu ut pondera* (§. 93 Mech. & 474 Geom.). *Eſt ergo ibi centrum gravitatis commune, ut habet theorema noſtrum* (§. 106). *Eodem modo deprehenduntur 9 priſmata ſibi mutuo ſuperimpoſita æquiponderare uni IH, cujus longitudo illorum longitudinis tripla, & ita porro.*

COROLLARIUM 1.

110. Quoniam A : B = BC : AC (§. 106); erit etiam A + B : A = BC + AC : BC (§. 181 *Arithm.*). Tab. I. Fig. 4.

COROLLARIUM 2.

111. Reperitur adeo centrum gravitatis commune duorum ponderum C ſi factum ex pondere uno A in diſtantiam centrorum gravitatis ſeparatorum AB dividatur per ſummam ponderum A & B. Sit e. gr. A = 12, B = 4, AB = 24; erit BC = 24. 12 : 16 = 18.

COROLLARIUM 3.

112. Quodſi pondus A detur & diſtantia centrorum gravitatis particularium AB una cum centro gravitatis

 commu-

communi C, reperitur pondus $B = A. AC:BC$, hoc eſt, ſi momentum ponderis dati dividatur per diſtantiam ponderis quæſiti B a centro gravitatis communi. Sit e. gr. $A = 12$, $BC = 18$, $AC = 6$; erit $B = 6.12:18 = 12:3 = 4$.

PROBLEMA 4.

113. *Ponderum plurium datorum* a, b, c, d *centrum gravitatis commune in recta* AB *determinare.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur centrum gravitatis commune duorum a & b (§. 111): quod ſit in F.
2. In F concipiatur applicari pondus $a+b$ duobus reliquis a & b æquale (§. 88) & quæratur porro in recta FE centrum gravitatis commune ponderum $a+b$ & c (§. 111): quod ſit in G.
3. Denique in G concipiatur applicari pondus $a+b+c$ duobus $a+b$ & c æquale (§. 88) & quæratur inter ipſum & pondus d centrum gravitatis commune in recta GB (§. 111): quod ſit in H.

Eſt adeo H centrum gravitatis commune ponderum a, b, c & d. Patet etiam, quomodo ſit progrediendum, ſi plura pondera dentur. Sit e. gr. $a = 20$, $b = 10$, $c = 15$, $d = 5$, $AC = 9$, $CE = 6$, $EB = 16$: erit $AF = b. AC : (a+b) = 10.9 : 30 = 3$, adeoque $FC = 6$ & $FE = FC + CE = 12$. Hinc reperitur $FG = c.FE : (a+b+c) = 15.12 : 45 = 4$. Quare $GE = FE - FG = 8$ & $GB = GE + EB = 20$. Invenitur adeo $GH = d. GB : (a+b+c+d) = 5.20 : 50 = 2$. Unde $HB = GB - GH = 20$ & (ob $AB = AC + CE + EB = 31$) $AH = 11$.

PROBLEMA 5.

114. *Duobus ponderibus* D *&* E *extra centrum gravitatis commune in* C *ſuſpenſis, determinare, quodnam eorum & quantum præponderet.* Tab. I. Fig. 7.

RESOLUTIO.

1. Quodlibet pondus ducatur in diſtantiam ſuam a centro ſuſpenſionis, nempe D in AC & E in BC: ex qua parte factum majus prodit, verſus eam eſt præponderatio.
2. Factum minus a majore ſubtrahatur: erit reſiduum præpondium.

E. gr. Sit $D = 30$. librarum, $E = 20$, $AC = 2$, $BC = 4$; erit $D. AC = 60$, $E. BC = 80$, adeoque E præponderat in B momento ut 20.

DEMONSTRATIO.

Sit $AC : CB = d : md$ & pondus $D = mp$; æquiponderabit eidem in B pondus p (§. 106). Sed pondus E minus eſt quam p. Dicatur ergo exceſſus r, ita ut ſit $E = p+r$.

$p+r$. Quoniam momentum ipſius r æquale eſt momento ponderis in A eidem æquiponderantis; hoc vero reperitur mrd (§. 108); exceſſus momenti ponderis E ſupra momentum alterius D eſt mrd. Sed mrd eſt differentia inter mpd & $mpd+mrd$, hoc eſt, inter D. AC & E. BC. Relinquitur adeo exceſſus momenti ipſius E ſupra momentum alterius D, ſi factum D. AC ex E. CB ſubtrahitur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

115. Ponderum D & E itaque extra centrum gravitatis in C ſuſpenſorum momenta ſunt in ratione compoſita ipſorummet ponderum D & E & diſtantiarum a puncto ſuſpenſionis C.

COROLLARIUM 2.

116. Ponderis itaque ex ipſo puncto C ſuſpenſi momentum reſpectu reliquorum D & E nullum eſt, ſeu eadem ratione D & E inter ſe ponderant, ac ſi pondus in C plane abeſſet.

PROBLEMA 6.

117. *Determinare præponderationem, ponderibus pluribus* a, b, c, d *extra centrum gravitatis in* C *ſuſpenſis.* Tab. I. Fig. 8.

RESOLUTIO.

1. Ducantur pondera c & d in ſuas diſtantias a puncto ſuſpenſionis CE & EB: ſumma dabit momentum ponderum c & d junctim, ſeu ponderationem verſus dexteram (§. 115).

2. Ducantur quoque pondera a & b in ſuas diſtantias AC & CD: ſumma denuo dabit ponderationem verſus ſiniſtram (§. *cit.*).

3. Quodſi ergo ponderationem majorem a minore ſubtrahas, relinquetur præponderatio quæſita.

E. gr. Sit $AC = 6$, $DC = 4$, $CE = 5$, $CB = 8$, $a = 12$, $b = 15$, $c = 20$, $d = 8$: erit ponderatio verſus dexteram $= c.EC + d.CB = 20.5 + 8.8 = 164$; verſus ſiniſtram $= a.AC + b.DC = 12.6 + 15.4 = 132$. Præponderant ergo c & d verſus dexteram momento ut 32.

PROBLEMA 7.

118. *Ponderibus quotcunque extra centrum gravitatis in* C *ſuſpenſis & verſus dexteram præponderantibus, determinare punctum* F, *ex quo ſi ſumma omnium ponderum ſuſpendatur, eadem maneat præponderatio verſus dexteram, quæ fuerat ante in dato ponderum* a, b, c, d *ſitu.*

RESOLUTIO.

1. Inveniatur momentum, quo pondera c & d, vel quotcunque fuerint, verſus dexteram præponderant (§. 117).

2. Cum momentum ſummæ ponderum

derum in F ſuſpendendæ eidem æquale eſſe debeat; momentum modo inventum erit factum ex CF in ſummam ponderum (§. 115.). Quare ſi per ſummam ponderum dividatur; quotus erit diſtantia CF, ex qua ſuſpendenda eſt ponderum ſumma, ut eadem maneat præponderatio, quæ fuerat ante (§. 194 *Arithm.*).

E. gr. Sint omnia ut in probl. præc. erit momentum, quo pondera verſus dexteram præponderant 32. Quodſi hoc dividas per ſummam ponderum 296, quotus $\frac{32}{296} = \frac{4}{37}$ eſt diſtantia CF quæſita.

COROLLARIUM.

Tab. I. Fig. 9. 119. Si elementa figurarum, quale $mMNn$, concipiantur inſtar ponderum ad axem AX appenſorum & in vertice A punctum ſuſpenſionis; determinabitur punctum in AX, ex quo ſumma omnium ponderum ſuſpenſa eodem modo ponderat ac tota figura, hoc eſt, centrum gravitatis (§. 118), ſumma momentorum omnium ponduſculorum per ſummam ponduſculorum diviſa. Sit enim $AP = x$, $MP = y$, $Pp = dx$; erit unum ponduſculum $2ydx$, ſumma omnium $2\int ydx$, momentum unius ponduſculi $2yxdx$ (§. 115), ſumma omnium $2\int yxdx$, conſequenter diſtantia centri gravitatis a vertice AF $\int yxdx : \int ydx$. Quodſi adeo differentialia $yxdx$ & ydx integrentur, ut in analyſi infinitorum docuimus, centrum gravitatis determinatur.

PROBLEMA 8.

120. *Determinare centrum gravitatis in triangulo* BAC. Tab. I. Fig. 10.

RESOLUTIO.

Ducatur recta AD baſin BC bifariam ſecans in D. Quoniam △ BAD = △ DAC (§. 367 *Geom.*); utrumque in totidem ponduſcula ad communem axem AD eodem modo utrinque applicata reſolvi poteſt; adeoque centrum gravitatis △ BAC erit in AD (§. 85). Illud igitur ut determinetur, fiat $AD = a$, $BC = b$, $P = x$, $MN = y$; erit (§. 378 *Geom.*)

$$AP : MN = AD : BC$$
$$x : y = a : b$$

Hinc $y = bx : a$. Ducatur $AE = c$ perpendicularis ad BC, erit $AD : AE = AP : AQ$, adeoque $AQ = cx : a$ & $Qq = cdx : a$.

Unde momentum $yxdx = cbx^2dx : a^2$ & $\int yxdx = cbx^3 : 3a^2$, quæ ſumma per aream trianguli $AMN = cbx^2 : 2a^2$ (§. 375 *Geom.*) diviſa dat diſtantiam centri gravitatis a vertice $= 2abx^3 : 3abx^2 = \frac{2}{3}x$: (§. 119). Quodſi

ſi

ſi pro x ſubſtituatur a; prodibit diſtantia centri gravitatis totius trianguli a vertice $\frac{2}{3}a$.

PROBLEMA 9.

121. *Determinare centrum gravitatis in parabola.*

RESOLUTIO.

Ad parabolam eſt

$$ydx = a^{1:2}x^{1:2}dx \quad (\S.91\ \textit{Anal, inf.})$$

$$xydx = a^{1:2}x^{3:2}dx$$

$$\int xydx = \tfrac{2}{5}a^{1:2}x^{5:2}$$

ſed $\int ydx = \frac{2}{3}a^{1:2}x^{3:2}$ (§. *cit.*)

Ergo $\int xydx : \int ydx = \frac{3}{5}x =$ AF (§. 119).

PROBLEMA 10.

122. *Determinare centrum gravitatis in omnibus parabolis ſuperiorum generum & curvis agnatis in infinitum.*

RESOLUTIO.

In infinitis parabolis & curvis agnatis eſt (§. 93 *Analyſ. infinit.*).

$$ydx = a^{n:r}x^{m:r}dx$$

$$xydx = a^{n:r}x^{m+r:r}dx$$

$$\int xydx = \frac{r}{m+2r}a^{n:r}x^{m+2r:r}$$

$$\int ydx = \frac{r}{m+r}a^{n:r}x^{m+r:r} \quad (\S.\ \textit{cit.})$$

$$\int xydx : \int ydx = \frac{m+r}{m+2r}x = \text{AF} \ (\S.119).$$

E. gr. in paraboloide cubicali $m = 1$, $r = 3$ (§. 475 *Analyſ. finit.*). Ergo AF $= \frac{4}{7}$ AP.

In paraboloide biquadratico $m = 1$, $r = 4$. Ergo AF $= \frac{5}{9}$ AP.

In paraboloide ſurdeſolidali $m = 1$, $r = 5$. Ergo AF $= \frac{6}{11}$ AP.

Si fuerit $ax^2 = y^3$; erit $m = 2$, $r = 3$, AF $= \frac{5}{8}$ AP.

Si $ax^3 = y^4$; erit $m = 3$, $r = 4$, AF $= \frac{7}{11}$ AP.

Si $ax^4 = y^5$; erit $m = 4$, $r = 5$, AF $= \frac{9}{14}$ AP.

COROLLARIUM.

123. Diſtantia ergo centri gravitatis a baſi FP eſt $= x - \frac{m+r}{m+2r}x = \frac{mx+2rx-mx+rx}{m+2r} = \frac{3r}{m+2r}x$.

E. gr. in parabola *Apolloniana* $m = 1$, $r = 2$. Ergo PF $= \frac{2}{5}$ AP.

In paraboloide cubicali $m = 1$, $r = 3$. Ergo PF $= \frac{3}{7}$ AP.

In curva, ad quam $ax^2 = y^3$, $m = 2$, $r = 3$. Ergo PF $= \frac{3}{8}$ AP.

PROBLEMA 11.

124. *Determinare centrum gravitatis in parabola exteriore AST.* Tab. I. Fig. 9.

RESOLUTIO.

Si AQ $= x$, QM $= y$, parameter $= 1$; erit (§. 351 *Analyſ. finit.*) $x^2 = y$ & hinc

$$xydx = x^3dx$$

$$\int xydx = \tfrac{1}{4}x^4$$
$$\int ydx = \tfrac{1}{3}x^3$$

$$\int xydx : \int ydx = \tfrac{3}{4}x = AL$$

PROBLEMA 12.

125. *Determinare centrum gravitatis in infinitis parabolis exterioribus ſuperiorum generum & aliis curvis agnatis.*

RESOLUTIO.

Si parameter $=1$, pro infinitis parabolis ſuperioribus & curvis agnatis eſt $x^r = y^n$ (§. 475 *Analyſ. finit.*). Quare

$$ydx = x^{r:n}dx$$

$$xydx = x^{(r+n):n}dx$$

$$\int xydx = \frac{n x^{(r+2n):n}}{r+2n}$$
$$\int ydx = \frac{n \; x^{(r+n):n}}{r+n}$$

$$\int xydx : \int ydx = \frac{r+n}{r+2n}x = AL.$$

E.gr. in paraboloide cubicali $r=3, n=1$. Ergo $AL = \tfrac{4}{5}AQ$.

In paraboloide biquadratico $r=4, n=1$. Ergo $AL = \tfrac{5}{6}AQ$.

In paraboloide ſurdeſolidali $r=5, n=1$. Ergo $AL = \tfrac{6}{7}AQ$.

In curva, ad quam $x^3 = y^2$, $r=3, n=2$. Ergo $AL = \tfrac{5}{7}AQ$.

In curva, ad quam $x^4 = y^3$, $r=4, n=3$. Ergo $AL = \tfrac{7}{10}AQ$.

PROBLEMA 13.

126. *Determinare centrum gravitatis in curva, ad quam* $b^2y = bx^2 - x^3$.

RESOLUTIO.

Quoniam $ydx = (bx^2dx - x^3dx) : b^2$ (§. 99 *Anal. infinit.*)

$$xydx = (bx^3dx - x^4dx) : b^2$$

$$\int xydx = x^4 : 4b - x^5 : 5b^2 = (5bx^4 - 4x^5) : 20b^2$$
$$\int ydx = x^3 : 3b - x^4 : 4b^2 = (4bx^3 - 3x^4) : 12b^2$$

$$\int xydx : \int ydx = \frac{12b^2(5bx^4 - 4x^5)}{20b^2(4bx^3 - 3x^4)} = \frac{15bx - 12x^2}{20b - 15x} = AF$$

Eſt adeo $20b - 15x : 15b - 12x = x : AF$.

PROBLEMA 14.

127. *Determinare centrum gravitatis cujuslibet arcus circuli.*

RESOLUTIO.

Sit chordæ DE arcus dati DHE diameter AB parallela, quæ inſtar axis conſideretur, ad quem ponduſcula MD applicata, quorum adeo momenta erunt ut MD.PD. Quoniam adeo ad radium HC, qui arcum DE in G biſecat, ponduſcula & numero & momento æqualia utrin-

Tab. I. Fig. 11.

utrinque diſponuntur; tranſit is per centrum gravitatis. Sit jam PC = DG = x, DC = a, erit DR = Pp = dx &, ob ſimilitudinem ΔΔ MDR & PDC in Analyſi infinitorum (§ 117) demonſtratam, cum ſit MD : DR = DC : PD, reperietur MD.PD = DR.DC = adx. Summa ergo momentorum ax = DC.DG, quæ diviſa per DH centri gravitatis F diſtantiam a centro circuli C determinat.

Quodſi pro DH ponatur quadrans AH & pro DG radius AC; prodibit diſtantia centri gravitatis ſemiperipheriæ AC^2 : AH, hoc eſt, diſtantia hæc CF eſt tertia proportionalis ad quadrantem & radium.

PROBLEMA 15.

128. *Determinare centrum gravitatis in ſectore circuli* ACB.

RESOLUTIO.

Tab. I. Fig. 2. Ex antecedentibus liquet, ſi DC ſectorem bifariam ſecet, centrum gravitatis fore in recta DC. Ducatur radio PC arcus PMN & radio pC alius pnm alteri infinite propinquus; erit momentum arcus PNM ductum in Pp ſeu Nn momentum ſegmenti annularis PNMmnp, hoc eſt, differentiale momenti ſectoris. Sit jam AC = a, AE = b; AD = p habemus momentum arcus ADB = $2ab$ ad momentum arcus PNM ut triangulum ACB ad Δ PMC (§. 127), conſequenter cum triangula hæc ſimilia ſint (§. 253 *Geom.*), ut AC^2 ad PC^2 (§. 380 *Geom.*). Unde momentum arcus PNM = $2abx^2 : a^2 = 2bx^2 : a$, momentum vero ſegmenti annularis PMmp = $2bx^2dx : a$. Hujus ſumma $2bx^3 : 3a$ per ſummam ponderum ſeu aream ſectoris ap diviſa, quotus $2bx^3 : 3aap$ definit diſtantiam centri gravitatis ſectoris CPM a centro circuli. Quodſi pro x ſubſtituatur a, prodibit $2ba^3 : 3aap = 2ab : 3p$ = 2AC. AE : 3AD. Eſt vero AC. AE : AD diſtantia centri gravitatis arcus a centro circuli CF (§. 125). Diſtantia igitur centri gravitatis ſectoris a centro circuli eſt ad diſtantiam centri gravitatis arcus ut 2 ad 3.

COROLLARIUM.

129. Diſtantia ergo centri gravitatis ſemicirculi a centro circuli C ſunt $\frac{2}{3}$ AC^2 : AH (§. 127). Quare ut $\frac{2}{3}$ AH ſeu arcus 60° ad $\frac{2}{3}$ AC ita $\frac{2}{3}$ AC ad diſtantiam centri gravitatis ſemicirculi a centro circuli. Tab. I. Fig. 11.

PROBLEMA 16.

130. *Invenire centrum gravitatis ſegmenti* DHED. Tab. I. Fig. 11.

RESOLUTIO.

1. Quæratur centrum gravitatis triangu-

anguli DCE (§. 120): quod ſit in L.

2. Quæratur centrum gravitatis ſectoris DCEHD (§. 128): quod ſit in F.

3. Cum F ſit commune centrum gravitatis trianguli DCE & ſegmenti DEHD; quæratur ad ſegmentum DEHD, triangulum DCE & LF quarta proportionalis GK: erit GK diſtantia centri gravitatis ſegmenti K a diſtantia cėntri gravitatis ſectoris F (§. 106). Exprimenda vero eſt ratio ſegmenti ad triangulum lineis rectis: quod quidem accurate præſtare licebit data circuli quadratura.

PROBLEMA 17.

Tab. II. Fig. 13. 131. *Invenire centrum gravitatis Lunulæ Hippocratis* ADBEA.

RESOLUTIO.

1. Quæratur centrum gravitatis ſemicirculi ADB (§. 129); quod ſit in G.

2. Quæratur porro centrum gravitatis ſegmenti AEBFA (§. 130); quod ſit in H.

3. Cum adeo G ſit centrum gravitatis commune Lunulæ *Hippocratis* ADBEA & ſegmenti AEB A; quæratur ad Lunulam, ſegmentum & HG quarta proportionalis GI: erit GI diſtantia centri gravitatis Lunulæ I a centro gravitatis ſemicirculi G (§. 106).

Exprimenda vero eſt ratio ſegmenti AEBA ad Lunulam ADBEA lineis, niſi numeris utamur.

PROBLEMA 18.

132. *Invenire centrum gravitatis in parabola truncata* SMNH. Tab. I. Fig. 9.

RESOLUTIO.

1. Quæratur centrum gravitatis parabolæ MAN (§. 121): quod ſit in F.

2. Quæratur item centrum gravitatis parabolæ SAH (*§. cit.*): quod ſit in D.

3. Quoniam centrum gravitatis commune parabolæ MAN & parabolæ truncatæ SMNH in O; quæratur porro ad parabolam truncatam SMNH, parabolam MAN & diſtantiam FO quarta proportionalis OK: erit in K centrum gravitatis parabolæ truncatæ (§. 106).

SCHOLION.

133. *Patet, eadem methodo, quam nunc uno alteroque exemplo illuſtravimus, ſemper inveniri centrum gravitatis differentiæ duarum figurarum, quarum centra gravitatis dantur.*

PROBLEMA 19.

134. *Invenire centrum gravitatis in parallelogrammo & parallelepipedo.* Tab. II. Fig. 14.

RE-

Resolutio.

1. Ducantur diagonales AD & EG, itemque CB & HF. Quoniam diagonalis utraque AD & CB parallelogrammum ACDB bifariam dividit (§. 320 *Geom.*); utraque per centrum gravitatis tranſit (§. 103), conſequenter in I eſt centrum gravitatis parallelogrammi. Similiter quia tam planum CBFH, quam ADGE parallelepipedum bifariam dividit (§. 476 *Geom.*); utrumque per centrum gravitatis ejus tranſit (§. 103), adeoque communis interſectio IK eſt diameter gravitatis (§. 92).

2. Dividatur IK bifariam in L. Quoniam planum tranſiens per L & baſibus parallelum parallelepipedum bifariam dividit (§. 474 *Geom.*); per centrum gravitatis tranſit (§. 103), adeoque in L gravitatis centrum eſt.

Scholion.

135. *Attendentibus ſtatim manifeſtum eſt, non abſimili modo centrum gravitatis in priſmatibus & cylindris reperiri, eſſeque illud punctum medium rectæ centra gravitatis baſium oppoſitarum conjungentis. In polygonis autem regularibus centrum gravitatis idem eſſe cum centro circuli circumſcribendi, facile quoque intelligitur. Quemadmodum vero centrum gravitatis ſegmentorum & ſectorum, imo lunularum circuli per ſuperiora inveniri poteſt; ita per problema præſens conſtat, quomodo variorum ſegmentorum cylindricorum centrum gravitatis inveniri poſſit, quorum nempe baſes ſunt circuli ſegmenta, ſectores, annuli, lunulæ.*

Problema 20.

136. *Invenire centrum gravitatis Coni & pyramidis.* Tab. II. Fig. 15.

Resolutio.

Centrum gravitatis Coni eſſe in axe AC ſatis claret ex ſuperioribus. Si $AP = x$, $Pp = dx$; ponduſculum in cono eſt $prx^2dx : 2a^2$ (§. 145 *Analyſ. infinit.*), adeoque momentum ejus $prx^3dx : 2a^2$ (§. 115). Hinc ſumma momentorum $prx^4 : 8a^2$ quæ per ſummam ponderum $prx^3 : 6a^2$ (§. 145 *Analyſ. infin.*) diviſa dat diſtantiam centri gravitatis portionis AMN a vertice A $= 6a^2prx^4 : 8a^2prx^3 = \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}$ AP, adeoque coni integri centrum gravitatis diſtat a vertice $\frac{3}{4}$ AC.

Eodem prorſus modo invenitur diſtantia centri gravitatis a vertice in pyramide $= \frac{3}{4}$ AC.

Problema 21.

137. *Invenire centrum gravitatis Conoidis parabolici ABCD ex rotatione parabolæ* AMC *circa axem AC geniti.* Tab. II. Fig. 16.

Resolutio.

Ponduſculum conoidis MNnm $= pxdx : 2r$ (§. 495 *Analyſ. infinit.*) adeoque momentum $= px^2dx : 2r$ (§. 115), conſequenter ſumma momentorum $= px^3 : 6r$, quæ per ſum-

mam ponderum $px^2 : 4r$ (§. 495 *Analyſ. infinit.*) diviſa dat diſtantiam centri gravitatis portionis conoidicæ AMPN a vertice A $= 4r px^3 : 6rpx^2 = \frac{2}{3} x$. Eſt adeo diſtantia centri gravitatis a vertice in conoide parabolico $= \frac{2}{3}$ AC.

PROBLEMA 22.

138. *Invenire centrum gravitatis conoidis paraboloidici ex rotatione paraboloidis cujuscunque* AMBC *circa axem* AC *geniti.*

RESOLUTIO.

Ponduſculum Conoidis paraboloidici indefinitum eſt $px^{2:m}dx:2r$ (§. 495 *Analyſ. infinit.*), adeoque momentum ejus $px^{2+m:m}dx : 2r$ (§. 115). Hinc ſumma momentorum $mpx^{2+2m:m}:(4m+4)r$, quæ per ſummam ponderum $mpx^{2+m:m}:(2m+4)r$ (§. 149 *Analyſ. infinit.*) diviſa dat diſtantiam centri gravitatis portionis Conoidicæ MAN a vertice A $= (2m+4)mr px^{2+2m:m} : (4m+4) mrpx^{2+m:m} = \frac{m+2}{2m+2} x = \frac{m+2}{2m+2}$ AP, conſequenter in integro Conoide $\frac{m+2}{2m+2}$ AC.

Sit e.gr. $m = 2$; erit AH $= \frac{2}{3}$ AC.
Sit $m = 3$; erit AH $= \frac{5}{8}$ AC.
Sit $m = 4$; erit AH $= \frac{3}{5}$ AC.
Sit $m = 5$; erit AH $= \frac{7}{12}$ AC.

PROBLEMA 23.

139. *Invenire centrum gravitatis ſegmenti ſphæræ.*

RESOLUTIO.

In ſegmento ſphærico ponduſculum $= pxdx - px^2dx : 2r$ (§. 146 *Analyſ. infinit.*), adeoque momentum ejus $px^2dx - px^3dx : 2r$ (§. 115). Unde ſumma momentorum $\frac{1}{3}px^3 - px^4 : 8r$, quæ per ſummam ponderum $\frac{1}{2}px^2 - px^3 : 6r$ (§. 146 *Anal. infin.*) diviſa definit diſtantiam centri gravitatis a vertice $= 12r(8rpx^3 - 3px^4) : 24 (6rpx^2 - 2px^3) = (8rx - 3x^2) : (12r - 4x)$. Eſt adeo ut $12r - 4x$ ad $8r - 3x$, hoc eſt, $3r - x$ ad $2r - \frac{3}{4}x$, ita x ad diſtantiam centri gravitatis a vertice.

COROLLARIUM.

140. Quodſi pro x ſubſtituatur r ſeu ſemidiameter ſphæræ, prodibit diſtantia centri gravitatis a vertice in hemiſphærio $(8r^2 - 3r^2) : (12r - 4r) = 5r^2 : 8r = \frac{5}{8}r$. Eodem modo ſi pro x ſubſtituatur $2r$, ſphæræ integræ centrum gravitatis reperitur diſtare a vertice ſemidiametro r, hoc eſt, idem cum centro ſphæræ.

PROBLEMA 24.

141. *Invenire centrum gravitatis Conoidis hyperbolici.*

RESOLUTIO.

In Conoide hyperbolico ponduſculum $= pbxdx : 2r + pbx^2dx : 2ar$ (§. 155 *Analyſ. infinit.*), adeoque momentum ejus $pbx^2dx : 2r + pbx^3 dx$:

$dx : 2ar$ (§. 115). Quare omnium momentorum ſumma $pbx^3 : 6r + pbx^4 : 8ar = (4apbx^3 + 3pbx^4) : 24ar$, quæ per ſummam ponderum $pbx^2 : 4r, + pbx^3 : 6ar$ (§. 155. *cit.*) $= (6apbx^2 + 4pbx^3) : 24ar$ diviſa diſtantiam centri gravitatis a vertice determinat $(4apbx^3 + 3pbx^4) : (6apbx^2 + 4pbx^3) = (4ax + 3x^2) : (6a + 4x)$. Eſt adeo ut $6a + 4x$ ad $4a + 3x$, ita x ad diſtantiam centri gravitatis a vertice. Conſtat vero eſſe a axem transverſum hyperbolæ genitricis, x altitudinem conoidis, ſeu illius abſciſſam (§. 417 *part.* 1).

PROBLEMA 25.

142. *Invenire centrum gravitatis ſegmenti ſphæroidis elliptici.*

RESOLUTIO.

In ſphæroide elliptico ponduſculum $pbxdx : 2r - pbx^2dx : 2ar$ (§. 150 *Analyſ. infinit.*), adeoque momentum ejus $pbx^2dx : 2r - pbx^3dx : 2ar$ (§. 115). Quare momentorum ſumma $pbx^3 : 3r - pbx^4 : 8ar = (4apbx^3 - 3pbx^4) : 24ar$, quæ per ſummam ponderum $pbx^2 : 4r - pbx^3 : 6ar$ (§. 150 *Analyſ. infinit.*) $= (6apbx^2 - 4pbx^3) : 24ar$ diviſa diſtantiam centri gravitatis a vertice determinat $(4apbx^3 - 3pbx^4) : (6apbx^2 - 4pbx^3) = (4ax - 3x^2) : (6a - 4x)$. Eſt adeo ut $6a - 4x$ ad $4a - 3x$, hoc eſt, ut $a - \frac{2}{3}x$ ad $\frac{2}{3}a - \frac{1}{2}x$ ita x ad diſtantiam centri gravitatis a vertice. Denotat autem a axem majorem ellipſis genetricis, ſeu ipſum axem majorem ſphæroidis; x autem altitudinem ſegmenti, ſeu portionem axis inter verticem & baſin intercepti.

COROLLARIUM 1.

143. Quodſi pro x ponatur a, prodit pro centro gravitatis totius ſphæroidis elliptici $(4aa - 3aa) : (6a - 4a) = aa : 2a = \frac{1}{2}a$. Eſt nempe in medio axe.

COROLLARIUM 2.

144. Sphæræ igitur & ſphæroidis elliptici communem axem habentium centrum gravitatis idem eſt (§. 140).

COROLLARIUM 3.

145. Si pro x ponatur $\frac{1}{2}a$, prodit diſtantia centri gravitatis in dimidio ſphæroide a vertice $(\frac{4}{2}aa - \frac{3}{4}aa) : (6a - \frac{4}{2}a) = \frac{5}{4}aa : 4a = \frac{5}{16}a$, eadem adeo quæ in hemiſphærio (§. 140). Nam ſi ut ibi fiat $a = 2r$; erit $\frac{5}{16}a = \frac{10}{16}r = \frac{5}{8}r$.

PROBLEMA 26.

146. *Invenire centrum gravitatis in Cono truncato* BMND *& in pyramide truncata.* Tab. II. Fig. 15.

RESOLUTIO.

1. Inveniatur centrum gravitatis Coni AMN (§. 136): quod ſit in F.

2. Inveniatur quoque centrum gravita-

vitatis coni majoris BAD (§. *cit.*): quod ſit in G.

3. Quæratur ad conum truncatum BMND, conum minorem MAN & FG quarta proportionalis GH: erit in H centrum gravitatis coni truncati.

Patet autem, rationem coni truncati BMND ad minorem MAN lineis eſſe exprimendam, niſi numeris utamur.

SCHOLION.

147. *Eadem methodo centrum gravitatis reperies in conoidibus truncatis, itemque in ſphæra & ſphæroidibus truncatis. Enimvero quamvis multa adhuc ea de re addi poſſent; filum tamen abrumpere conſultum ducimus, cum ex hactenus dictis facile eruantur, nec multum in praxi habeant uſum. Adjiciemus itaque tantummodo adhuc methodum, centrum gravitatis aut punctum ipſi in ſuperficie corporis cujuscunque reſpondens mechanice explorandi, quantum ad praxin ſufficit.*

PROBLEMA 27.

148. *Determinare centrum gravitatis mechanice in corpore quocunque.*

RESOLUTIO.

Tab. II. Fig. 17. 1. Super fune extenſo aut latere priſmatis trigoni FG corpus datum HI huc illucque promoveatur, donec partes utrinque æquilibrentur: planum, cujus latus KL, tranſit per centrum gravitatis (§. 87).

2. Super eodem corpus mutato ſitu æquilibretur: erit MN denuo latus per centrum gravitatis tranſeuntis (§. 87).

Interſectio adeo rectarum MN & KL determinat punctum O in ſuperficie corporis quæſitum, quod nempe eſt in diametro gravitatis (§. 92).

Aliter.

1. Corpus datum ACBD ita collocetur ſuper tabula horizontali, ut, ſi vel minimum ultra terminum CD promoveretur, decideret: erit recta CD in plano gravitatis (§. 87). Tab. II. Fig. 18.

2. Imponatur idem corpus eidem tabulæ, ut nunc longitudo AB, quemadmodum ante latitudo CD, ſit lateri tabulæ parallela & vel minimum ultra terminum AB promotum decidat: erit recta AB in plano gravitatis (§. 87).

Communis adeo interſectio rectarum AB & CD in ſuperficie corporis punctum O centro gravitatis imminens determinat (§. 92).

Aliter.

Laminæ centrum gravitatis invenies, ſi cuſpidi alicujus ſtyli eam impoſueris & ultro citroque promoveris, donec partes utrinque æquilibrentur. Erit enim in puncto, quo ſuſtentatur, centrum gravitatis (§. 87).

CO-

COROLLARIUM.

149. Corporis adeo humani in directum extenſi centrum gravitatis, vi modi primi, obſervante Borello (f), inter nates & pubim exiſtit. Quare totius corporis gravitas ibi colligitur, ubi genitalibus natura conceſſit locum.

SHOLION.

150. *Membro genitali maris maxime convenit is locus ad facilitandum coitum* (§. 88). *Unde ſapientia conditoris elucet.*

THEOREMA 20.

151. *Omnis figura ſive ſuperficialis, ſive ſolida, quæ motu lineæ aut figuræ generatur, æquatur facto ex magnitudine generante in viam ejus centri gravitatis, ſeu lineam, quam centrum gravitatis deſcribit.*

DEMONSTRATIO.

Concipiamus pondus totius magnitudinis generantis in centro gravitatis collectum (§. 88); erit totum pondus motu illius productum æquale facto ex pondere moto in viam centri gravitatis. Sed cum lineæ & figuræ inſtar gravium homogeneorum conſiderentur; pondera ipſarum ſunt ut volumina (§. 93), adeoque pondus motum eſt magnitudo generans, pondus productum genita. Quare figura genita æquatur facto ex magnitudine generante in viam ejus centri gravitatis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

152. Hinc cum parallelogrammum ABCD deſcribatur, ſi recta AB juxta ductum alterius AC motu ſibi ſemper parallelo deſcendat (§. 98 & 242 *Geom.*) & ex cor. 2. theor. 21 (§. 173) independenter ab his conſtet, viam centri gravitatis E æqualem eſſe rectæ EF ad CD perpendiculari, hoc eſt, altitudini parallelogrammi (§. 111 *Geom.*); area ejusdem æquatur facto ex baſi CD ſeu linea deſcribente in altitudinem EF. Tab. II. Fig. 19.

SCHOLION 1.

153. *Hæc conſona ſunt iis, quæ de parallelogrammorum areis inveſtigandis demonſtrata ſunt in Geometria* (§. 352. 357. 370 Geom.).

COROLLARIUM 2.

154. Eodem modo liquet, omnium corporum, quæ a figura plana quacunque juxta ductum alicujus rectæ AC deſcendit, ſoliditatem haberi, ſi planum deſcribens per altitudinem multiplicetur.

SCHOLION 2.

155. *Hæc denuo conſentiunt cum iis, quæ de priſmatis & cylindris dimetiendis in Geometria demonſtrata ſunt* (§. 478. & 480 Geom.).

COROLLARIUM 3.

156. Cum circulus deſcribatur, ſi radius Tab. II. Fig. 20.

(f) de motu animalium part. 1. prop. 134 p. m. 167.

dius CL circa centrum C rotetur (§. 127 *Geom.*); centrum vero gravitatis radii CL ſit in medio F (§. 104); via centri gravitatis eſt peripheria circuli *x* radio ſubduplo deſcripta, conſequenter area circuli æquatur facto ex radio CL in peripheriam radio ſubduplo CF deſcriptam.

SCHOLION 3.

157. *Hæc iis conſentanea eſſe, quæ in Geometria de circulo demonſtrata ſunt* (§. 406 Geom.) *ſtatim patet conſideranti, quod peripheria radio ſubduplo deſcripta ſit peripheria integro deſcriptæ dimidia* (§. 390 Geom.).

COROLLARIUM 4.

Tab. II. Fig. 21. 158. Si rectangulum ABCD circa axem AD rotetur, ipſum quidem cylindrum, latus vero BC cylindri ſuperficiem deſcribit (§. 438 *Geom.*). Eſt vero centrum gravitatis rectæ BC in medio F (§. 104) & centrum gravitatis plani generantis in medio G rectæ EF; via adeo hujus eſt peripheria circuli radio EG, illius vero peripheria circuli radio EF deſcripta. Quare ſuperficies cylindri eſt factum ex altitudine BC in peripheriam circuli radio EF deſcriptam ſive baſin, ut in Geometria demonſtravimus (§. 457 *Geom.*): ſoliditas vero cylindri eſt factum ex rectangulo generante ABCD in peripheriam circuli radio EG, qui eſt ipſius EF ſeu ſemidiametri cylindri ſubduplus, deſcriptam.

SCHOLION 4.

159. *Sit altitudo plani deſcribentis, adeoque cylindri,* BC $= a$, *ſemidiameter baſis* DC $= r$, *erit* EG $= \frac{1}{2}r$ *&, poſita ratione ſemidiametri ad peripheriam* $= 1 : m$, *peripheria radio* $\frac{1}{2}r$ *deſcripta* $= \frac{1}{2}mr$. *Ducta igitur* $\frac{1}{2}mr$ *in aream rectanguli* AC $= ar$; *erit ſoliditas cylindri* $= \frac{1}{2}mar^2$. *Eſt vero* $\frac{1}{2}mar^2 = \frac{1}{2}r.\,mr.\,a$ & $\frac{1}{2}r.\,mr$ *area circuli radio* DG *deſcripti. Conſtat ergo cylindrum reperiri æqualem facto ex baſi in altitudinem, ut in Geometria* (§. 480) *demonſtratum.*

COROLLARIUM 5.

160. Similiter cum centrum gravitatis rectæ AB ſit in medio M (§. 104) & ſuperficies coni deſcribatur, ſi triangulum ABC circa axem AC rotetur (§. 440 *Geom.*), ſitque præterea PM $= \frac{1}{2}$ BC (§. 253 *Geom.*). Superficies coni æqualis eſt facto ex ejus latere AB in peripheriam radio PM, ſeu ſemidiametri baſeos BC ſubduplo deſcriptam. Tab. II. Fig. 15.

SCHOLION 5.

161. *Sit* BC $= r$, AB $= a$, *ratio radii ad peripheriam* $1 : m$; *erit* PM $= \frac{1}{2}r$ *& peripheria hoc radio deſcripta* $= \frac{1}{2}mr$. *Ducta igitur* $\frac{1}{2}mr$ *in latus coni* AB, *prodit ſuperficies* $\frac{1}{2}amr$. *Sed* $\frac{1}{2}amr$ *eſt etiam factum ex* $\frac{1}{2}a$ *&* mr. *Ergo ſuperficies coni producitur ex peripheria baſeos in latus dimidium, ut in Geometria* (§. 487) *demonſtratum.*

COROLLARIUM 6.

162. Si triangulum ACB circa axem AB rotetur, conum deſcribit (§. 440 *Geom.*). Sed ſi CB diviſa bifariam in D ducatur recta AD, fiatque AO $= \frac{2}{3}$ AD; erit in O centrum gravitatis Tab. II. Fig. 22.

vitatis (§. 120). Æquatur ergo coni ſoliditas facto ex triangulo CAB in peripheriam radio PO deſcriptam (§. 151). Eſt vero AD : AO = DB : OP (§. 253 *Geom.*). Sed AO = $\frac{2}{3}$ AD & DB = $\frac{1}{2}$ CB *per demonſtr.* Ergo OP = $\frac{1}{3}$ DB = $\frac{1}{3}$ CB.

SCHOLION 6.

163. *Sit* CB = r, AB = a, *ratio radii ad peripheriam* = 1 : m ; *erit* OP = $\frac{1}{3}$ r, *peripheria hoc radio deſcripta* $\frac{1}{3}$ mr, Δ ACB = $\frac{1}{2}$ ar, *adeoque ſoliditas coni* $\frac{1}{3}$ mr. $\frac{1}{2}$ ar = $\frac{1}{6}$ amr². *Eſt vero etiam* $\frac{1}{6}$ amr² = $\frac{1}{2}$ r. mr. $\frac{1}{3}$ a, *ſeu factum ex baſi coni in tertiam altitudinis partem, ut in Geometria aliunde demonſtratum* (§. 487 Geom.).

SCHOLION 7.

164. *Elegans hoc theorema, quod inter præcipua ſeculi ſuperioris in Geometria inventa referri ſolet, jam olim* Pappus *commemoravit* (g) ; *ſed* Paulus Guldinus, *e Societate Jeſu, expreſſius plurimorum exemplorum inductione oſtendit* (h). *Uſi ſunt eodem Geometræ, præſertim ante inventum a* Leibnitio *calculum ſummatorium, cum* Guldino, *quemadmodum indicaverat* Pappus, *in dimetiendis ſolidis & ſuperficiebus motu rotationis circa axem fixum genitis : ſed idem uſum habere adhuc poteſt in quibusdam caſibus, ubi calculi ſummatorii ope idem difficilius præſtaretur. Ego in tyronum gratiam exemplis tritis regulam illuſtrare volui, ut vim ejus tanto facilius animo comprehenderent, ſimulque oſtendi, eidem locum eſſe, ſi magnitudines alio, quam rotationis motu generentur : unde nec cum* Pappo *ad ſolum rotationis motum theorema reſtrinxi. Illuſtris* Leibnitius (i) *invenit, ſuccedere quoque negotium, ſi axis vel centrum continuo mutetur, durante motu generante.*

CAPUT IV.
De
QUIETE ET LAPSU CORRUM GRAVIUM.

DEFINITIO 23.

165. *Linea horizontalis vera* eſt, cujus ſingula puncta a centro telluris æqualiter diſtant.

COROLLARIUM.

166. Cum adeo in Geographia independenter a principiis ſtaticis demonſtretur, terram habere figuram fere ſphæricam ; linea horizontalis eſt arcus circuli, ſemidiametro telluris continuata, ſi opus ſit, deſcriptus (§. 35 *Geom.*).

(g) ſub finem præfat. ad lib. 7. Collect. Mathem. (h) lib. 2 & 3 de centro gravitatis. (i) in Actis Erudit. A. 1695 p. 493.

DEFINITIO 24.

Tab. II. Fig. 20. 167. *Linea horizontalis apparens* BD eſt recta, quæ veram in dato puncto A tangit.

COROLLARIUM.

168. Eſt adeo ad ſemidiametrum telluris in puncto contactus, A perpendicularis (§. 293 *Geom.*).

DEFINITIO 25.

169. *Lapſus* eſt mutatio ſitus vi gravitatis.

THEOREMA 21.

170. *Si corpora gravia verſus centrum terræ nituntur, linea directionis eorundem ad lineam horizontalem eſt perpendicularis & contra.*

DEMONSTRATIO.

Tab. II. Fig. 20. I. Si corpora gravia verſus centrum terræ nituntur; linea directionis eorundem ſemidiametro telluris in directum jacet (§. 20). Ergo ad lineam horizontalem tam veram, quam apparentem perpendicularis (§. 165. 168). *Quod erat unum.*

II. Si linea directionis gravium ad horizontalem perpendicularis; ſemidiametro telluris in directum jacet (§. 165). Continuata igitur in centrum telluris incidit (§. 442 *Geom.*). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

171. Cum terra ſit propemodum ſphærica, ut in geographia demonſtratur, ingentes marium tractus, immo omnium fluidorum tractuumque terreſtrium æquabilium ſuperficies in omnibus ſuis punctis a centro telluris æqualiter abſunt (§. 443 *Geom.*). Quare cum experientia conſtet, gravia per lineas perpendiculares ad ſuperficiem aquarum deſcendere; gravia niti verſus centrum Telluris evincitur.

SCHOLION.

172. *Quodſi terræ figura non ſit perfecte ſphærica, ex deſcenſu perpendiculari gravium concludi nequit, quod verſus centrum illius nitantur: cum in ſolo circulo, cujus rotatione ſphæra generatur, normales ad peripheriam in centro concurrant* (§. 176 Analyſ. infinit.). *Sed ſuo loco, ubi de figura Telluris agemus, patebit, utique aſſumi poſſe citra erroris aſſignabilis periculum, gravia niti verſus centrum terræ. Immo in ſtaticis ſufficit, deſcenſum perpendicularem ad libellam aquarum experientia conſtare.*

COROLLARIUM 2.

173. Quoniam pro corpore gravi, ſalva gravitate, ſolum gravitatis centrum ſubſtitui poteſt (§. 58); linea directionis corporis gravis eſt recta ex centro gravitatis ad lineam horizontalem ſive apparentem, ſive veram perpendicularis.

PROBLEMA 28.

174. *Data ſemidiametro Telluris AC vel LC una cum longitudine lineæ horizontalis apparentis AD, determinare diſtantiam puncti extremi D a linea horizontali vera AL.* Tab. II. Fig. 20.

RE-

RESOLUTIO.

1. Quadrato ſemidiametri Telluris AD addatur quadratum lineæ horizontalis apparentis AD.
2. Ex aggregato extrahatur radix, quæ erit recta AD (§ 394 *Geom.*).
3. Inde ſubtrahatur ſemidiameter CL: quod relinquitur, eſt diſtantia lineæ horizontalis apparentis a vera DL.

E. gr. Ponamus ſemidiametrum telluris, qualis vulgo ſtatuitur, 860 milliarium Germanicorum & AD unius milliaris: erit

$$AC^2 = 739600$$
$$AD^2 = \quad 1$$
$$DC^2 = 739601$$

Unde $DC = 860{,}00057$
$CL = 860$

$$LD = 0{,}00057 \text{ ſeu } \frac{57}{100000}$$

Aliter.

Quoniam $GD : AD = AD : DL$ (§. 319 *Geom.*); erit $DL = AD^2 : GD$ (§. 272 *Arithm.*). Eſt vero DL ipſius GF ſeu diametri telluris particula admodum exigua, quippe in diſtantia milliaris demum $\frac{57}{100000}$ unius milliaris ſeu $\frac{57}{172000000}$ diametri telluris. Quamobrem $AD^2 : GL$ ſenſibiliter non differet a $AD^2 : GD$. Ut itaque habeatur DL, quadratum lineæ horizontalis apparentis AD dividatur per diametrum Telluris GD.

E. gr. Sit AD 900 pedum Pariſinorum ſeu 129600 linearum (pes enim Pariſinus continet 12 digitos, digitus 12 lineas), diameter Telluris juxta *Picardum* (k) 32692970 pedum pariſinorum ſeu linearum 3564934521б. Quodſi ergo $AD^2 = 16796160000$ per $GL = 35649345216$ dividas, prodibit DL fere $\frac{1}{2}$ unius lineæ.

SCHOLION.

175. *Hac poſteriore methodo* Picardus (l) *tabulam conſtruxit, quam huc transferre in uſum futurum libuit. Continet autem columna prima longitudinem lineæ horizontalis apparentis AD in pedibus pariſinis; altera puncti extremi D altitudinem DL ſupra lineam horizontalem veram AL.*

AD	DL	AD	DL
300 ped.	0 dig. 0 $\frac{1}{3}$ lin.	3300 Ped.	3 dig. 6 lin.
600	1 $\frac{1}{3}$	3600	4. 0
900	3	3900	4. 8
1200	5 $\frac{1}{3}$	4200	5. 4
1500	8 $\frac{1}{3}$	4500	6. 3
1800	1. 0	4800	7. 1
2400	1. 9 $\frac{1}{3}$	5400	8. 11
2700	2. 3	5700	10. 0
3000	2. 9	6000	11. 0

(k) Traité du Nivellement p. 196. (l) loc. cit. c. 1. p. 7.

COROLLARIUM.

176. Si linea horizontalis apparens AD 300 pedes non excedit; citra errorem ſenſibilem pro vera aſſumi, conſequenter etiam planum aliquod pro horizontali haberi poteſt.

PROBLEMA 29.

177. *Explorare, utrum planum aliquod propoſitum ſit horizontale, nec ne.*

RESOLUTIO.

Tab. II. Fig. 23.

1. Ex trabeculis ligneis conſtruatur triangulum æquicrurum FCG, continuatis cruribus in A & B, quo longius eo melius.
2. Ex vertice C ſuſpendatur globus plumbeus D & baſis trianguli FG dividatur bifariam in E.
3. Libella ſic conſtructa collocetur ſuper plano dato, ita ut cruribus ſuis AC & CB eidem inſiſtat.

Dico, ſi filum CD tranſeat per punctum medium E, planum eſſe horizontale.

DEMONSTRATIO.

Quia globus plumbeus D filum CD gravitate ſua extendit, pro linea directionis recte habetur (§. 20). Quodſi ergo FG bifariam ſecet in E; erit ad FG perpendicularis (§. 174 *Geom.*). Quoniam vero AC = CB *per conſtruct.* adeoque AC : CB = CF : FG; erit $x = o$ (§. 196 *Geom.*), conſequenter AB ipſi FG parallela (§. 240 *Geom.*) & CD etiam ad AB (§. 219 *Geom.*), hoc eſt, linea directionis globi ad planum, cui libella inſiſtit, perpendicularis. Planum adeo horizontale eſt (§. 170).

SCHOLION.

178. *Figura inſtrumenti variis modis mutari ſolet, eodem tamen ſemper manente fundamento. Quemadmodum vero ad praxes ſtaticas plerumque ſufficit; ita inferius artem libellandi expoſituri alia libellarum genera hac accuratiora deſcribemus, quarum beneficio linea horizontalis per tractus ampliſſimos continuatur.*

DEFINITIO 26.

179. Per *Baſin corporis gravis* intelligo figuram, in cujus perimetro circumcirca terminantur partes incumbentes aut fulcra, quibus ipſæ incumbunt. E. gr. Incumbat corpus grave duobus fulcris quadrangularibus CD & EF; figura CDEF dicetur baſis ejus. Tab. II. Fig. 24.

THEOREMA 22.

180. *Si linea directionis corporis gravis intra baſin cadit, nec corpus pluribus fulcris innixum proprio pondere ſatis incurvatur; corpus in ſitu ſuo acquieſcit: ſin illa extra baſin cadit, vel corpus pluribus fulcris innixum proprio pondere ſatis incurvatur, in eam labitur partem, verſus quam cadit centrum gravitatis.*

DE-

DEMONSTRATIO.

I. Incumbat corpus GE plano cuidam alteri firmo ac ſtabili AFBE ſitque linea directionis CD. Cum hæc ex centro gravitatis C educatur (§. 173); centrum gravitatis deſcendere nititur per rectam CD (§. 20). Sed juxta eandem ipſi renititur corpus, cui incumbit, idque ſatis firmum ac ſtabile, ut cedere neſciat, *per hypoth.* deſcenſus adeo centri gravitatis impeditur (§. 62) adeoque corpus quieſcit (§. 86). *Quod erat unum.*

II. Incumbant extrema alicujus corporis duobus fulcris FE & DC, & linea rectionis IL intra baſin FEDC cadat. Quoniam linea directionis ex centro gravitatis I ducitur (§. 173); centrum gravitatis per rectam IL deſcendere nititur (§. 20). Sed corpus proprio pondere eousque incurvari nequit, ut a fulcris recedant ejus extrema, *per hypotheſ.* Ergo centrum gravitatis impeditur, quo minus deſcendat, conſequenter corpus in hoc ſitu acquieſcit (§. 86). *Quod erat ſecundum.*

III. Cadat linea directionis CM corporis IL extra baſin. Cum centrum gravitatis ſit I (§ 175); id ſecundum rectam CM deſcendere nititur (§. 20). Quare cum nihil ſecundum eandem directionem ipſi reſiſtat; actu deſcendet, adeoque corpus labitur in eam partem, verſus quam cadit centrum gravitatis (§. 169). *Quod erat tertium.*

IV. Denique corpus grave duobus fulcris EF & DC ita incumbat, ut linea directionis IL intra baſin FEDC cadat. Quoniam linea directionis ex centro gravitatis I ducitur; centrum gravitatis per rectam IL deſcendere nititur. Quare cum corpus proprio pondere eo usque incurvari poſſit, ut a fulcris recedat, *per hypoth.* centrum gravitatis actu deſcendit, adeoque corpus labitur in eam partem, verſus quam linea directionis cadit (§. 169). *Quod erat quartum.* *Tab.* II. *Fig.* 24.

COROLLARIUM.

181. Quo major itaque vis requiritur, ut linea directionis extra baſin emoveatur, conſequenter, quo longius ea diſtat a perimetro baſis; eo firmius corpus in loco ſuo conſiſtit.

PROBLEMA 30.

182. *Invenire, utrum corpus grave in dato ſitu extra lapſus periculum conſtituatur, nec ne.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur centrum gravitatis corporis gravis (§. 148).
2. Ex eo demittatur perpendicularis in lineam horizontalem apparentem, juxta probl. 29 (ſi opus ſit) determinandam: quæ erit linea directionis (§. 173).

Quod-

Quodſi perpendiculum intra baſin corporis cadit, extra lapſus periculum conſtituitur; ſin minus, certo ruet in eam partem, verſus quam perpendiculum cadit (§. 180).

SCHOLION 1.

183. *Hinc ratio apparet, cur turres inclinatæ* Bononienſis & Piſana *non corruant, etſi illa anno* 1110 *excitata ad altitudinem pedum* 130 *aſſurgat & perpendiculum a baſi intervallo* 9 *pedum recedat, hæc vero anno* 1173 *exſtructa altitudinem habeat cubitorum* 78 *& intervallum inter baſin atque perpendiculum cubitorum* $7\frac{1}{3}$ *admittat, id quod expreſſius oſtendit* Paulus Cauſatus (l).

SCHOLION 2.

184. *Idem problema motibus animalium explicandis inſervit: qualia inprimis dedit* Joannes Alphonſus Borellus (m). E.gr. *Cum centrum gravitatis in homine inter nates & pubim exiſtat; linea directionis intra ſpatium calcaneis interjectum adeoque intra baſin cadit, quando erecto corpore utroque pede pavimento inſiſtit: quare in hoc ſitu firmiter conſiſtit. Enim vero ſi pes alteruter elevetur, baſis definietur ſpatio, quod pes unus occupat* (§. 179). *Cadit adeo linea directionis extra baſin, nempe verſus dexteram, ſi pes dexter elevetur, conſequenter homo ſuper ſolo pede ſiniſtro ſtare non poterit* (§. 180), *niſi corpus in latere ſiniſtro incurvet, quo linea directionis in pedem ſiniſtrum retrahatur. Enimvero talia fuſius proſequi non eſt noſtri inſtituti: apprime autem obſervanda ſunt in picturis & ſculpturis.*

SCHOLION 3.

185. *Immo hinc ratio reddi poteſt multorum inſtructura corporis animalis occurrentium.* E. gr. *Cum homo erectus ſtare ac incedere debeat, neceſſarium utique fuit, ut planum per medium tranſiens corpus divideret ipſum in partes utrinque æquiponderantes. Unde partes geminatæ, quales ſunt aures, oculi, brachia cum manibus, crura cum pedibus, a lateribus comparent, quæ ſui ſimiles non habent, ut frons, naſus, os, mentum, pectus, venter, genitale membrum, medium tenent locum eamque habent figuram, ut in partes æquales & ſimiles, adeoque in æquiponderantes, dividi poſſint.*

DEFINITIO 27.

186. *Centrum motus* eſt punctum, circa quod grave, aut plura gravia commune centrum gravitatis habentia rotari poſſunt. E. gr. Si pondera P & Q rotari poſſint circa punctum N, ita ut deſcendente P ipſum Q aſcendat; dicetur N centrum motus. Tab. II. Fig. 27.

THEOREMA 23.

187. *Diſtantia IN centri gravitatis ponderis particularis a centro gravitatis communi aut centro motus N, ad lineam directionis Ip perpendicularis.*

DEMONSTRATIO.

Cum linea directionis Ip corporis p tranſeat per centrum gravitatis ipſius (§. 173) & grave eodem modo

(l) Mechanic. lib. 1. c. 9 p. 50 & ſeqq.
(m) de motu Animalium c. 18 usque ad 23. p. 165 & ſeqq. conf. Caſatum Mechan. lib. 1. c. 11 p. 62 & ſeqq.

Tab. II. Fig. 27. modo gravitet, in quocunque lineæ directionis puncto centrum gravitatis corporis exiſtat (§. 64. 23); diſtantia centri gravitatis corporis p a centro motus vel centro gravitatis communi IN eadem eſt, quæ diſtantia ipſius N a linea directionis. Sed diſtantia ipſius N a linea directionis Ip eſt perpendicularis NI (§ 214 *Geom.*). Ergo eadem perpendicularis NI eſt diſtantia centri gravitatis corporis p a puncto N. *Q. e. d.*

PROBLEMA 31.

Tab. III. Fig. 28. 188. *Dato centro gravitatis C una cum pondere corporis AB, determinare vires in A & B requiſitas, ut in ſitu horizontali ſuſtentetur.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur ad ſummam diſtantiarum virium in A & B applicatarum a centro gravitatis corporis ſuſtentati C, pondus ejusdem G & diſtantiam vis in B applicatæ BC numerus quartus proportionalis: Dico, hunc eſſe vim in A applicandam.
2. Quare ſi is ſubtrahatur a pondere G relinquetur vis in B applicanda.

Sit e. gr. G = 300 librarum, AC = 5′, CB = 8′: erit AC + CB = AB = 13′ adeoque vis in A applicanda = G.CB: AB = 300.8 : 13 = $184\frac{8}{13}$, conſequenter vis in B = $115\frac{5}{13}$.

DEMONSTRATIO.

Quoniam corpus AB ſuſtentatur a viribus A & B *per hypoth.* neceſſe eſt ut eadem vi renitantur, quantum illud deorſum nititur (§. 62). Nititur autem corpus AB deorſum tota vi gravitatis, hoc eſt, quanta eſt ponderis G eidem æqualis & ex centro gravitatis C ſuſpenſi (§. 88). Ergo vires A & B junctim ſumtæ ponderi huic æquantur, conſequenter eorum centrum gravitatis commune in C (vi §. *cit.*). Sed cum linea AB ſit horizontalis, *per hypoth.* adeoque linea directionis GC ad eam perpendicularis (§. 173), vires autem in A & B ſecundum eandem directionem renitantur; erunt quoque earum lineæ directionis ad AB perpendiculares & hinc a centro gravitatis communi C diſtant intervallis AC & CB (§. 187). Eſt adeo AC + CB : CB = G : A (§. 110). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

189. Corpus adeo AB gravitat in fulcra, a quibus ſuſtentatur, in ratione reciproca diſtantiarum a centro gravitatis ipſius CB & CA.

SCHOLION.

190. *Ne mirentur tyrones, nos ad vires reſiſtentes quaſcunque & grave ſurſum urgentes ea applicare, quæ de ponderibus deorſum nitentibus demonſtrata ſunt: eodem enim manen-*

manente effectu, pondera H & I *facili negotio, ſi ita viſum fuerit, ſubſtitui poſſunt.*

PROBLEMA 32.

Tab. II. Fig. 18. 191. *Dato centro gravitatis F corporis IH una cum gravitate ipſius determinare punctum M, quod ſi plano horizontali incumbat, pondus datum G in L appenſum corpus IH ex ſitu horizontali dimovere nequit.*

RESOLUTIO.

Concipiatur in centro gravitatis F appenſum pondus gravitati totius corporis IH æquale (§. 88) & quæratur ejusdem atque ponderis dati G centrum gravitatis commune M (§. 111). Quodſi enim punctum M plano horizontali incumbat, pondus G corpus HI e ſitu ſuo dimovere nequit (§. 87). *Q. e. i. & d.*

Sit e. gr. baculi centrum gravitatis F, quod diſtet ab imo intervallo IF = 20″; ſitula aqua plena librarum 24, pondus baculi 2, LF = 18″. Reperietur LM = LF. F : (G+F) = 18.2 : 22 = 18 : 11 = 1″ 6‴ $\frac{4}{11}$. Mirum ergo non eſt (quod Statices ignari mirantur) ſitulam baculo IH ſupra menſam poſito appenſam non decidere.

PROBLEMA 33.

192. *Dato corporis AB centro gravitatis C una cum pondere ejus G, determinare puncta L & M, in quibus ſupponenda ſunt fulcra MN & LO, ut in data ratione premantur.* Tab. III. Fig. 28.

RESOLUTIO.

Sumantur in linea horizontali AB, quæ per centrum gravitatis C tranſit, rectæ MC & CL in data ratione. Quodſi fulcra MN & LO in punctis hac ratione determinatis ſupponas, ea premuntur in data ratione (§. 189).

COROLLARIUM.

193. Quodſi in M & L fulcrorum loco humeros aut manus ſupponant operarii; pondus portare poterunt, ſi viribus eorum proportionatum. Unde patet, quomodo onus ferendum in data ratione diſtribui poſſit.

SCHOLION.

194. *Si pondus ferendum ex longurione extra centrum gravitatis ipſius ſuſpendatur; quærendum eſt centrum gravitatis commune ponderis atque longurionis, & ſuppoſito in eodem pondere utrique æquali, reliqua peraguntur ut in reſolutione problematis.*

CA-

CAPUT V. DE MOTU RECTILINEO COMPOSITO.

DEFINITIO 28.

195. *Motus ſimplex* eſt, qui a vi una efficitur.

DEFINITIO 29.

196. *Motus compoſitus* eſt, qui efficitur a viribus pluribus conſpirantibus. Dicuntur autem *vires conſpirare*, ſi directio unius non eſt oppoſita directioni alterius, veluti cum radius circuli circa centrum rotari & interea punctum per eam recta incedere concipitur.

COROLLARIUM.

197. Omnis ergo motus curvilineus eſt compoſitus (§. 61).

DEFINITIO 30.

198. *Angulus directionis* eſt, quem lineæ directionis duarum virium conſpirantium comprehendunt.

THEOREMA 24.

ab. 199. *Si mobile A duplici vi urgeatur, altera quidem ſecundum directionem AB, altera vero ſecundum directionem AC; motu compoſito diagonalem parallelogrammi AD deſcribit, cujus latera AB & AC viribus disjunctis interea deſcriberet.*
ig.
9.

DEMONSTRATIO.

Si mobile A ſola vi ſecundum AB impreſſa moveretur, momento primo foret in aliquo puncto rectæ AB veluti in H & ad rectam HL ipſi AC parallelam accederet. Si ſola vi ſecundum AC impreſſa progrederetur, eodem momento foret in aliquo puncto ipſius rectæ AC veluti in I & ad rectam IL ipſi AB parallelam accederet. Sed cum directiones virium ſibi non opponantur, neutra alteram impedire valet, adeoque eodem momento mobile accedet tum ad HL, tum ad IL, conſequenter erit in puncto L, ubi HL & IL concurrunt. Eodem modo patet, ductis KM & MG ipſis AB & AC parallelis, quod momento ſecundo futurum ſit in M, tandemque in D. Conſtat ergo propoſitum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

200. Cum circa quamlibet rectam AD parallelogrammum aliquod ABDC conſtrui poſſit, conſtructis nempe triangulis æqualibus ACD & ABD tanquam ſuper baſi communi (*vi §. 320 Geom.*). Omnis motus rectilineus, ubi

ad demonſtrandum utile fuerit, in compoſitum reſolvi poteſt.

COROLLARIUM 2.

201. Quoniam vero laterum AC & CD ratio varia eſſe poteſt, motu quoque variis modis compoſito eadem recta AD deſcribi (§. 199), adeoque & idem motus rectilineus in varios compoſitos reſolvi poteſt.

COROLLARIUM 3.

Tab. II. Fig. 29. 202. Hinc ſi mobile a tribus viribus ſecundum directiones BA, AD & AC trahitur, & binæ junctim ſumtæ tertiæ æquipollent; erunt inter ſe ut rectæ ad directiones ipſarum parallelæ BD, DA & DC, hoc eſt reciproce ut ſinus angulorum, quos lineæ directionis cum linea directionis tertiæ comprehendunt. Eſt nempe DB ad AD ut ſinus anguli BAD ad ſinum anguli ABD & ita porro (§. 33 *Trigon.*).

THEOREMA 25.

Tab. II. Fig. 29. 203. *In motu compoſito uniformi velocitas a viribus conſpirantibus producta eſt ad velocitatem alterutrius, ut diagonalis* AD *parallelogrammi* ABDC, *juxta cujus latera agunt ſeparatæ, ad latus alterutrum* AB *vel* AC.

DEMONSTRATIO.

Eodem enim tempore, dum vis una conficit latus parallelogrammi AB & altera AC ſigillatim, conjunctæ conficiunt diagonalem AD (§. 199). Eſt ergo diagonalis AD ſpatium a viribus conſpirantibus dato tempore deſcriptum (§. 12). Sed in motu uniformi celeritates in eodem tempore ſunt ut ſpatia (§. 25). Eſt ergo celeritas a viribus conſpirantibus orta ad celeritatem a vi alterutra ortam ut AD ad AB vel AC. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

204. Datis itaque viribus conſpirantibus, hoc eſt, data celeritatum ratione per rectas AB & AC magnitudine datas, & directione per easdem rectas poſitione datas, aut per angulum directionis, datur motus obliqui celeritas & directio, quia diagonalis & magnitudine & poſitione datur.

COROLLARIUM 2.

205. Non tamen vice verſa motu obliquo dato dantur ſimplices, quia idem ex diverſis ſimplicibus componi poteſt (§. 201).

THEOREMA 26.

206. *In motu compoſito ab iisdem viribus producto major eſt velocitas, ſi angulus directionis minor; illa autem minor, ſi hic major.*

DEMONSTRATIO.

Sit angulus directionis major BAC, minor FAC. Quoniam vires eædem ſunt *per hypoth.* erit AC utrique parallelogrammo AFCE & BACD communis, & præterea Tab. II. Fig. 30.

AB

AB = AF. Evidens eſt in hypotheſi anguli majoris deſcribi diagonalem AD, in hypotheſi minoris vero ipſam AE & quidem eodem tempore ob AB = AF, (§. 199). Sunt igitur celeritates ut AD ad AE (§. 25). Quare cum AD < AE *per hypoth.* velocitas in hypotheſi anguli majoris minor eſt, quam in hypotheſi minoris. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

207. Cum datis cruribus AC & CE cum angulo intercepto, angulus CEA (§. 38 *Trigon.*) & inde porro AE (§. 34 *Trig.*) reperiatur; data virium conſpirantium celeritate & angulo directionis in caſu quocunque ſpeciali celeritas motus compoſiti inveniri, conſequenter ratio celeritatum ab iisdem viribus ſub diverſis directionum angulis productarum definiri poteſt.

CAPUT VI. De DESCENSU GRAVIUM IN PLANO INCLINATO.

DEFINITIO 31.

208. *Planum inclinatum* eſt, quod cum horizontali efficit angulum obliqutum.

DEFINITIO 32.

209. *Gravitatem abſolutam* voco, qua corpus deſcendit libere in medio non reſiſtente.

DEFINITIO 33.

210. *Gravitatem reſpectivam* appello, qua corpus deſcendit, parte aliqua ad ſuperandam reſiſtentiam impenſa. Talis eſt, qua deſcendit in plano inclinato, ubi pars aliqua ad reſiſtentiam plani vincendam impenditur.

THEOREMA 27.

211. *Si grave in plano inclinato conſiſtit, gravitas reſpectiva eſt ad gravitatem abſolutam ut longitudo plani AC ad altitudinem AB.* Tab. III. Fig. 31.

DEMONSTRATIO.

Sit CB linea horizontalis. Cum globus D ſecundum directionem AC deſcendere nitatur in plano inclinato, libere autem deſcenderet per rectam DH ad horizontalem CB perpendicularem (§. 173); exponat DF gravitatem abſolutam, DG vero ad DE perpendicularis gravitatis partem, qua reſiſtentiam plani vincit. Quodſi parallelo-

 gram-

grammum DGFE compleatur, diagonalis DF tanquam vis compoſita in ſimplices DG & EF reſolvi poteſt (§. 199) : quarum adeo DE gravitatem reſpectivam repræſentat. Eſt igitur gravitas abſoluta ad reſpectivam ut DF ad DE. Enimvero cum DH & AB ad eandem CB perpendiculares exiſtant *per hypoth.* inter ſe parallelæ ſunt (§. 241 *Geom.*) adeoque anguli EDF & CAB æquales (§. 222 *Geom.*). Quoniam vero præterea anguli E & B recti ſunt, *per hypoth.* erit DF : DE = CA : AB (§. 253 *Geom.*). Quare gravitas abſoluta ad reſpectivam ut CA ad AB (§. 156 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

212. Cum adeo globus D ſuper plano inclinato gravitate tantum reſpectiva gravitet, pondus L juxta directionem longitudini plani parallelam DA trahens eum retinebit, ſi fuerit ad ipſum in ratione altitudinis AB ad longitudinem plani AC.

COROLLARIUM 2.

213. Quodſi longitudo plani CA ſumatur pro ſinu toto, erit AB ſinus anguli inclinationis ACB (§. 3 *Trigon.*). Eſt igitur gravitas abſoluta ad reſpectivam ponderis ſuper plano inclinato, adeoque etiam pondus D ad pondus L juxta directionem DA ipſum ſuſtentans, ut ſinus totus ad ſinum anguli inclinationis.

COROLLARIUM 3.

214. Hinc gravitates reſpectivæ ejusdem corporis ſuper diverſis planis inclinatis ſunt inter ſe ut ſinus anguli inclinationis. Eſt enim ut ſinus totus ad ſinum anguli inclinationis plani unius, ita gravitas abſoluta ad reſpectivam ſuper eodem (§. 211) & ut ſinus totus ad ſinum anguli inclinationis plani alterius, ita eadem gravitas abſoluta ad reſpectivam ſuper hoc plano (§. 211). Quare ut ſinus anguli inclinationis planorum, ita ſunt gravitates reſpectivæ ejusdem corporis ſuper iisdem (§. 167 *Arithm.*).

COROLLARIUM 4.

215. Major ergo gravitas reſpectiva, quo major angulus inclinationis; minor itidem illa eſt, quo minor hic exiſtit: cum creſcentibus angulis creſcant, decreſcentibus decreſcant ſinus (§. 288 *Geom.* & §. 2 *Trigon.*).

COROLLARIUM 5.

216. Sicut itaque in plano verticali, ubi inclinatio maxima, nempe perpendicularis, gravitas reſpectiva degenerat in abſolutam; ita in plano horizontali, ubi nulla inclinatio, gravitas reſpectiva prorſus exſpirat, hoc eſt, grave ſecundum longitudinem plani nullum niſum exercet.

COROLLARIUM 6.

217. In plano igitur verticali vis motum impediens ipſi æqualis eſt; in

plano

plano horizontali ad grave retinendum vi nulla opus.

PROBLEMA 34.

218. *Invenire ſinum anguli inclinationis plani, ſuper quo data vi pondus datum ſuſtentari poſſit.*

RESOLUTIO.

Fiat ut pondus datum ad vim datam, ita ſinus totus ad ſinum anguli inclinationis plani (§. 213).

E. gr. Sit pondus 1000, vis 50 librarum; reperietur angulus inclinationis 2° 52′.

Log. 1000 = 30000000
Log. 50 = 16989700
Log. Sin. tot. 100000000

Log. Sin. inclin. = 8.6989700, cui in tabulis quam proxime reſpondent 2° 52′.

THEOREMA 28.

219. *Si pondus L juxta directionem perpendicularem AB deſcendit & pondus D juxta directionem plano inclinato parallelam attollit; altitudo aſcenſus ponderis D eſt ad altitudinem deſcenſus alterius L ut ſinus anguli inclinationis C ad ſinum totum.*

DEMONSTRATIO.

Aſcendat enim pondus D ex C usque in D, erit altitudo, ad quam aſcendit, GH. Sed cum pondus L in plano perpendiculari deſcendat, *per hypoth.* erit altitudo, per quam ipſum deſcendit, ipſi CE æqualis. Altitudo igitur aſcenſus ponderis D eſt ad altitudinem deſcenſus alterius L ut DH ad CD. Enimvero ſi CD ſumatur pro ſinu toto, DH eſt ſinus anguli inclinationis C (§. 2 *Trigon.*). Sunt ergo altitudines prædictæ ut ſinus anguli inclinationis & ſinus totus. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

220. Eſt igitur altitudo deſcenſus CD ponderis L ad altitudinem aſcenſus DH ponderis D ut reciproce pondus D ad pondus L ipſi æquiponderans (§. 212).

COROLLARIUM 2.

221. Quare cum ſit CD.L = DH.D (§. 169 *Arithm.*) & niſus atque reniſus æquiponderantium D & L æquales ſint (§. 62); momenta ponderum D & L ſunt in ratione compoſita maſſarum & altitudinum, per quam in plano ſive inclinato, ſive perpendiculari vel aſcendunt, vel deſcendunt (§. 148 *Arithm.*).

COROLLARIUM 3.

222. Si pondera ſive ex centro gravitatis communi, ſive ex alio quocunque extra illud poſito ſuſpendantur; momenta ſunt in ratione compoſita maſſarum & diſtantiarum a puncto ſuſpenſionis N, nempe in eo ſitu, quo centrum gravitatis ipſius P deſcendit per altitudinem IK & centrum gravi- Tab. II. Fig. 27.

tatis

tatis alterius ponderis Q aſcendit per altitudinem OH, ut Q. ON & P. IN (§. 108 115). Sed cum verticales ad N ſint æquales (§. 150 *Geom.*) & lineæ directionum KI & HO ſint ad horizontalem LM in O & I perpendiculares (§. 173); ON : NI = HO : IK (§. 252 *Geom.*). Quare momenta ponderum Q & P ſunt etiam ut Q. HO & P. IK, hoc eſt, in ratione compoſita maſſarum & altitudinum, per quas perpendiculariter centrum gravitatis vel aſcendit, vel deſcendit. Superior igitur conſtituta virium æſtimatio cum præſente conſentit.

COROLLARIUM 4.

223. Vires adeo æquales ſunt, quæ pondera elevant per altitudines ipſis reciproce proportionales.

SCHOLION 1.

224. *Hoc principium ad demonſtrandas machinarum vires ſine demonſtratione aſſumit* Carteſius (n). *Ait enim*, quod iisdem viribus, quibus pondus v. gr. 100 librarum in duorum pedum altitudinem attolli poteſt, iisdem aliud quoque 200 librarum in unius pedis altitudinem poſſit elevari.

SCHOLION 2.

225. *Hinc etiam ratio patet, cur currus onuſtus difficilius trahatur ſuper plano inclinato, quam ſuper horizontali: gravatur nimirum ea ponderis parte, quæ eſt ad pondus totum ipſius in ratione altitudinis ad longitudinem plani. Ex quo etiam intelligitur, cur idem difficilius trahatur in via lutoſa & arenoſa. Cæterum in praxi ratio longitudinis plani ad altitudinem facile definitur. Si enim recta FD ſit longitudini plani AC parallela, hoc eſt, linea directionis currus, atque FC altitudini CD parallela ope perpendiculi definiatur, & in C erigatur perpendicularis* DC, *erit* y = o & o = x (§. 222 Geom.) *hincque* y = x. *Quare, ob rectos D & B,* FC : CD = BA : AB (§. 253 Geom.). Tab. III. Fig. 32.

THEOREMA 29.

226. *Vires mortuæ ſunt in ratione compoſita maſſarum & velocitatum.*

DEMONSTRATIO.

In tempuſculo infinite exiguo gravium motus eſt æquabilis (§. 4 *Analyſ. infinit.* & §. 22 *Mechan.*). Itaque ſpatia deſcenſus ſunt ut celeritates (§. 28). Quamobrem cum vires elementa iſta motus producentes ſint in ratione compoſita ſpatiorum & maſſarum (§. 222) eæque mortuæ, utpote motui actuali per ſe non cohærentes (§. 3 & 9); vires mortuæ ſunt in ratione compoſita maſſarum & velocitatum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

227. Quod ſi ergo maſſæ æquales ſunt, vires mortuæ velocitatum rationem habent.

THEOREMA 30.

228. *Pondera E & F ſuper planis incli-*

(n) in Tract. de Mechanica (qui inter poſthuma habetur) p. 13.

inclinatis AC & CB ejusdem altitudinis CD *æquiponderantia ſunt ut longitudines planorum* AC & CB.

DEMONSTRATIO.

Tab. III. Fig. 33. Quoniam pondera E & F æquiponderant, *per. hypoth.* eadem vis, quæ pondus E ſuper plano inclinato AC ſuſtentare valet, etiam alterum F ſuper plano inclinato CB ſuſtentabit, & hæc dicatur V. Eſt vero $V:E = DC:AC$ & $V:F = DC:CB$ (§. 212). Ergo $E:F = AC:CB$ (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

Tab. III. Fig. 34. 229. Simon Stevinus (o) *ingenioſam affert hujus theorematis demonſtrationem, quam ob miram facilitatem huc transferre libet. Catena, cujus partes exacte ponderant in ratione longitudinis, imponatur triangulo GIH. Illud per ſe patet, partes* GK & KH *æquilibrari: æquipollet enim GKH catena in punctis* G & H *ſuſpenſa. Quodſi jam IH non æquiponderet ipſi GI; pars præponderans prævalebit, & motus perpetuus catenæ circa* GIH *orietur, qui cum ſit abſurdus, patet partes catenæ IH & GI, adeoque pondera quævis alia, quæ itidem ſunt ut longitudines planorum IH & GI æquiponderare. Supponit adeo motum perpetuum eſſe abſurdum.*

COROLLARIUM.

Tab. III. Fig. 33. 230. Quodſi communis planorum altitudo CD ſumatur pro ſinu toto, CB & CA ſunt coſecantes angulorum inclinationis A & B (§. 11 *Trigon.*). Pondera igitur F & E ſuper planis inclinatis CB & CA æquiponderantia ſunt ut coſecantes angulorum inclinationis. Sunt item reciproce ut ſinus angulorum inclinationis A & B (§. 33 *Trigon.*).

THEOREMA 31.

231. *Grave ſuper plano inclinato deſcendit motu uniformiter accelerato.*

DEMONSTRATIO.

Gravitas reſpectiva eſt ad abſolutam in conſtante ratione (§. 211), cumque adeo hæc non mutetur, (§. 64) illa quoque omni deſcenſus tempore eadem. Quare cum eodem ſemper modo in grave agat; ſingulis momentis æqualibus æquales addet celeritates (§. 23). Grave igitur motu accelerato deſcendit (§. 56). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

232. Sunt igitur ſpatia deſcenſus in ratione duplicata temporum (§. 66), itemque velocitatum (§. 69).

COROLLARIUM 2.

233. Eadem etiam temporibus æqualibus creſcunt ſecundum numeros impares (§. 68).

COROLLARIUM 3.

234. Tempora vero ſunt in ratione ſubduplicata ſpatiorum (§. 67), itemque velocitates in eadem exiſtunt (§. 70).

COROLLARIUM 4.

235. Spatium quoque a gravi in plano incli-

(o) Element. Static. Lib. I. prop. 19. f. 448 Operum.

inclinato deſcendente decurſum eſt ſubduplum ejus, quod eodem tempore cum velocitate, quam grave in fine ejusdem habet, motu uniformi conficitur (§. 78).

COROLLARIUM 5.

236. Deſcenſus adeo gravium ſuper planis inclinatis iisdem legibus adſtringitur, quibus deſcenſus eorundem in perpendiculari tenetur (§. 72. 73).

SCHOLION.

237. *Hinc* Gallilæus *leges illas exploraturus experimenta ſumſit in planis inclinatis* (§. 75): *tardior enim, ut in theoremate ſequente demonſtratur, eſt deſcenſus in plano inclinato, & hinc ſpatia facilius notari poſſunt.*

THEOREMA 32.

238. *Celeritas gravis in plano inclinato decidentis in fine temporis dati eſt ad celeritatem, quam perpendiculariter deſcendens eodem tempore acquireret, ut altitudo plani inclinati ad longitudinem eius.*

DEMONSTRATIO.

Celeritatis elementa, dum grave per planum inclinatum deſcendit, producuntur a gravitate reſpectiva, dum vero perpendiculariter deſcendit, ab abſoluta. Gravitas autem cum ſolo niſu, non autem impetu concepto in utroque caſu agat (§. 4), in virium mortuarum numero eſt (§. 9). Celeritas igitur in plano inclinato deſcendentis quolibet tempuſculo eſt ad celeritatem in perpendiculari cadentis, ut gravitas reſpectiva ad abſolutam (§. 226), hoc eſt, ut altitudo plani ad ejus longitudinem (§. 211), conſequenter & celeritates toto tempore productæ in eadem ratione exiſtunt (§. 178 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

239. Celeritas gravis perpendiculariter cadentis ad celeritatem in plano inclinato deſcendentis eſt in fine ejusdem temporis (incipiendo nimirum a quiete) ut ſinus totus ad ſinum anguli inclinationis (§. 213).

THEOREMA 33.

240. *Spatium a gravi in plano inclinato confectum AD eſt ad ſpatium AB, quod eodem tempore in perpendiculari percurreret, ut velocitas in plano inclinato ad velocitatem in deſcenſu perpendiculari in fine temporis dati.* Tab. III. Fig. 35.

DEMONSTRATIO.

Si grave ab initio motus eam celeritatem habuiſſet, quam in D conſtitutum habet, duplum ipſius AD ſpatium confeciſſet (§. 235). Similiter ſi ab initio motus eam celeritatem habuiſſet, quam in B habet, duplum ipſius AB confeciſſet (§. 78), utrobique nempe motu æquabili. Sunt igitur ſpatia dupla 2AD & 2AB, eodem nempe tempore

per-

percurſa, *per hypoth.* ut celeritates (§. 181. Ergo & AD atque AB ſunt ut eædem celeritates (§. 172 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

241. Eſt igitur ſpatium in plano inclinato percurſum ad ſpatium, per quod grave eodem tempore in perpendiculari deſcenderet, ut plani altitudo AB ad longitudinem ejus AC, (§. 238), itemque ut ſinus anguli inclinationis B ad ſinum totum (§. 239).

COROLLARIUM 2.

242. Si ex angulo recto B ad AC perpendicularis demittatur; erit AC : AB = AB : AD (§. 315 *Geom.*). Quare eodem tempore, quo grave ex A perpendiculariter deſcendit in B, ſuper plano inclinato perveniet in D (§. 241).

COROLLARIUM 3.

243. Dato igitur ſpatio deſcenſus perpendicularis in altitudine plani AB, habetur ſpatium eodem tempore in plano inclinato percurrendum AD, ſi ex B ad AC perpendicularis demittatur.

COROLLARIUM 4.

244. Similiter dato ſpatio in plano inclinato percurſo AD, invenitur ſpatium AB, per quod eodem tempore grave perpendiculariter decidiſſet, ſi ex D perpendicularis erigatur, quæ cum catheto plani AB concurrens punctum B determinabit.

COROLLARIUM 5.

245. Cum in ſemicirculo D, E, F, C recti ſint (§. 302 *Geom.*); grave per omnia plana AD, AE, AF, AC eodem tempore deſcendit, quo nempe per diametrum AB, ſi ea fuerit ad lineam horizontalem LM perpendicularis (§. 244). Tab. III. Fig. 36.

PROBLEMA 35.

246. *Dato ſpatio AD in plano inclinato AC percurſo, determinare ſpatium, quod in alio plano inclinato eodem tempore percurreret.* Tab. III. Fig. 35.

RESOLUTIO.

1. Ex puncto D erigatur perpendicularis DB occurrens altitudini AB in B: erit AB ſpatium, per quod eodem tempore caderet perpendiculariter grave (§ 244).
2. Quare ſi ex B demittatur perpendicularis BE ad planum AF; erit AE ſpatium, quod in plano inclinato AF conficit grave eodem tempore, quo cadit perpendiculariter ex A & B (§. 243), conſequenter & in inclinato AC ex A in D pervenit. *Q. e. i. & d.*

COROLLARIUM.

247. Cum ſit AB ad AD ut ſinus totus ad ſinum anguli inclinationis C & AB ad AE ut ſinus totus ad ſinum anguli inclinationis F (§. 241); ſpatia AD & AE, quæ grave eodem tempore in diverſis planis inclinatis percurrere

valet, ſunt ut ſinus angulorum inclinationis C & F (§. 167 *Arithm.*), & reciproce ut gravitates reſpectivæ ſuper iisdem planis (§. 230), conſequenter etiam reciproce, ut longitudines planorum AC & AF æque altorum (§. 228). Et hinc problema per calculum variis modis ſolvitur.

THEOREMA 34.

Tab. III. Fig. 35. 248. *Velocitates, quæ in diverſis planis inclinatis eodem tempore acquiruntur, ſunt ut ſpatia eodem tempore percurſa.*

DEMONSTRATIO.

Ducantur ex puncto B altitudinis AB ad plana AC & AF perpendiculares BD & BE, erunt AD, AB & BE ſpatia eodem tempore percurſa (§. 246). Cum adeo ſit, ut AD ad AB, ita velocitas per AD acquiſita ad velocitatem per AB acquiſitam, & ut AE ad AB ita velocitas per AE acquiſita ad velocitatem per AB acquiſitam (§. 238 *Mech. &* 315 *Geom.*); velocitates eodem tempore per AD & AE acquiſitæ ſunt ut ſpatia AD & AE iſto tempore percurſa (§. 168 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

249. Velocitates in diverſis planis inclinatis eodem tempore acquiſitæ ſunt ut ſinus angulorum inclinationis C & F, reciproce ut gravitates reſpectivæ ſuper iisdem planis, nec non reciproce ut eorundem planorum æquealtorum longitudines AC & AF (§. 247).

THEOREMA 35.

250. *Si grave per planum inclinatum AC ad lineam horizontalem CB pervenit, eandem celeritatem acquiſivit, quam in deſcenſu perpendiculari AB usque ad eandem lineam horizontalem CB acquireret.* Tab. III. Fig. 35.

DEMONSTRATIO.

Demittatur ex B perpendicularis DB; erit AD ſpatium eodem tempore percurſum, quo percurritur AB (§. 243), adeoque celeritas per AB acquiſita ad celeritatem per AD acquiſitam ut AC : AB (§. 238). Celeritas vero per AC acquiſita eſt ad celeritatem per AD acquiſitam in ratione ſubduplicata ipſius AC ad AD (§. 234). Quare cum ſit AC : AB = AB : AD (§. 315 *Geom.*); erit celeritas per AC acquiſita ad celeritatem per AD acquiſitam ut AC ad AB (§. 200 *Arithm.*). Celeritas igitur per AC acquiſita eſt celeritati per AB acquiſitæ æqualis (§. 169 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

251. Grave igitur per diverſa plana inclinata AC, AG, AF, cadendo eandem celeritatem acquirit, ubi ad eandem lineam horizontalem CF pervenit.

CO-

COROLLARIUM 2.

Tab. III. Fig. 37. 252. Si grave cadit perpendiculariter ex L in I eandem celeritatem acquirit, quæ per planum inclinatum HI acquiritur (§. 250). Quare ſi per planum IK motum continuat, ubi ad I pervenit, eodem modo movebitur, ac ſi ſtatim ab initio in plano inclinato HK motum fuiſſet.

COROLLARIUM 3.

253. Cum tamen motus per planum inclinatum IK tardior ſit quam per perpendiculum IM (§. 238); grave per LI & IK deſcendens tardius lineam horizontalem KM attingit, quam ſi conſtanter per LM perpendiculariter deſcendiſſet.

COROLLARIUM 4.

Tab. III. Fig. 38. 254. Quodſi grave deſcendit per planum inclinatum LM, in M eam velocitatem habet, quam acquireret cadendo per PM (§. 251). Quodſi ergo ubi ad M pervenit, motum ſuum continuet per MN, nec flexus in M motui officiat, niſi quod directionem mutet; eam in N velocitatem habet, quam acquireret cadendo per PN, vel etiam QN (§. *cit.*). Quamobrem ſi ex N per NO feratur, perveniens ad lineam horizontalem OR ea velocitate præditum eſt, quam acquireret per OQ, ſeu QR (§. *cit.*). Grave igitur per plura plana inclinata contigua LM, MN, ON motum continuans, eam acquiret celeritatem, ac ſi perpendiculariter per QR deſcendiſſet.

COROLLARIUM 5.

255. Cum itaque curvæ ex rectis infinite parvis componantur; grave per curvam QS deſcendens eandem adipiſcitur celeritatem, quam ex caſu perpendiculari QR acquireret.

THEOREMA 36.

256. *Tempus deſcenſus per planum inclinatum AC eſt ad tempus deſcenſus perpendicularis per* AB *ut longitudo plani* AC *ad altitudinem* AB: *tempora vero deſcenſuum per diverſa plana inclinata æquealta* AC *&* AG *ſunt ut longitudines planorum.* Tab. III. Fig. 35.

DEMONSTRATIO.

Tempus per AC æquale eſt tempori, quo motu uniformi percurritur AC dimidia celeritate in C acquiſita, & tempus per AB æquale eſt tempori, quo motu uniformi percurritur eadem AB celeritate dimidia in B acquiſita (§. 235). Sed celeritates iſtæ dimidiæ æquales ſunt (§. 250). Tempora igitur ſunt ut AC & AB (§. 26). *Quod erat unum.*

Eodem modo oſtenditur tempora deſcenſuum per AC & AG eſſe ut AC & AG. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 37.

Tab. III. Fig. 36. 257. *Si diameter circuli* AB *fuerit*

rit ad lineam horizontalem LM perpendicularis, grave ex quovis peripheriæ puncto D, E vel C eodem tempore deſcendit in B, quo nempe diametrum AB *percurrit.*

DEMONSTRATIO.

Demittatur ex C perpendicularis GC: erit tempus, quo GB percurritur, ad tempus, quo BC percurritur, ut BG ad BC (§. 256). Tempus vero, quo GB percurritur, eſt ad tempus, quo AB percurritur, in ratione ſubduplicata BG ad AB (§. 73), hoc eſt, cum ſit GB : BC = BC : AB (§. 315 *Geom.*) in ratione GB ad CB (§. 200 *Arithm.*). Ergo tempus, quo percurritur BC æquale eſt tempori, quo AB percurritur (§. 169 *Arithm.*) *Q. e. d.*

Tab. III. Fig. 39.

THEOREMA 38.

258 *Deſcenſus per ſemicycloidem DEF & per quemcunque eius arcum DG ſunt æquidiuturni.*

DEMONSTRATIO.

Concipiatur arcus DG in partes infiniteſimas reſolutus, quarum una ſit M*m*, & ſemicyclois DEF in numero totidem diviſa, quarum una E*e*: erit DG : DF = M*m*: E*e* (§. 163 *Arithm.*). Concipiamus porro ſemicycloidem DF in E & arcum DG in M ita dividi, ut ſit DF : DG = DE : DM = E*e* : M*m* (§. 156 *Arithm.*). Ducantur denique ſemiordinatæ TE, *te*, NM, *ne*, itemque chordæ in circulo genitore DB, DL, DO. Quoniam DF = 2AD, DE = 2DB, DM = 2DO & DG = 2DL (§. 142 *Analyſ. infinit.*), & DF : DE = DG : DM *per hypoth.* erit DA : DB = DL : DO (§. 172 *Arithm.*) & hinc $DA^2 : DB^2 = DL^2 : DO^2$ (§. 239 *Arithm.*). Quoniam vero DA : DB = DB : DT (§. 315 *Geom.*); erit $DA^2 : DB^2$ = DA : DT (§. 200. 238 *Arithm.*). Similiter quia DA : DL = DL : DH & DA : DO = DO : DN; erit $DA^2 : DL^2$ = DA : DH & $DA^2 : DO^2$ = DA : DN (§. cit. *Arithm.*), conſequenter $DL^2 : DO^2$ = DH : DN (§. 167 *Arithm.*). Quamobrem ulterius DA : DT = DH : DN (§. 156 *Arithm.*) & AT : DT = HN : DN (§. 183 *Arithm.*), adeoque AT : HN = DT : DN (§. 164 *Arithm.*) & $\sqrt{AT} : \sqrt{HN} = \sqrt{DT} : \sqrt{DN}$ (§. 239 *Arithm.*). Sed ut $\sqrt{AT}$ ad $\sqrt{HN}$ ita velocitas in E ad velocitatem in M (§. 73), ita etiam DB ad DO (§. 250), immo DE ad DM (§. 142 *Analyſ. infinit.* & §. 170 *Arithm.*). Ergo velocitas in E ad velocitatem in M ut E*e* ad M*m* *per demonſtr.* conſequenter cum tempus per E*e* ſit ut ſpatium E*e* per velocitatem in E diviſum & tempus per M*m* ut ſpatium M*m* per velocitatem in M diviſum (§. 16); tempus per E*e* æquale eſt tempori per M*m* (§. 139. 164 *Arithm.*) & hinc tempus per omnia E*e*, hoc eſt per DF, æquale

eſt

eſt tempori per omnia Mm, hoc eſt per DG. *Q. e. d.*

THEOREMA 39.

Tab. II. Fig. 40. 259. *Si plana DC & FH cum horizontalibus CK & HI æquales efficiunt angulos; ſimiliter inclinata ſunt.*

DEMONSTRATIO.

Cum plana inclinata dicantur, quando cum horizontalibus angulum efficiunt obliquum (§. 208); non alio modo quam per angulos, quos cum horizontalibus ſuis efficiunt, diſtingui poteſt eorum inclinatio (§. 23 *Arithm.*). Jam anguli æquales ſunt ſimiles (§. 165 *Geom.*), adeoque per eos planorum inclinatio diſtingui nequit (§. 22 *Arithm.*). Ergo plana, quæ cum ſuis horizontalibus angulos efficiunt æquales, ſimiliter inclinata ſunt. (§. *cit.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

260. Cum in planis ſimilibus DCK & IHI anguli C & H ſint æquales (§. 259) & demiſſis in horizontales CK & HI perpendicularibus DK & FI anguli K & I recti (§. 75 *Geom.*); erit CD : FH = DK : FI (§. 152 *Geom.*), hoc eſt, altitudines longitudinibus proportionales ſunt.

LEMMA.

261. *Poſitis proportionibus quotcunque ſimilibus, erit ſumma omnium terminorum primorum ad aggregatum omnium ſecundorum, ut ſumma omnium tertiorum ad ſummam omnium quartorum.*

DEMONSTRATIO.

Sit $a : ma = b : mb$
$c : mc = d : md$
$e : me = f : mf$ &c.

erit $a + c + e : ma + mc + me = b + d + f : mb + md + mf$.

Utrobique enim idem exponens eſt $1 : m$. Rationes itaque $a + c + e : ma + mc + me$ & $b + d + f : mb + md + mf$ ſimiles ſunt (§. Arithm.). *Q. e. d.*

THEOREMA 40.

262. *Si duo gravia per duo aut plura plana* AB, BC *&* EG, GH *ſimiliter inclinata & proportionalia incedant, ut nempe ſit* AB : BC = EG : GH; *tempora deſcenſus erunt in ſubduplicata ratione longitudinum* AB, *BC & DE, EF.* Tab. III. Fig. 40.

DEMONSTRATIO.

Sit AB : BC = $a : b$; erit ob AB : BC = EG : GH *per hypoth.* EG = ma & GH = mb. Cum plana AB & EG ſint ſimiliter inclinata, *per hypoth.* non aliter quam partes ejusdem plani percurruntur, adeoque tempus per AB eſt ad tempus per EG ut $\sqrt{a}$ ad $\sqrt{ma}$ (§. 73). Eodem modo oſtenditur, eſſe tempus per

per BC ad tempus per GH ut $\sqrt{b}$ ad $\sqrt{mb}$, & ita porro, ſi plura fuerint plana. Quare tempus per AB + BC eſt ad tempus per DE + EH ut $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ad $\sqrt{ma}+\sqrt{mb}$ (§. 261), hoc eſt, ut 1 : $\sqrt{m}$ (§. 172 *Arithm.*) ſeu ut $\sqrt{(a+b)}$ ad $\sqrt{(ma+mb)}$ (§. 170 *Arithm.*): quæ ratio ſubduplicata planorum AB + BC & EG + GH. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

263. Quoniam AB : EG = AP : EQ & CB : GH = BN : GO (§. 260), ſunt proportiones inter ſe ſimiles ob AB : EG = CB : GH *per hypoth.* erit AB + BC : EG + GH = AP + BN : EQ + GO (§. 261) = [ob AP + DN = DM + MK = DK & EQ + GO = FL + LI = FI, (§. 215 *Geom.*)] DK : FI (§. 157 *Arithm.*). Tempus igitur per plana ſimilia & proportionalia AB, BC & EG, GH cum ſit in ratione ſubduplicata AB + BC & EG + GH (§. 262); in ratione quoque ſubduplicata altitudinum DK & FI exiſtit.

COROLLARIUM 2.

264. Et quia ſuperficies curvæ AB & DE ſimiles ac ſimiliter poſitæ ex innumeris planis infinite parvis proportionalibus & ſimilibus conſtant; tempus per AB erit ad tempus per DE in ratione ſubduplicata AB ad DE. Tab. III. Fig. 41.

CAPUT VII.

De
ASCENSU GRAVIUM, CUM PERPENDICULARI, TUM IN PLANO INCLINATO.

THEOREMA 41.

265. *Si grave in medio non reſiſtente vi impreſſa ſive perpendiculariter, ſive per planum inclinatum aſcendit, motus ejus uniformiter retardatur.*

DEMONSTRATIO.

Dum grave vi impreſſa perpendiculariter aſcendit, a vi gravitatis abſolutæ ſecundum eandem perpendicularem (§. 173); dum vero per planum inclinatum aſcendit, a vi gravitatis reſpectivæ ſecundum directionem plani (§. 211) continuo deorſum impellitur. Motus adeo ejus continuo retardatur (§. 63). Quoniam vero vis gravitatis tam abſolutæ, quam reſpectivæ in omnibus locis, per quæ grave

ve

ve deſcendit, eadem (§. 64. & §. 211); æqualibus temporibus æquales celeritatis gradus eliduntur (§. 23), conſequenter motus uniformiter retardatur (§. 57). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

266. Grave igitur ſive perpendiculariter, ſive per declive in medio non reſiſtente aſcendens ſpatium percurrit ſubduplum ejus, quod eodem tempore in plano horizontali motu uniformi deſcriberet cum ea celeritate, quam ab initio motus habebat (§. 83).

COROLLARIUM 2.

267. Ejusdem igitur ſpatia æqualibus temporibus confecta ordine retrogrado decreſcunt ut numeri impares 7. 5. 3. 1. 0 (§. 84), adeoque aſcenſus tandem ſiſtitur, conſequenter ubi vis impreſſa fuerit abſumta, corpus vi gravitatis rurſus deſcendit.

COROLLARIUM 3.

268. Sunt adeo inverſe ut ſpatia iisdem temporibus ab alio gravi per eandem altitudinem cadente confecta. Sit enim e. gr. tempus in quatuor partes diviſum; momento primo grave A deſcendet per ſpatium 1, B aſcendet per 7; ſecundo A deſcendet per 3, B aſcendet per 5; tertio A deſcendet per 5, B aſcendet per 3; ultimo A deſcendet per 7, B aſcendet per 1 (§. 68. 267).

COROLLARIUM 4.

269. Unde grave vi impreſſa aſcendens ad eam altitudinem aſcendit, ex qua decidere deberet, ut eam cadendo celeritatem acquireret, qua ſurſum propellitur.

COROLLARIUM 5.

270. Quamobrem cadendo acquirit vim aſcendendi ad eam altitudinem, unde deciderat, in medio nimirum non reſiſtente.

PROBLEMA 36.

271. *Dato tempore, quo grave impetu impreſſo ad altitudinem datam aſcendit, determinare ſpatia ſingulis momentis confecta.*

RESOLUTIO.

Ponatur idem grave eodem tempore per eandem altitudinem deſcendiſſe & quærantur ſpatia ſingulis momentis percurſa (§. 80): hæc enim inverſo ordine ſumta eadem ſunt cum ſpatiis aſcenſus quæſitis (§. 268).

E. gr. Corpus perpendiculariter projectum intra 4 ſecunda aſcendit per intervallum 240 pedum. Quæruntur ſpatia ſingulis temporibus confecta? Quodſi corpus deſcendiſſet, primo minuto deſcendiſſet per 15 pedes, ſecundo per 45, tertio per 75, quarto per 105. Primo itaque aſcendit per 105, ſecundo per 75, tertio per 45, ultimo per 15 pedes.

PROBLEMA 37.

272. *Dato tempore, quo grave vi impreſſa ad datam altitudinem aſcendit, determinare tempus, quo ad altitudinem aliam datam pervenit.*

RESOLUTIO.

Quæratur tempus, quo grave per altitudinem deſideratam decidere poteſt (§. 81): eodem enim ad eandem aſcendet (§. 270).

Vide ſupra exemplum probl. 2. (§. 81).

THEOREMA 42.

273. *Vires corporum vivæ ſunt in ratione compoſita ex ſimplici maſſarum & duplicata celeritatum.*

DEMONSTRATIO.

Tab. III. Fig. 42 Corpus E cadendo per AB acquirit vim aſcendendi per AB & F cadendo per CD vim adipiſcitur, qua per altitudinem CD elevari poteſt (§. 270). Sunt adeo vires, quibus corpora E & F per altitudines AB & CD elevantur, in ratione compoſita altitudinum AB & CD atque maſſarum E & F (§. 222). Sed AB & CD ſunt in ratione duplicata velocitatum cadendo per iſtas altitudines acquiſitarum (§. 72). Ergo vires E & F ſunt in ratione compoſita ex ſimplici maſſarum & duplicata celeritatum. Sunt vero vires E & F vivæ, utpote non ſolo niſu, ſed impetu concepto agentes, adeoque cum motu actuali conjunctæ (§. 9). Conſtat igitur vires vivas eſſe in ratione compoſita ex ſimplici maſſarum & duplicata celeritatum. *Q.e.d.*

COROLLARIUM.

274. Quare ſi maſſæ fuerint æquales; vires ſunt in ratione duplicata celeritatum (§. 172 *Arithm.*).

SCHOLION.

275. *Errant, qui promiſcue vires omnes in ratione compoſita maſſarum & velocitatum eſſe ſtatuunt, propterea quod mortuæ in eadem deprehenduntur* (§. 226). *Errorem communem detexit & emendavit* (p) *Vir illuſtris* Leibnitius. *Aliam theorematis* Leibnitianæ *demonſtrationem invenit & per litteras mecum pro humanitate ſua communicavit celeberrimus* Bernoullius, *quam ipſis viri ingenioſiſſimi verbis huc transcribo.* Concipe, „inquit, corpus C moveri oblique in „elaſtrum L velocitate CL ut 2, angu„lo inclinationis CLP exiſtente 30 gr. „cujus nempe ſinus CP eſt ſemiſſis ra„dii CL. Suppono autem eam eſſe re„ſiſtentiam in elaſtro, ut ad illud ten„dendum requiratur præciſe unus velo„citatis gradus in illo corpore, ſi per„pendiculariter impingeret. Quid er„go jam fiet poſt incurſionem obliquam „corporis C in elaſtrum L? Quoniam „motus per CL componitur, ut notum „eſt, ex duobus collateralibus per CP & „PL (*vide* §. 199), & cum OP, ſecundum „quam Tab. III. Fig. 43.

(p) Act. Erudit. A. 1686 p. 161 & ſeqq.

„quam corpus directe impingit in ela-
„ſtrum L, exprimat dimidiam celerita-
„tem corporis per CL, conſumetur hic
„motus per CP, tenſo elaſtro (perinde
„enim eſſet ac ſi corpus C celeritate CP
„perpendiculariter incurreret in ela-
„ſtrum, quod per hypotheſin eam ce-
„leritatem deſtruere poteſt) remanente
„corporis celeritate & directione PL.
„Producta igitur PL in M, ita ut LM
„ſit $=$ PL $= \sqrt{3}$ (ponitur enim CL
„$=$ 2) & applicato in M alio ſimili ela-
„ſtro faciente cum LM angulum LMQ,
„cujus ſinus LQ $=$ CP $=$ 1; per ean-
„dem rationem manifeſtum eſt, corpus
„C poſt tenſionem elaſtri L tenſurum
„eſſe elaſtrum M amiſſo motu per LQ
„& ſervato motu per QM. Prolonga-
„ta itaque QM ad N, ut fiat MN $=$
„QM $= \sqrt{2}$, ibique ſubſtituto elaſtro
„ſimili tertio, conſtituente cum MN an-
„gulum MNR ſemirectum, quo ſcili-
„cet MR iterum fit $=$ CP $=$ 1; patet
„ſimiliter motum per MR totum im-
„pendi in tenſionem elaſtri N, corpore
„interim moveri pergente directione &
„celeritate RN $=$ 1. Denique ſi hac
„celeritate reſidua impingat perpendi-
„culariter in elaſtrum O, huic flectendo
„totam ſuam vim reliquam dabit; i-
„pſum itaque corpus ad quietem redi-
„getur. Hiſce ita præmiſſis, patet
„nunc potentiam corporis C tantam
„fuiſſe, ut per ſe ſolum tendere poſſit
„præciſe quatuor elaſtra talia, ad quæ
„ſingula ſeorſim tendenda requiritur di-
„midia velocitas corporis æqualis ipſi
„C, adeoque cum effectus illius quadru-
„plo major ſit, quam effectus hujus, evi-
„dens eſt quoque vim corporis veloci-
„tate 2 gr. quadruplam eſſe vis corporis
„ejusdem vel æqualis velocitate 1 gr.
„Haud abſimili modo demonſtrarem
„corpus C velocitate 3 gr. tendere poſ-
„ſe 9 elaſtra, ad quorum unum tenden-
„dum unus velocitatis gradus in eo cor-
„pore requiritur, & tandem in genere
„numerum elaſtrorum tenſorum ſem-
„per eſſe quadratum numeri graduum
„velocitatis. Unde igitur ſequetur, vi-
„res corporum æqualium eſſe in du-
„plicata ratione celeritatum. Q. e. d.

THEOREMA 43.

276. *Si grave vel perpendiculariter per* AD *vel per quamcunque ſuperficiem* FED *deſcendat & impetu concepto per aliam* DC *rurſus aſcendat, in punctis æquealtis, veluti in* G, H *&* Q, *eandem vim eandemque celeritatem habebit.* Tab. III. Fig. 39.

DEMONSTRATIO.

Quoniam grave vi cadendo per AD vel FD acquiſita ad C usque ex D per DGC aſcendit (§. 270); ubi ad G pervenit, ea ipſi ſupereſt vis, qua ad C usque aſcendere valet. Sed eandem vim adipiſcitur cadendo ex C per CG, itemque ex A ad H, nec non ex F in Q (§. *cit.*). In punctis adeo æque altis G, H & Q

ean-

eandem vim habet. *Quod erat unum.*

Sunt autem vires cadendo acquiſitæ in punctis G, H & Q ut quadrata celeritatum (§. 274). Quare cum vires æquales ſint, *per demonſtr.* celeritatum quoque quadrata, conſequenter ipſæ celeritates æquales ſunt. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

277. Quodſi adeo grave per ſuperficiem quamcunque FED deſcendat & per aliam ſimilem ac æqualem ſimiliterque poſitam DGC rurſus aſcendat; idem omnino eſt, ac ſi eadem linea eadem velocitate ſingulis ſui partibus bis percurreretur (§. 276). Unde tempora deſcenſus & aſcenſus per æqualia ſpatia æqualia ſunt (§. 23).

CAPUT VIII.
DE
MOTU PENDULORUM.

DEFINITIO 34.

278. *Pendulum* eſt grave quodlibet, ita ſuſpenſum, ut circa punctum aliquod vi gravitatis aſcenſus & deſcenſus reciprocos continuare poſſit. Aſcenſus ille & deſcenſus reciprocus *Oſcillatio* penduli vocatur.

DEFINITIO 35.

Tab. III. Fig. 44. 279 *Pendulum ſimplex* eſt quod conſtat unico pondere inſtar puncti conſiderato & linea inflexili & gravitatis experte circa centrum C convertibili AC appenſo.

DEFINITIO 36.

280. *Pendulum compoſitum* eſt quod pluribus ponderibus conſtat, eandem diſtantiam tum inter ſe, tum a centro, circa quod oſcillationes fiunt, conſtanter ſervantibus.

DEFINITIO 37.

281. *Axis oſcillationis* eſt recta lineæ horizontali apparenti parallela tranſiens per centrum, circa quod pendulum oſcillatur.

THEOREMA 44.

282. *Pendulum in B adductum per arcum circuli BA deſcendit & ad punctum æque altum D per arcum æqualem aſcendit, inde denuo in A deſcendit ac ad B aſcendit, ſicque reciprocos aſcenſus & deſcenſus continuat.*

DEMONSTRATIO.

Sit HI linea horizontalis & BD ipſi

ipſi parallela. Si globus A, quem inſtar puncti conſideramus, cum ſolius gravitatis ratio hic habeatur (§. 279), in B adducitur, linea directionis BH, utpote ex centro gravitatis B ad lineam horizontalem HI perpendicularis, cadit extra baſin, quæ eſt in puncto C. Globus igitur in hoc ſitu quieſcere nequit, ſed deſcendit (§. 180). Cum autem filo BC retineatur, ne perpendiculariter per BH deſcendere poſſit, per arcum BA deſcendit (§. 127 *Geom.*). Ubi centrum gravitatis ad imum pervenit, ea vi globus inſtruitur, quæ cadendo per KA acquiritur (§. 250) adeoque ipſum ad altitudinem æqualem elevare poteſt (§. 270). Quare cum filum impediat, ne juxta tangentem AI progrediatur, per arcum AD ipſi AB æqualem (§ 276 *Geom.*) aſcendit. Vi igitur, quam cadendo acquiſiverat, omni abſorpta per eundem arcum AD relabitur vi gravitatis aſcenſurus ex A in B & ita porro. *Q. e. d.*

SHOLION.

283. *Experientia theorematì non contradicit, etſi ſine fine continuatæ oſcillationes ei parum reſpondeant. Aeris enim reſiſtentia & frictio circa centrum C partem aliquam ejus vis abſumunt, quæ cadendo acquiſita fuerat: unde fieri nequit, ut ad eandem præciſe altitudinem elevetur, ex qua delapſum. Quoniam itaque aſcenſus continua capit decrementa, oſcillatio tandem ſiſtitur & pendulum in ſitu CA, in qua centrum gravitatis infimum occupat locum, quieſcit.*

THEOREMA 45.

284. *Si pendulum ſimplex inter duas ſemicycloides CB & CD ſuſpendatur, quarum circuli generatores habent diametrum CF dimidiæ longitudini fili CA æqualem, ita ut filum oſcillantis iis circumplicetur; oſcillationes omnes utcunque inæquales erunt iſochronæ ſeu æquidiuturnæ in medio non reſiſtente.* Tab. IV. Fig. 45.

DEMONSTRATIO.

Cum enim penduli filum CE ſemicycloidi BC circumplicetur, a centro gravitatis globi E, qui inſtar puncti conſideratur (§. 279), ex evolutione cyclois BEAD deſcribitur (§. 267 *Analyſ. infinit.*). Sed omnes deſcenſus & aſcenſus in cycloide ſunt æquidiuturni (§. 258). Ergo oſcillationes penduli ſunt æquidiuturnæ (§. 278). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

285. Quodſi longitudine penduli CA deſcribatur circulus ex centro C, cum portio cycloidis prope verticem A eodem fere motu deſcribatur, arcus exiguus circuli cum cycloide propemodum coincidit. Unde in arcubus circuli exiguis oſcillationes pendulorum ſunt ad ſenſum iſochronæ, utcunque in ſe inæquales.

COROLLARIUM 2.

286. Quo longiora itaque ſunt pen-

 dula

dula in arcubus circuli oſcillantia; eo majores oſcillationes iſochronæ ſunt.

SCHOLION 1.

287. *Experientia non abludit. Quodſi enim duo fuerint pendula ejusdem longitudinis, quorum unum in majorem, alterum in minorem arcum, utrumque tamen in arcum non nimis magnum, oſcillando excurrat; in oſcillationibus centum vix aliquam differentiam notabis.*

SCHOLION 2.

288. *Penduli inter duas ſemicycloides oſcillantis tam theoria, quam praxis debetur illuſtri* Hugenio (q).

PROBLEMA 38.

289. *Determinare durationem oſcillationis in Cycloide.*

RESOLUTIO.

Tab. III. Fig. 45. Sit diameter circuli genitoris ſeu altitudo totius Cycloidis AD $= a$; HB altitudo, ex qua deſcendit pendulum per arcum illius QB $= r$, HP $= x$, erit PB $= 2r - x$. Sit porro tempus per QB $= t$ & ſuper HB deſcribatur ſemicirculus HNB ducanturque PM atque pm infinite propinquæ ad HB perpendiculares: erit PN $= \sqrt{(2rx - xx)}$, Pp = No = Rm = dx, & celeritas in P, adeoque & in N (§ 250), acquiſita $= \sqrt{x}$ (§. 73), conſequenter, cum infiniteſima Mm motu uniformi percurratur, tempus per Mm = dt = Mm : $\sqrt{x}$ (§. 16). Conſtat vero (§. 117 *Analyſ. infinit.*) eſſe Mm : mR = BS : BP & AB : BS = BS : BP (§. 315 *Geom*). Eſt itaque BS ad BP in ratione ſubduplicata AB ad BP, hoc eſt, ut $\sqrt{}$ AB ad $\sqrt{}$ PB (§. 200 *Arithm.*), conſequenter Mm : mR = $\sqrt{}$ AB : $\sqrt{}$ PB (§. 156 *Arithm.*). Unde Mm = mR. $\sqrt{}$ AB : $\sqrt{}$ PB & $dt = dx\sqrt{a} : \sqrt{(2rx - x^2)} = 2rdx\sqrt{a} : 2r\sqrt{(2rx - x^2)}$. Eſt vero $rdx : \sqrt{(2rx - xx)}$ = Nn (§. 137 *Analyſ infinit.*). Ergo $dt = 2\sqrt{a}$. Nn : $2r$ & $\int dt = \int$Nn. $2\sqrt{a} : 2r$. Jam quando $\int dt$ ſive t tempus denotat, quo grave per arcum cycloidis BD deſcendit, $\int$Nn in ſemiperipheriam circuli degenerat. Quare ut $2r$ ſeu diameter circuli ad ſemiperipheriam ejus, ita $2\sqrt{a}$ ad tempus per arcum BQ, conſequenter cum $2\sqrt{a} = 2a : \sqrt{a}$ denotet tempus deſcenſus perpendicularis per BA (§. 16. 78); patet tandem (§. 157 *Arithm.*) ſequens.

Theorema: Tempus integræ oſcillationis per arcum quemcunque Cycloidis GDQ eſt ad tempus deſcenſus perpendicularis per diametrum circuli genitoris AD ut peripheria circuli ad diametrum.

COROLLARIUM.

290. Hinc denuo conſequitur, quod jam

(q) Vide Horologium Oſcillatorium ſive demonſtrationes de motu pendulorum ad horologia aptato geometricas.

jam ſuperius aliunde demonſtratum (§. 258), tempus deſcenſus per quoslibet arcus cycloidis eſſe æquidiuturnum, oſcillationes item in omnibus arcubus cycloidis eſſe æquidiuturnas.

THEOREMA 46.

291. *Gravitatis actio minor eſt in iis Terræ regionibus, ubi oſcillationes ejusdem penduli ſunt tardiores; major vero, ubi eædem celeriores.*

DEMONSTRATIO.

Tempus oſcillationum in cycloide eſt ad tempus deſcenſus perpendicularis per diametrum circuli genitoris ut peripheria circuli ad diametrum (§. 289), adeoque in ratione conſtante (§. 391 *Arithm.*). Quare ſi oſcillatio ejusdem penduli fit tardior, deſcenſus quoque gravium perpendicularis tardior evadit: ſi ille redditur celerior; hic quoque celerior ſit neceſſe eſt. In primo igitur caſu minus ſpatium cadendo conficit grave, quam in altero, adeoque in illo motus minori vi acceleratur, quam in altero, conſequenter gravitas minor eſt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

292. Cum adeo experientia docuerit, oſcillationes ejusdem penduli eſſe tardiores prope æquatorem, quam in remotioribus verſus polum regionibus; gravitas corporum minor eſt verſus æquatorem, quam verſus polos.

SCHOLION.

293. *Obſervavit hoc* Richerius *itinere in inſulam* Cayennæ, *quæ ab æquatore 5 fere gradibus diſtat, facto, ubi pendulum Pariſienſe ſingulis minutis ſecundis oſcillans, cujus longitudo erat pedum 3, linearum $8\frac{3}{5}$, minuenda erat linea una cum quadrante, ut adhuc oſcillationes ſingulis minutis ſecundis abſolveret* (r).

THEOREMA 47.

294. *Si duo pendula CA & EF in arcus ſimiles DAB & GFH excurrant; tempora oſcillationum ſunt in ratione ſubduplicata longitudinum CA & EF.* Tab. III. Fig. 46.

DEMONSTRATIO.

Tempus deſcenſus per DA eſt ad tempus deſcenſus per GF in ratione ſubduplicata DA ad GF (§. 264). Sed tempora iſta ſunt oſcillationum per arcus DB & GH dimidia. Ergo & tempora oſcillationum ſunt in ratione ſubduplicata arcuum DA & GF (§. 170 *Arithm.*), conſequenter & radiorum CA & EF, quibus arcus ſimiles DA & GF *per hypoth.* deſcribuntur (§. 390 *Geom.* & §. 163 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

295. Longitudines igitur pendulorum

(r) vid. Acta Eruditorum A. 1695 p. 30.

rum in arcus ſimiles DA & GF excurrentium ſunt in ratione duplicata temporum, quibus ſingulæ oſcillationes conficiuntur.

THEOREMA 48.

296. *Numeri oſcillationum iſochronarum a duobus pendulis eodem tempore confectarum ſunt reciproce ut tempora, quibus ſingulæ oſcillationes fiunt.*

DEMONSTRATIO.

Sit intra tempus *a* numerus oſcillationum penduli unius = *b* alterius = *mb*. Cum oſcillationes ſingulæ ejusdem penduli ſupponantur æquidiuturnæ, erit tempus, quo pendulum primum oſcillationem unam conficit, = $a : b$, & tempus, quo alterum oſcillationem unam abſolvit, = $a : mb$ (§. 272 Arithm.). Sunt ergo tempora, quibus ſingulæ oſcillationes fiunt, ut $a : b$ ad $a : mb$, hoc eſt, ut *amb* ad *ab* (§. 217. 170 *Arithm*) ſeu ut *mb* ad *b* (§. 172 *Arithm.*). Sed ut *mb* ad *b* ita eſt numerus oſcillationum penduli ſecundi ad primum. Sunt itaque numeri oſcillationum eodem tempore confectarum reciproce ut tempora ſingularum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

297. Longitudines igitur pendulorum in arcus ſimiles, eosque parvos excurrentium ſunt in ratione duplicata numerorum oſcillationum eodem tempore confectarum, ſed reciproce ſumtorum.

THEOREMA 49.

298. *Longitudines pendulorum intra cycloides ſuſpenſorum ſunt in ratione duplicata temporum, quibus ſingulæ oſcillationes fiunt.*

DEMONSTRATIO.

Ut diameter circuli ad peripheriam ita tempus deſcenſus per altitudinem cycloidis ſeu dimidiam penduli longitudinem ad tempus unius oſcillationis §. 289). Sunt igitur tempora deſcenſus per duorum pendulorum dimidias longitudines ut tempora duarum oſcillationum ab iisdem confectarum (§. 156. 164 *Arithm.*). Sed altitudines deſcenſus perpendicularis ſunt in ratione duplicata temporum (§. 72). Ergo etiam altitudines, hoc eſt, pendulorum longitudines dimidiæ, conſequenter & integræ (§. 170 *Arithm.*), ſunt in ratione duplicata temporum, quibus oſcillationes per cycloides abſolvuntur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

299. Sunt igitur & in ratione duplicata numerorum oſcillationum eodem tempore confectarum, ſed reciproce ſumtorum (§. 296).

CO-

COROLLARIUM 2.

300. Tempora oſcillationum in cycloidibus diverſis ſunt in ratione ſubduplicata longitudinis pendulorum.

PROBLEMA 39.

301. *Data longitudine alicujus penduli, una cum numero oſcillationum in tempore dato confectarum, invenire longitudinem alterius penduli, quod eodem tempore datum oſcillationum numerum conficiat.*

RESOLUTIO.

Quæratur ad quadratum numeri oſcillationum, quas in tempore dato abſolvere debet pendulum quæſitum, ad quadratum numeri oſcillationum penduli dati & longitudinem penduli dati numerus quartus proportionalis; erit is longitudo penduli quæſita (§. 296. 299).

E. gr. Juxta *Hugenium* (r) longitudo penduli, cujus oſcillationes ſingulæ ſingulis minutis ſecundis abſolvuntur, eſt pedum Pariſinorum 3 & linearum $8\frac{1}{2}$. Quæritur pendulum, quod intra minutum primum 200 oſcillationes conficiat. Cum numerus oſcillationum penduli dati ſit intra minutum primum 60 & ejus longitudo 881 linearum dimidiarum (§. 24 *Geom.*); erit longitudo penduli quæſiti $= 3600.881 : 40000 = 79\frac{29}{100} = 2'' 5''' \frac{79}{100}$.

PROBLEMA 40.

302. *Dato numero oſcillationum, quæ a pendulo datæ longitudinis in dato tempore abſolvuntur, invenire numerum oſcillationum ab alio pendulo datæ itidem longitudinis in dato tempore conficiendarum.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur numerus quartus proportionalis ad longitudines pendulorum inverſe ſumptas & quadratum numeri oſcillationum quæſiti (§. 299).
2. Quare ſi inde extrahatur radix, habebitur numerus oſcillationum quæſitus.

E. gr. Quæritur, quot oſcillationes intra minutum primum abſolvat pendulum, cujus longitudo eſt 7929 iſtiusmodi partium, qualium pendulum ſingulis minutis ſecundis oſcillans eſt 88100. Reperietur numerus oſcillationum $= \sqrt{(88100.3600 : 7929)} = 200$.

THEOREMA 50.

303. *Celeritas penduli in puncto infimo B eſt ad celeritatem cadendo per duplam longitudinem AB acquiſitam ut chorda arcus, quem deſcribit,* EB *ad diametrum circuli* AB. Tab. III. Fig. 36.

DEMONSTRATIO.

Celeritas per arcum EB acquiſita æquatur celeritati per PB acquiſi-

(r) in Horolog. Oſcillat. part. 4 prop. 25 f. 152.

quiſitæ (§. 255). Eſt ergo ad celeritatem per AB acquiſitam in ratione ſubduplicata BP ad BA (§. 73). Sed BA : BE = BE : BP (§. 315 *Geom.*) adeoque BA ad BE eſt ratio ſubduplicata BA ad BP (§. 200 *Arithm.*). Ergo celeritas per arcum BE eſt ad celeritatem per BA acquiſitam ut chorda BC ad BA (§. 156 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

304. Cum adeo ſit ut celeritas per arcum EB acquiſita ad celeritatem per AB acquiſitam ut chorda EB ad AB & ut celeritas per arcum DB acquiſita ad celeritatem per AB acquiſitam, ut chorda DB ad AB (§. 303); celeritates per arcus EB & DB acquiſitæ ſunt ut chordæ cognomines (§. 168 *Arithm.*).

SCHOLION.

305. *Quæ hactenus de pendulorum motu demonſtrata ſunt, plerumque tantum ſuccedunt, ſi filum, ex quo pondus ſuſpenditur, gravitate careat & totius ponderis gravitas in punctum individuum ſit coacta: quæ nempe ſuperius ſuppoſuimus. Quamobrem in praxi filo utendum eſt tenui & globo exiguo ſed ex materia quantumvis gravi conflato. Quod ſi vero filum aut virga ſit gravis & pondus magnum; leges modo demonſtratæ valde turbantur: neque enim pendulum amplius ſimplex eſt, ſed compoſitum, perinde nimirum eſt, ac ſi plura pondera eidem virgæ inflexili & gravitatis experti in diverſis locis applicarentur, quæ ſingula diverſa celeritate moventur. Enimvero non ſufficit, quemadmodum ſupra in æquiponderantibus, invenire centrum gravitatis commune & in eo applicare ponderum ſummam, ut verus penduli motus exploretur; ſed alia ratione determinandum eſt illud punctum, in quo colligenda eſt omnis penduli gravitas, ut eadem præſtet cum compoſito. Eum igitur in finem addimus caput ſequens.*

CAPUT IX.
De
CENTRO OSCILLATIONIS.

DEFINITIO 38.

306. *Centrum oſcillationis* eſt punctum, in quo ſi colligatur penduli compoſiti totius gravitas, oſcillationes ſingulæ eodem adhuc tempore conficiuntur, quo ante.

COROLLARIUM.

307. Ejus itaque a puncto ſuſpenſionis diſtantia æquatur longitudini penduli ſimplicis, cujus oſcillationes ſunt cum oſcillationibus compoſiti iſochronæ.

DEFINITIO 39.

308. *Pes horarius* eſt longitudo penduli ſimplicis, quod ſingulas oſcillationes conficit ſingulis minutis ſecundis.

THEO-

THEOREMA 51.

Tab. IV. Fig. 48. 309. *Si plura pondera D, F, H, B, quorum gravitas in punctis D, F, H, B concipitur collecta, in virga inflexili AB eandem inter ſe & a puncto ſuſpenſionis A diſtantiam conſtanter conſervent & circa A oſcillationes ſuas perficiat pendulum hoc modo compoſitum; prodibit diſtantia centri oſcillationis O a puncto ſuſpenſionis OA, ſi ſingula pondera in quadrata diſtantiarum ducantur & aggregatum per ſummam momentorum eorundem ponderum dividatur.*

DEMONSTRATIO.

Quodſi pendulum celeritate ſemel acquiſita agitaretur, æqualibus temporibus pondera D, F, H, B conſtanter deſcriberent arcus *d*D, *f*F, *g*H & *b*B diſtantiis a puncto ſuſpenſionis A*d*, A*f*, A*g*, A*b* proportionales. Patet adeo, celeritatem ſemel acquiſitam deſcenſum ponderum non alterare. Sola igitur ſpectanda eſt vis gravitatis, quæ incrementa celeritatis efficit. Concipiamus itaque punctum O eſſe centrum oſcillationis. Quando itaque pendulum percurrit angulum infinite parvum BAC; ſumma ponderum in centro oſcillationis O applicata arcum OP deſcribet (§. 306). Quare cum vis gravitatis eodem modo agat in pondera ſingula D, F, H, B, quo in ſummam eorundem O, niſi retinaculum AB obſtaret; ſingula per ſpatiola ipſi OP æqualia transferrentur, quia motus in inſtanti eſt uniformis, adeoque celeritates ſpatiolis proportionales (§. 28). Quare ſi KN per P ipſi DB parallela ducatur, DK, FL, HI, BN (cum arcus infinite parvi a chordis eorum non differant) exponent celeritates a ponderibus D, F, H & B in inſtanti acquirendas, ſi libere deſcenderent. Gravitas vero cum ſolo niſu agat (§. 4), vis mortua eſt (§. 9); conſequenter vires motuum acceleratrices ſunt in ratione compoſita ponderum & celeritatum (§. 226). Deperditur itaque in E vis ut D.EK & in F vis ut F.GL: contra vero in H accreſcit vis ut H.MI & in B vis ut B.NC, ſeu quod perinde eſt, ob decrementum virium in D & F vi in B aliquid accreſcit, ſed incrementum in H accremento in B rurſus aliquid detrahit. Cum autem ſit vis in D ad vim in B uti AB ad AD; vis in F ad vim in B uti AB ad AF; vis denique in H ad vim in B uti AB ad HB (§. 115); reperiuntur accrementa virium in B ut (D.EK.AD) : AB & (F.GL.AF) : AB, quod vero inde rurſus detrahitur ut (H.MI.AH) : AB. Habemus adeo

$$B.NC = [D.EK.AD + F.GL.AF - H.MI.AH] : AB.$$

& hinc

$$B.AB.NC + H.MI.AH = D.EK.AD + F.GL.AF$$

Jam cum GL ipſi EK & MI ipſi NC ſit parallela, ob rectos E, G, I, C (§. 37 *Analyſ. infinit.*) & EG = DF, GP = FO, PI = HO, IC = BH; erunt EK & GL ipſis OD & OF, MI & NC ipſis OH & OB proportionales (§. 253 *Geom.*), conſequenter ſubſtitutis pro EK, GL, MI, NC proportionalibus OD, OF, OH, OB,

$$B.AB.OB + H.OH.AH = D.OD.AD + F.OF.AF.$$

Denique cum ſit

$$H.AH^2 = H.HA.HO + H.HA.AO$$
$$B.AB^2 = B.BA.BO + B.BA.AO$$
$$D.OA.DA = D.AD.AD + D.AD.OD$$
$$F.OA.FA = F.FA.FA + F.OF.FA;$$

Si utrinque addantur in æquatione inventa $D.DA^2 + F.FA^2 + H.HO.HA + B.AO.BA$. prodibit

$$D.DA^2 + F.FA^2 + H.AH^2 + B.AB^2 = [D.DA + F.FA + H.HA + B.BA]\, AO$$

Conſequenter

$$AO = \frac{D.DA^2 + F.FA^2 + H.HA^2 + B.BA^2}{D.DA + F.FA + H.HA + B.BA}$$

Q. e. d.

COROLLARIUM 1.

310. Quodſi diſtantia centri gravitatis communis omnium ponderum a puncto ſuſpenſionis A fuerit AR; erit $D.DA + F.FA + H.HA + B.BA = [D + F + H + B]\, AR$ (§. 115) conſequenter

$$AO = \frac{D.AD^2 + F.FA^2 + H.HA^2 + B.BA^2}{[D + F + H + B]\, AR}$$

COROLLARIUM 2.

311. Si pondera omnia fuerint æqualia, nempe $D = F = H = B$ &c. $= P$ & numerus ponderum n; erit

$$AO = \frac{P.AD^2 + P.FA^2 + P.HA^2 + P.BA^2 \ \&c.}{nP.AR}$$

hoc eſt,

$$AO = \frac{AD^2 + FA^2 + HA^2 + BA^2 \ \&c.}{nAR}$$

COROLLARIUM 3.

312. Quoniam D.AD eſt momentum ponderis D (§. 115); ſi momenta conſiderentur ut pondera ad rectam AB applicata; centrum oſcillationis coincidet cum centro gravitatis communi horum ponderum (§. 118) adeoque momentis in ponderum locum ſurrogatis eodem modo determinatur centrum oſcillationis, quo ſupra centrum gravitatis commune inveſtigavimus.

COROLLARIUM 4.

313. Si figura plana circa axem RI ita oſcilletur, ut is ſemper maneat in Tab. I. Fig. 9.
plano oſcillante ſeu (quod perinde eſt) ordi-

ordinatis figuræ MN conſtanter ſit parallelus; ſingulæ ponduſculi cujuscunque MNnm partes ab axe oſcillationis RI æqualiter diſtant (§. 78 *Geom.*), nec aliter oſcillatur e. gr. particula G ac ſi in puncto L ſuſpenderetur. Eſt adeo momentum integri ponduſculi MNnm (ſi fuerit AP $=$ LG $= x$, MN $= 2y$, P$p = dx$,) $= 2yxdx$, conſequenter diſtantia centri oſcillationis ab axe $= 2\int yx^2dx : 2\int yxdx$ (§. 119) $= \int yx^2dx : \int yxdx$. Quodſi adeo ex æquatione ſpeciali ad figuram aliquam datam valor ipſius y ſubſtituatur & elementa debita ratione integrentur; prodibit diſtantia centri oſcillationis ab axe in terminis ordinariis.

PROBLEMA 41.

314. *Determinare centrum oſcillationis in linea recta* AB. Tab. ... Fig.

RESOLUTIO.

Sit AB $= a$, AD $= x$, erit particula infinite parva DP $= dx$, momentum hujus ponduſculi xdx, conſequenter diſtantia centri oſcillationis in parte AD a puncto ſuſpenſionis A $= \int x^2dx : \int xdx = \frac{1}{3}x^3 : \frac{1}{2}x^2 = \frac{2}{3}x$. Quodſi pro x ſubſtituatur a, prodibit diſtantia centri oſcillationis in recta integra AB $= \frac{2}{3}a$.

SCHOLION.

315. *Hac ratione definitur centrum oſcillationis fili ferrei circa alterum extremum oſcillantis.*

PROBLEMA 42.

316. *Determinare centrum oſcillationis rectanguli* RIHS *in puncto medio A lateris RI ſuſpenſi & circa axem* RI *oſcillantis.* Tab. I. Fig. 9.

RESOLUTIO.

Si fuerit RI $=$ SH $= a$, AP $= x$; erit P$p = dx$ & elementum areæ, conſequenter unum ponduſculum $= adx$ & momentum ejus $axdx$ (§. 115). Quare (§. 313) $\int ax^2dx : \int axdx = \frac{1}{3}ax^3 : \frac{1}{2}ax^2 = \frac{2}{3}x$ indefinite exprimit diſtantiam centri oſcillationis ab axe oſcillationis in ſegmento RCDI. Quodſi igitur pro x ſubſtituatur integri rectanguli altitudo RS $= b$; prodibit diſtantia centri oſcillationis ab axe $= \frac{2}{3}b$.

PROBLEMA 43.

317. *Determinare centrum oſcillationis trianguli æquicruri* SAH *circa axem RI baſi SH parallelum oſcillantis.* Tab. I. Fig. 9.

RESOLUTIO.

Sit altitudo AE $= a$, AP $= x$, EH $= \frac{1}{2}b$, PN $= y$, erit (§. 253 *Geom.*)

$$\begin{array}{c} AP : PN = AE : EH \\ x : y = a : \tfrac{1}{2}b \\ \hline ay = \tfrac{1}{2}bx \\ \hline y = bx : 2a \end{array}$$

Hinc $\int yx^2dx = \int \frac{bx^3dx}{2a} = \frac{bx^4}{8a}$

$\int yxdx = \int \frac{bx^2dx}{2a} = \frac{bx^3}{6a}$

& $\frac{\int yx^2dx}{\int yxdx} = \frac{6abx^4}{8abx^3} = \frac{6}{8}x = \frac{3}{4}x.$

Quodſi pro x ſubſtituatur altitudo integra AE $= a$, prodibit diſtantia centri oſcillationis in triangulo æquicruro ASH a vertice A $= \frac{3}{4}a = \frac{3}{4}$ AE.

PROBLEMA 44.

Tab. I. Fig. 9. 318. *Determinare centrum oſcillationis trianguli æquicruri* SAH *circa baſin* SH *oſcillantis.*

RESOLUTIO.

Sint omnia, ut in problemate præcedente, erit PE $= a - x$. Unde

$\int yx^2dx = \int \frac{bxdx}{2a}(a-x)^2 = \int (\frac{1}{2}abxdx - bx^2dx + \frac{bx^3dx}{2a}) = \frac{1}{4}abx^2 - \frac{1}{3}bx^3 + \frac{bx^4}{8a}$

$\int yxdx = \int \frac{bxdx}{2a}(a-x) = \int (\frac{1}{2}bxdx - \frac{bx^2dx}{2a}) = \frac{1}{4}bx^2 - \frac{bx^3}{6a}$

&

$\frac{\int yx^2dx}{\int yxdx} = (\frac{1}{4}abx^2 - \frac{1}{3}bx^3 + \frac{bx^4}{8a}) : (\frac{1}{4}bx^2 - \frac{bx^3}{6a}) = \frac{(24a^2bx^2 - 32abx^3 + 12bx^4)}{96a} : \frac{(6abx^2 - 4b[x^3])}{24a}$

$= \frac{6a^2bx^2 - 16abx^3 + 6bx^4}{12abx^2 - 8abx^3} = \frac{6a^2 - 8ax + 3[x^2]}{6a - 4x}$

Habemus adeo diſtantiam centri oſcillationis ab axe in ſegmento SZVH.

Quodſi pro x ſubſtituatur a, prodibit diſtantia centri oſcillationis in integro triangulo SAH $= (6a^2 - 8a^2 + 3a^2) : (6a - 4a) = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}$ AE.

PROBLEMA 45.

319. *Determinare centrum oſcillationis in triangulo æquicruro* SAH *quod filo inflexili & gravitatis experte* Ah *ſuſpenſum circa axem* ri *baſi SH parallelum oſcillatur.* T[ab.] I. Fi[g.] 9.

RESOLUTIO.

Sit A$h = c$, reliqua ſint ut ſupra (§. 317): erit P$h = c + x$. Unde

$\int yx^2dx = \int (c+x)^2 \frac{bxdx}{2a} = \int (\frac{bc^2xdx}{2a} + \frac{bcx^2dx}{a} + \frac{bx^3dx}{2a}) = \frac{bc^2x^2}{4a} + \frac{bcx^3}{3a} + \frac{bx^4}{8a} = \frac{24bc^2x^2 + 32bcx^3 + 12bx^4}{96a}$

$= \frac{6bc^2x^2 + 8bcx^3 + 3bx^4}{24a}$

$\int yxdx = \int (c+x)\frac{bxdx}{2a} = \int (\frac{bcxdx}{2a} + \frac{bx^2dx}{2a}) = \frac{bcx^2}{4a} + \frac{bx^3}{6a} = \frac{6bcx^2 + 4bx^3}{24a}$

$= 3bcx^2$

$= \frac{3bcx^2 + 2bx^3}{12a}$.

$\frac{\int yx^2dx}{\int yxdx} = \frac{(6bc^2x^2 + 8bcx^3 + 3bx^4)}{24a} : \frac{(3bcx^2+2bx^3)}{12a} = \frac{6bc^2x^2+8bcx^3+3bx^4}{6bcx^2+4bx^3}$
$= \frac{6c^2+8cx+3x^2}{6c+4x}$ qui eſt valor diſtantiæ centri oſcillationis ab axe ri in ſegmento trianguli AZV.

Quodſi pro x ſubſtituatur trianguli altitudo AE $= a$, prodibit diſtantia centri oſcillationis ab axe oſcillationis ri in triangulo integro SAH $(6c^2+8ac+3a^2):(6c+4a) = [c^2 + (\frac{8}{3}c+a)\frac{1}{2}a]:(6c+4a)$.

SCHOLION.

320. *Ex unico hoc exemplo intelligitur, quid in caſu ſimili aliarum figurarum factu opus ſit.*

PROBLEMA 46.

321. *Determinare centrum oſcillationis in infinitis parabolis & curvis agnatis circa axem RI baſi SH parallelum oſcillantes.*

Quoniam (§. 120) $\int xydx = \int a^{n:r}x^{m+r:r}dx = \frac{r\, a^{n:r}x^{m+2r:r}}{m+2r}$
erit $\int x^2ydx = \int a^{n:r}x^{m+2r:r}dx = \frac{r\, a^{n:r}x^{m+3r:r}}{m+3r}$
& $\frac{\int x^2ydx}{\int xydx} = \frac{(m+2r)a^{n:r}x^{m+3r:r}}{(m+3r)a^{n:r}x^{m+2r:r}} = \frac{m+2r}{m+3r}x$.

E. gr. In parabola Apolloniana $m = 1$, $r = 2$. Ergo diſtantia centri oſcillationis ab axe $= \frac{5}{7}$ AE.

In paraboloide cubicali $m = 1$, $r = 3$. Ergo diſtantia centri oſcillationis ab axe $= \frac{7}{10}$ AE.

In paraboloide biquadratrico $m = 1$, $r = 4$. Ergo diſtantia centri oſcillationis ab axe $= \frac{9}{13}$ AE.

In curva, ad quam $ax^2 = y^3$, $m = 2$, $r = 3$. Ergo diſtantia centri oſcillationis ab axe $= \frac{8}{11}$ AE.

In curva, ad quam $a^2x^3 = y^5$, $m = 3$, $r = 5$. Ergo diſtantia centri oſcillationis ab axe $= \frac{13}{18}$ AE.

SCHOLION.

322. *In ſolidis & figuris planis, quæ in latus agitantur, hoc eſt circa axem oſcillationis adplanum figuræ normalem, centrum oſcillationis difficilius invenitur, quia non omnes ponduſculi partes ob inæqualem a puncto ſuſpenſionis diſtantiam eadem celeritate moventur: adeoque quantitates* xydx *&* x²ydx *difficilius eruuntur: quemadmodum videre eſt apud* Hugenium (t). *Reperit is in hoc caſu diſtantiam centri oſcillationis ab axe in circulo* $\frac{3}{4}$ *diametri; in rectangulo ab aliquo angulorum ſuſpenſo* $\frac{2}{3}$ *diagonalis; in parabola ex vertice ſuſpenſa* $\frac{5}{7}$ *axis &* $\frac{1}{3}$ *parametri, ex puncto media*

(t) Horolog. oſcillatorii part. 4. f. 91 & ſeqq.

diæ baſis ſuſpenſa $\frac{4}{7}$ axis & $\frac{1}{2}$ parametri; in ſectore circuli $\frac{3}{4}$ rectæ, quæ ſit ad radium ut arcus ad ſubtenſam; in cono $\frac{4}{5}$ axis & $\frac{1}{5}$ tertiæ proportionalis ad axem & baſis ſemidiametrum; in ſphæra ex puncto in ſuperficie ſuſpenſa $\frac{7}{10}$ diametri; in eadem ex puncto extra ſphæram (ut vulgo in pendulis fieri ſolet) ſuſpenſa $\frac{2}{5}$ tertiæ proportionalis ad compoſitam ex ſemidiametro & longitudine fili atque ſemidiametrum ipſam; in cylindro $\frac{2}{3}$ altitudinis & $\frac{1}{2}$ rectæ, quæ ſit ad ſemidiametrum baſis ut hæc ad altitudinem (u).

PROBLEMA 47.

323. *Determinare quantitatem pedis horarii.*

RESOLUTIO.

1. Horologium pendulo inter duas ſemicycloides ſuſpenſo & ſingulas oſcillationes ſingulis minutis ſecundis aut eorum ſemiſſibus abſolvente (§. 284) inſtructum & ſecunda temporis ſcrupula indice peculiari monſtrans ad motum ſtellarum ea ratione componatur, quæ inferius in Aſtronomia exponitur.
2. Globus plumbeus ex filo tenui ſuſpenſus (§. 279) leniter impellatur, ut nonniſi exiguos arcus deſcribat, quo ſingulæ oſcillationes ſint iſochronæ (§. 285) & tamdiu augeatur, vel minuatur fili longitudo, donec oſcillationes ſingulis minutis ſecundis abſolvantur.
3. Quoniam duæ quintæ tertiæ proportionalis ad compoſitam ex ſemidiametro & longitudine fili atque ſemidiametrum ipſam definiunt diſtantiam centri oſcillationis ab axe (§. 322); earundem pars tertia quantitatem pedis horarii conſtituit.

SCHOLION 1.

324. Hugenius (x) *hoc modo invenit, pedem horarium eſſe ad Pariſienſem ut* 864 *ad* 881 *hoc eſt, longitudo penduli ſimplicis oſcillationes ſingulas ſingulis minutis ſecundis abſolventis eſſe trium pedum Pariſienſium cum octo lineis & dimidia. Eadem juxta eandem definitur trium pedum Rhenanorum cum 3 lineis & dimidia.*

SCHOLION 2.

325. *Quodſi gravitas omnibus in locis eadem eſſet; pes horarius menſura foret univerſalis & perpetua, quemadmodum* Hugenius *contendit: ſed cum eandem variari nunc conſtet pro diverſa ab æquatore diſtantia* (§. 292); *nonniſi iis in locis eadem penduli ſimplicis minuta ſecunda metientis longitudo, quorum latitudines non nimis diſcrepant. Quo itaque menſura vere univerſalis haberetur opus præterea eſſet, ut ratio longitudinum penduli prædicti in diverſis latitudinibus una determinaretur. Nec hoc forte attentione omni prorſus indignum cenſeri debet, hactenus nec per experimenta conſtare, nec demonſtratum eſſe, quod eodem in loco intra amplum temporis intervallum, veluti aliquot ſeculorum decurſum, gravitas non mutetur.*

THEO-

(u) Horolog. Oſcillat. part. 4. prop. 21. 22. f. 128 & ſeqq. item 141 & ſeqq.
(x) Horol. Oſcillat. part. 4. prop. 25. f. 152 & 153.

THEOREMA 52.

326. *Spatium deſcenſus perpendicularis gravium intra minutum ſecundum temporis eſt ad ſemiſſem longitudinis penduli ſimplicis, cuius oſcillationes minutis ſecundis reſpondent, in ratione duplicata peripheriæ ad diametrum circuli.*

DEMONSTRATIO.

Sit pes horarius ſeu longitudo penduli ſimplicis, cujus oſcillationes minutis ſecundis horariis reſpondent, $= a$, tempus deſcenſus per dimidiam illam longitudinem $= t$, altitudo quæſita $= x$, ratio diametri ad peripheriam $= d:p$; erit $t = d:p$ (§. 289). Eſt vero $t^2 \, 1 = \frac{1}{2}a:x$ (§. 72) adeoque $t^2x = \frac{1}{2}a$, hoc eſt, ſi valor ipſius t modo inventus ſubſtituatur, $d^2x:p^2 = \frac{1}{2}a$ ſeu $d^2x = \frac{1}{2}ap^2$. Ergo $x:\frac{1}{2}a = p^2:d^2$. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

327. Quoniam $d:p = 113:355$ (§. 404 *Geom.*) & $a = 3' \, 8\frac{1}{2}'''$ ſeu 881 linearum dimidiarum pedis Pariſienſis (§. 324); erit $x = ap^2:2d^2 = 881.126025:25538 = 2174''' = 15' \, 1'' \, 2'''$ ſeu $15' \, 1''$ quam proxime.

SCHOLION.

328. *Hæc cum experimentis accuratisſimis prorſus convenire obſervavit* Hugenius (y)

CAPUT X.
De
MOTU PROJECTORUM.

DEFINITIO 40.

329. *Grave perpendiculariter proiici* dicitur, ſi impellitur ſecundum lineam directionis, quæ ad horizontalem perpendicularis.

DEFINITIO 41.

330. *Grave horizontaliter proiici* dicitur, ſi impellitur ſecundum lineam directionis horizontali apparenti parallelam.

DEFINITIO 42.

331. *Grave oblique proiici dicitur*, ſi impellitur ſecundum lineam directionis, quæ cum horizontali apparente angulum efficit obliquum.

DEFINITIO 43.

332. *Angulus elevationis* ARB eſt, Tab. quem efficit linea directionis cor- IV.
Hhh h poris Fig. 50.

(y) in Horolog. Oſcillat. part. 4. prop. 25. f. 155.

poris projecti AR cum linea horizontali AB.

THEOREMA 53.

333. *Si corpus grave perpendiculariter proiicitur, perpendiculariter aſcendit.*

DEMONSTRATIO.

Grave impellitur ſecundum lineam directionis, quæ ad horizontalem perpendicularis (§. 329). Quare cum gravitas ſecundum eandem directionem vi impreſſæ reſiſtat (§. 170); directionem mutare nequit, ſed motum tantum retardat (§. 63). Grave igitur perpendiculariter projectum perpendiculariter aſcendit (§. 58). Q. e. d.

THEOREMA 54.

334. *Si corpus grave horizontaliter projicitur, motu ſuo parabolam*
Tab. *deſcribit in medio non reſiſtente.*
IV.
Fig.

DEMONSTRATIO.

49. Corpus enim projectum vi impreſſa uniformiter urgetur ſecundum rectam AR (§. 58); ſed vi gravitatis ſecundum rectam AC, quæ ad rectam AR lineæ horizontali *ex hypotheſi* parallelam perpendicularis (§. 170). Jam ſi vi impreſſa corpus perveniſſet in Q, vi gravitatis deſcendit interea per QM adeoque in M reperitur. Quoniam vero motus ſecundum directionem AR ſemper eſt uniformis, *per demonſtr*: ſpatia QA & qA ſunt ut tempora (§. 26). Sed ſpatia QM & qm ſunt ut temporum quadrata (§. 72). Eſt ergo $AQ^2 : Aq^2 = QM : qm$, hoc eſt, $PM^2 : pm^2 = AP : Ap$ (§. 123 *Geom.*). Via igitur, quam grave horizontaliter projectum decurrit, AMm eſt parabola (§. 365 *Analyſ. finit.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

335. *Equidem cum gravia verſus centrum telluris tendant* (§. 171), *recta QM & qm in eodem concurrere debent, adeoque parallelæ non ſunt* (§. 79 Geom.). *Enimvero ſi tota altitudo AC, per quam decidit grave ſecundum directionem AR projectum ſit exigua admodum pars diſtantiæ a centro telluris; pro parallelis citra errorem experimento ullo definiendum haberi poſſunt.*

THEOREMA 55.

336. *Si corpus grave oblique ſive* Tab.
ſurſum, ſive deorſum projicitur in IV.
medio non reſiſtente, motu ſuo para- Fig.
bolam deſcribit. 50.

DEMONSTRATIO.

I. Sit linea directionis corporis ſurſum projecti AR. Cum corpus projectum, ſi gravitatis actio ceſſaret, eandem uniformiter deſcriberet (§. 58); poſitis AQ, Qq, qh & hR æqualibus, erunt AQ & Aq ut tempora (§. 26). Quodſi AB ſit linea horizontalis, & QM, qm &c. ita ducantur, ut continuatæ in T, t &c. ſint ad AB perpendiculares;

res; erunt QM, *qm* &c. altitudines, per quas vi gravitatis deſcendit interea corpus projectum, dum ex A in Q, *q* &c. perveniſſet (§. 170). Quare ſi AS ducatur ad AB perpendicularis; erit rectis QM, *qm* &c. parallela (§. 241 *Geom.*). Ductis porro PM, *pm* &c. ipſi AR parallelis; erit PM = AQ, *pm* = A*q* &c. AP = QM, A*p* = *qm* &c. (§. 242 *Geom.*), adeoque AP : A*p* = $PM^2 : pm^2$, *per demonſtr.* Eſt igitur AMB parabola, cujus diameter AS (§. 376 *Analyſ. finit.*). *Quod erat unum.*

Tab. IV. Fig. 51. II. Sit ſimiliter linea directionis corporis deorſum projecti AR in partes æquales AQ, Q*q* &c. diviſa & RS linea horizontalis. Ductis AS ad RS perpendiculari & QM, *qm* &c. eidem AS, PM vero, *pm* &c. ipſi AR parallelis: eodem, quo ante, modo demonſtratur, eſſe AP : P*p* = $PM^2 : pm^2$. Quare AM*m* denuo eſt parabola, cujus diameter AS (§. 376 *Analyſ. finit.*). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM 1.

Tab. IV. Fig. 50. 337. Eſt ergo parameter diametri parabolæ AS tertia proportionalis ad AP & AQ (§. 376 *Analyſ. finit.*), hoc eſt, ad ſpatium, per quod grave dato tempore deſcendit, & ad celeritatem ſpatio, quod vi impreſſa eodem tempore deſcribit, definiendam (§. 14).

COROLLARIUM 2.

338. Cum ſpatium uno minuto ſecundo a gravi quocunque perpendiculariter cadendo confectum notum ſit, nempe $15\frac{1}{12}$ pedum Pariſienſium (§. 327); parameter diametri parabolæ deſcribendæ invenitur, ſi ſpatii, quod uno minuto ſecundo projectile vi impreſſa percurrit, quadratum per $15\frac{1}{12}$ dividatur (§. 272 *Arithm.*).

COROLLARIUM 3.

339. Si ergo velocitas projectorum eadem, ſpatia eodem tempore vi impreſſa deſcripta æqualia ſunt (§. 27), conſequenter eadem parabolarum, quas motu compoſito percurrunt, parameter invenitur.

COROLLARIUM 4.

340. Si a parametro diametri ſubtrahatur ipſius altitudinis AP quadruplum, parameter axis relinquitur (§. 376 *Analyſ. finit.*), cujus quarta pars eſt diſtantia verticis axis a foco parabolæ (§. 362 *Anal finit.*). Parabola igitur deſcribi poteſt, data celeritate projectorum (§. 357. 363 *Analyſ. finit.*).

COROLLARIUM 5.

341. Linea directionis projectilis AR parabolam in A tangit (§. 374. 375 *Analyſ. finit.*).

DEFINITIO 44.

342. *Semita* eſt parabola, quam cor-

corpus horizontaliter vel oblique projectum deſcribit.

DEFINITIO 45.

Tab. IV. Fig. 49. 343. *Amplitudo* (ſcilicet ſemitæ) eſt recta horizontalis AB ſemitam AMB ſubtendens.

THEOREMA 56.

344. *Projectile temporibus æqualibus per æqualia ſpatia horizontalia defertur.*

DEMONSTRATIO.

Sit AMB ſemita, AB amplitudo ejus, AR linea directionis projectilis in partes æquales AQ, Q*q* &c. diviſa. Demittantur perpendiculares QT, *qt* &c. erunt AT, T*t* &c. ſpatia horizontalia, per quæ projectile defertur, dum partes ſemitæ AM, M*m*, &c. percurrit. Quoniam projectile vi ſola impreſſa uniformiter deſcriberet rectas AQ, Q*q* &c. (§. 58); AQ, Q*q* &c. ſunt ut tempora (§. 26). Eſt vero AQ : Q*q* = AT : T*t* (§. 253 *Geom.*). Ergo AT & T*t* ſunt ut tempora, conſequenter temporibus æqualibus etiam AT & T*t* æquantur. *Q. e. d.*

PROBLEMA 48.

Tab. IV. Fig. 49. 345. *Dato angulo elevationis RAB una cum amplitudine* AB, *invenire parametrum diametri* AS *ſemitæ* AMS.

RESOLUTIO.

Sit ſinus anguli elevationis $= a$, coſinus $= b$, ſinus totus $= t$, amplitudo AB $= c$, parameter $= x$. Si AR ſumatur pro ſinu toto, erit BR ſinus, AB coſinus anguli elevationis RAB (§. 3. II *Trigon.*) adeoque

$$b : a = AB : BR$$
$$b : a = c : \frac{ac}{b}$$

Eſt itaque BR $=$ AS $= ac : b$.
Porro $b : t = AB : AR$
$$b : t = c : \frac{tc}{b}$$

Quare ob x. AS $=$ SB^2 (§. 375 *Analyſ. finit.*)

$$acx : b = c^2t^2 : b^2$$
$$ax = ct^2 : b$$
$$x = ct^2 : ab$$

Æquatio penultima in hanc reſolvitur analogiam $a : \frac{t^2}{b} = c : x$. Eſt vero $\frac{t^2}{b}$ ſecans anguli elevationis RAB (§. 26 *Trigon.*). Habemus itaque ſequens

Theorema, Amplitudo ſemitæ AB eſt ad parametrum diametri AS ut ſinus anguli elevationis RAB ad ejus ſecantem.

COROLLARIUM 1.

346. Quoniam $ax = ct^2 : b$ (§.345), adeoque $2ax = 2ct^2 : b$ (§. 85 *Arithm.*); erit etiam $2abx : 2t^2 = c$, conſequenter $t : \frac{2ab}{t} = \frac{1}{2}x : c$. Eſt vero $2ab : t$ ſinus dupli anguli elevationis BAR (§. 288 *Analyſ. finit.*). Ergo ſemiparameter eſt ad amplitudinem AB ut ſinus totus ad ſinum dupli anguli elevationis.

COROLLARIUM 2.

347. Si eadem projectorum celeritas, parameter eadem eſt (§. 339). Quare cum ſit ſemiparameter ſemitæ in uno caſu ad amplitudinem ut ſinus totus ad ſinum dupli anguli elevationis, & ſemiparameter ſemitæ in altero caſu ad amplitudinem ut ſinus totus ad ſinum dupli anguli elevationis (§. 346); erit etiam ut amplitudo ad ſinum anguli dupli elevationis in uno caſu ita amplitudo ad ſinum anguli dupli elevationis in altero caſu (§. 167 *Arithm.*). Sunt adeo amplitudines ut ſinus angulorum duplorum elevationis, celeritate projectorum exiſtente eadem, (§. 164 *Arithm.*) & ratio ſinus anguli dupli elevationis ad amplitudinem in hoc caſu conſtans eſt.

THEOREMA 57.

348. *Si eadem maneat projectilis celeritas, amplitudo* AB *maxima eſt ſub angulo elevationis* 45° : *æquales vero ſunt amplitudines ſub angulis elevationis a ſemirecto æqualiter differentibus.*

DEMONSTRATIO.

Cum ratio ſinus anguli dupli elevationis ad amplitudinem conſtans ſit, celeritate projectilis exiſtente eadem (§. 347); creſcente ſinu anguli dupli elevationis creſcit amplitudo. Quare cum ſinus anguli elevationis 45° dupli ſit radius, quo major ſinus non datur; maxima ſit neceſſe eſt amplitudo ſub ſinu anguli elevationis 45°. *Quod erat unum.*

Jam cum idem ſit ſinus angulorum a recto æqualiter differentium, e. gr. 80° & 100° (§. 5 *Trigon.*), anguli autem dupli a recto æqualiter differant, ſi ſimpli a ſemirecto differant æqualiter; amplitudines eo in caſu æquales ſint neceſſe eſt (§. 347). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

349. Quoniam ut ſinus totus ad ſinum anguli elevationis dupli ita ſemiparameter ad amplitudinem (§. 346) & ſinus totus ſinui anguli elevationis dupli æqualis, ſi is 45°; ſub angulo elevationis 45° amplitudo ſemiparametro æquatur.

PROBLEMA 49.

350. *Data amplitudine maxima, determinare amplitudinem ſub angulo*

gulo elevationis alterius cujuscunque, celeritate manente eadem.

RESOLUTIO.

Fiat ut ſinus totus ad ſinum anguli dupli elevationis cujuscunque alterius ita amplitudo maxima ad quæſitam (§. 347).

E. gr. Sit jactus maximus ſeu ſemirectus alicujus tormenti 6000 paſſuum & quæratur longitudo jactus graduum 30. Reperietur is 5196 paſſuum.

Log ſin. tot.	10000000
Log. ſin. 60	99375306
Log. 6000	37781512
Log. quæſ.	137156818, cui in tabulis reſpondent 5196.

PROBLEMA 50.

351. *Data celeritate projectilis invenire amplitudinem maximam.*

RESOLUTIO.

Cum celeritas projectilis detur per ſpatium, quod vi impreſſa dato tempore, e. gr. uno ſecundo minuto, percurrere valet; non alia re opus eſt, quam ut parameter ſemitæ inveniatur (§. 338). Hujus enim ſemisſis eſt amplitudo quæſita (§. 349).

E. gr. Sit ea projectilis celeritas, qua intra unum minutum ſecundum 1000 pedes Pariſienſes ſeu 12000″ conficere valeat. Quodſi itaque 144000000 per 181 dividas, prodibit parameter ſemitæ 795580″ ſeu 66298 pedum. Ergo amplitudo maxima 33149. Quæ adeo intra hunc terminum conſtituta ſunt, projectile attingere poteſt.

PROBLEMA 51.

352. *Data amplitudine maxima invenire celeritatem projectilis ſeu ſpatium horizontale intra minutum ſecundum conficiendum.*

RESOLUTIO.

Cum duplum amplitudinis maximæ ſit parameter ſemitæ (§. 348); inter duplum amplitudinis maximæ & ſpatium, quod intra minutum ſecundum conficit grave perpendiculariter cadendo, nempe 181 digitorum, qualium 12 eſt pes Pariſienſis, quæratur numerus medius continue proportionalis (§. 271 *Arithm.*). Is enim erit ſpatium a projectili intra unum minutum ſecundum conficiendum (§. 349).

Si amplitudo maxima 1000 pedum Pariſienſium ſeu 12000 digitorum; erit ſpatium quæſitum $= \sqrt{(12000 \cdot 181)}$ = 120′ pedum Pariſienſium cum 4 unciis ſeu digitis.

PROBLEMA 52.

353. *Determinare altitudinem maximam* TM, *ad quam grave oblique projectum aſcendit.* Tab. IV. Fig. 50.

RESOLUTIO.

Sit $AB = a$, $BR = b$, $AT = x$; erit

erit $AR^2 = SB^2 = a^2 + b^2$ (§. *Geom*). Porro (§. 253 *Geom.*)

$$AB : BR = AT : TQ$$
$$a : b = x : \frac{bx}{a}$$

Et (§. 365 *Analyſ. finit.*)

$$SB^2 : AQ^2 = BR : QM.$$
$$a^2+b^2 : \frac{a^2x^2+b^2x^2}{a^2} = b : \frac{bx^2}{a^2}$$

Quare $TM = bx : a - bx^2 : a^2$. Cum vero *tm* ſit maximum aliquod, *per hypoth.* erit (§. 61 *Analyſ. infinit.*)

$$bdx : a - 2bxdx : a^2 = 0$$

$$ab - 2bx = 0$$

$$ab = 2bx$$

$$\tfrac{1}{2}a = x$$

Theorema. Si amplitudo AB bifariam dividatur in *t* & ex puncto *t* erigatur perpendicularis *tm*; erit *tm* altitudo maxima, ad quam grave juxta directionem AR projectum aſcendit.

THEOREMA 58.

354. *Si altitudo maxima* tm, *ad quam grave juxta directionem AR projectum aſcendit, continuetur usque ad lineam directionis AR; erit recta* qm *inter ſemitam* AmB *& lineam directionis* AR *intercepta eidem æqualis: &, ſi in extremitate ſemitæ erigatur perpendicularis* BR, *erit* $tm = \frac{1}{4}BR$.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $AB : At = AR : Aq$ (§. 253 *Geom.*), & $At = \frac{1}{2}AB$ (§. 353); erit etiam $Aq = \frac{1}{2}AR$. Eſt vero $AR^2 : Aq^2 = BR : qm$ (§. 365 *An. fin.*). Quare cum $Aq^2 = \frac{1}{4}AR^2$, *per demonſtrat.* erit quoque $qm = \frac{1}{4}BR$. *Quod erat unum.* Tab. IV. Fig. 50.

Sed, ob $AB : At = BR : tq$ (§. 251 *Geom.*) & $At = \frac{1}{2}AB$ (§. 353), $tq = \frac{1}{2}BR$. Ergo $qm = \frac{1}{2}tq = tm$. *Quod erat alterum.*

PROBLEMA 53.

355. *Data amplitudine* AB *& angulo elevationis* BAR, *determinare altitudinem jactus maximam* tm.

RESOLUTIO.

Si AR ſumatur pro ſinu toto, erit BR ſinus, AB coſinus anguli elevationis BAR (§. 3. 11 *Trigon.*). Quare ſi fiat ut coſinus anguli elevationis ad ſinum ejusdem ita amplitudo AB ad quartum; reperietur BR, cujus quarta pars eſt altitudo jactus maxima *tm* (§. 354).

COROLLARIUM.

356. Quoniam data celeritate projectilis amplitudo maxima (§. 351) & inde porro amplitudo ſub angulo elevationis quocunque invenitur (§. 350); data celeritate, maxima quoque jactus altitudo inveniri poteſt (§. 355).

THEOREMA 59.

357. *Altitudo jactus* tm *eſt ad octavam*

ctavam parametri partem ut ſinus verſus anguli dupli elevationis ad ſinum totum.

DEMONSTRATIO.

Sit ſinus anguli elevationis BAR $= a$, coſinus $= b$, ſinus totus $= t$ parameter $= x$; erit amplitudo AB $= abx : t^2$ (§.346) & (§.355)

$$b : a = \text{AB} : \text{BR}$$
$$b : a = \frac{abx}{t^2} : \frac{a^2x}{t^2}$$

Ergo $tm = \frac{1}{4}$BR (§.354) $= a^2x : 4t^2 = 2a^2x : 8t^2$. Eſt vero $(b^2 - a^2) : t$ coſinus anguli dupli elevationis (§.288 *Analyſ. finit.*) & hinc ſinus verſus ejusdem anguli dupli $t - (b^2 + a^2) : t$ (§.2 *Trigon.*) $= (t^2 - b^2 + a^2) : t$, conſequenter ob $t^2 - b^2 = a^2$ (§.16 *Trigon.*), idem ſinus verſus $= 2a^2 : t$. Eſt adeo ut t ſinus totus ad $2a^2 : t$ ſinum verſum anguli dupli elevationis, ita $\frac{1}{8}x$ octava parametri pars ad altitudinem tm. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

358. Quoniam ut ſinus totus ad ſinum verſum anguli dupli elevationis in uno caſu, ita octava parametri pars ad altitudinem jactus & ut ſinus totus ad ſinum verſum anguli dupli elevationis in altero quocunque caſu, ita octava parametri pars ad altitudinem (§. 357), velocitate autem exiſtente eadem parameter quoque in diverſis angulis elevationis eadem eſt (§. 339); erunt altitudines jactuum ſub diverſis angulis elevationum ut ſinus verſi eorundem angulorum duplorum.

COROLLARIUM 2.

359. Si ſinus anguli dupli elevationis in uno caſu a, in altero c, velocitate exiſtente eadem, altitudines jactuum ſunt ut $a^2x : 4t^2$ ad $c^2x : 4t^2$ (§. 357), hoc eſt, ut a^2 ad c^2 (§. 170. 172 *Arithm.*) adeoque in ratione duplicata ſinuum angulorum duplorum elevationum.

PROBLEMA 54.

360. *Data celeritate projectilis, altitudine feriendi* In *& ejus diſtantia horizontali* AI, *invenire jactus angulum elevationis.*

RESOLUTIO.

Cum data celeritate projectilis parameter diametri AS detur (§. 338); ſit ea $= a$. Sit præterea In $= b$, AI $= c$, ſinus totus $= t$, tangens anguli quæſiti $= x$. Quodſi AI ſumatur pro ſinu toto, erit hI tangens anguli hAI (§.7 *Trigon.*). Eſt itaque

$$t : x = \text{AI} : \text{I}h$$
$$t : x = c : \frac{cx}{t}$$

Ergo $hn = \text{A}r = cx : t - b$ & $rn = acx : t - ab$ (§.352 *Anal. fin.*). Eſt vero etiam $rn^2 = \text{A}h^2 = \text{AI}^2 + \text{I}h^2$ (§. 394 *Geom.*) $= c^2 + c^2x^2 : t^2$. Quare

$c^2 +$

$$c^2 + c^2x^2 : t^2 = acx : t - ab$$

$$c^2x^2 : t^2 - acx : t = -ab - c^2$$
$$\tfrac{1}{4}a^2 \qquad \tfrac{1}{4}a^2$$

$$c^2x^2 : t^2 - acx : t + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - ab - c^2$$

$$cx : t - \tfrac{1}{2}a = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - ab - c^2)}$$

$$cx : t = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - ab - c^2)}$$

$$x = [\tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - ab - c^2)}]\,t : c$$

Eſt igitur ut c ad $\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - ab - c^2)}$ ita ſinus totus t ad tangentem anguli elevationis quæſitum RAB.

COROLLARIUM 1.

361. Si $ab + c^2 = \frac{1}{4}a^2$; erit $x = at : 2c$, adeoque in hoc caſu eſt ut dupla diſtantia objecti feriendi AI ad parametrum, ita ſinus totus ad tangentem anguli elevationis.

COROLLARIUM 2.

362. Si $ab + c^2 > \frac{1}{4}a^2$; valor ipſius x eſt impoſſibilis, adeoque in hoc caſu data celeritate objectum attingi nequit.

THEOREMA 60.

Tab. IV. Fig. 50. 363. *Tempora jactuum ſub diverſis elevationis angulis, velocitate exiſtente eadem, ſunt ut ſinus angulorum elevationis.*

DEMONSTRATIO.

Si ſinus totus $= t$, ſinus anguli elevationis BAR $= a$, coſinus $= b$, parameter ſemitæ $= x$; erit AB $= abx : t^2$. Quare cum ſit (§. 38 *Trigon.*)

$$b : t = \text{AB} : \text{AR}$$
$$b : t = \frac{abx}{t^2} : \frac{ax}{t} \quad (\text{§. } 346)$$

erit ut ſinus totus t ad ſinum anguli elevationis in caſu uno ita parameter ad AR & ut ſinus totus ad ſinum anguli elevationis in caſu alio ita parameter ad AR in caſu alio. Quoniam vero celeritas in utroque caſu eadem, *per hypoth.* parameter quoque eadem eſt (§. 347). Ergo ut ſinus angulorum elevationis ita ſunt rectæ AR in diverſis elevationum angulis (§. 167 *Arithm.*). Enimvero rectæ AR ſunt ſpatia, quæ projectilia eadem celeritate uniformiter deſcribunt, ceſſante gravitatis actione (§. 58). Tempora igitur jactuum ſunt ut iſta ſpatia (§. 28), conſequenter ut ſinus angulorum elevationis. *Q. e. d.*

PROBLEMA 55.

364 *Data celeritate projectilis una cum angulo elevationis* RAB, *invenire amplitudinem* AB, *altitudinem jactus* tm *& ſemitam* AmB *deſcribere.* Tab. IV. Fig. 50.

RESOLUTIO.

1. Ad rectam horizontalem AB erigatur perpendicularis AD, quæ ſit altitudo, unde projecti-

le cadendo celeritatem datam acquirere valet.

2. Super AD deſcribatur ſemicirculus AQD, lineam directionis AR ſecaturus in Q.

3. Per Q ducatur ipſi AB parallela Cm fiatque $CQ = Qm$.

4. Ex puncto m demittatur ad AB perpendicularis mt.

5. Denique per verticem m deſcribatur parabola AmB (§. 355. 357 *Analyſ. finit.*).

Dico hanc eſſe ſemitam quæſitam, 4CQ ejus amplitudinem, tm jactus altitudinem & 4CD parametrum.

DEMONSTRATIO.

Cum anguli ad C & m ſint recti *per conſtr.* & verticales ad Q æquales (§. 150 *Geom.*), ſit etiam $CQ = Qm$ *per conſtr.* erit $qm = AC$ (§. 236 *Geom.*). Eſt vero $tm = AC$ (§. 215 *Geom.*). Ergo $qm = mt$, conſequenter tm eſt altitudo jactus (§. 353) & projectile parabolam AmB deſcribit, cujus adeo amplitudo $AB = 2At = 2Cm = 4CQ$, ob $CQ = Qm$ *per conſtr.* *Quod erat primum, ſecundum & tertium.*

Denique quia $At = 2CQ$; $At^2 = 4CQ^2 = 4\,DC.AC$ (§. 312. 359 *Geom.*) $= 4DC.tm$ *per demonſtr.* Ergo 4DC eſt parameter parabolæ in verticem (§. 352 *Analyſ. finit.*). *Quod erat ultimum.*

COROLLARIUM 1.

365. Data igitur projectilis celeritate, dantur amplitudines & altitudines omnium jactuum, qui fieri poſſunt, eadem opera. Ducta enim EA, erit ſub angulo elevationis EAB, altitudo AI, amplitudo 4IE; ſub angulo elevationis FAB altitudo AH, amplitudo 4HF.

COROLLARIUM 2.

366. Cum AB ſit ad AD perpendicularis *per hypoth.* circulum in A tangit (§. 289 *Geom.*) & hinc angulus ADQ angulo elevationis RAB æqualis (§. 308 *Geom.*); conſequenter AIM eſt duplus anguli elevationis (§. 298 *Geom.*). Eſt itaque CQ quarta pars amplitudinis ſinus rectus, AC altitudo jactus ſinus verſus anguli dupli elevationis (§. 2 *Trigon.*).

SCHOLION.

367. *Hinc facili opera deducuntur, quæ ſupra per analyſin invenire docuimus, ut ejus in hiſce uſum oſtenderemus.*

PROBLEMA 56.

368. *Data altitudine jactus* tm *aut amplitudine* AB, *una cum angulo elevationis* RAB *invenire projectilis celeritatem, qua ab initio fertur, hoc eſt altitudinem* AD, *unde cadendo iſtiusmodi celeritatem acquirere valet.*

RESOLUTIO.

Cum $AC = tm$ ſit ſinus verſus, CQ

$CQ = \frac{1}{4} AB$ ſinus rectus anguli dupli elevationis AIQ (§ 365). Quæratur ad ſinum verſum anguli dupli elevationis, ſinum totum & altitudinem jactus; vel ad ſinum rectum anguli dupli elevationis, ſinum totum & quartam amplitudinis partem numerus quartus proportionalis: erit is radius IQ ſive IA, cujus duplum AD eſt altitudo quæſita.

CAPUT XI. DE MOTU CORPORUM EX PERCUSSIONE.

DEFINITIO 46.

369. *Corpus perfecte durum* eſt, quod ab ictu figuram non mutat.

DEFINITIO 47.

370. *Corpus molle* eſt, quod ab ictu figuram priſtinam amittit, ut argilla, ſebum, cera.

DEFINITIO 48.

371. *Corpus elaſticum* eſt, quod ab ictu figuram quidem mutat, ſed vi propria in eandem rurſus reſtituitur. Talis eſt enſis, qui ad ictum incurvatur, ſed ſtatim reſilit in figuram priſtinam.

DEFINITIO 49.

372. *Corpus unum in alterum directe impingere* dicitur, ſi impingit ſecundum rectam ad contactum perpendicularem.

COROLLARIUM.

373. Sphæra igitur directe in alteram impingit, ſi linea directionis centra utriusque jungit (§. 37 *Analyſ. infinit.*). Tab. IV. Fig. 53.

DEFINITIO 50.

374. *Corpus unum in alterum indirecte impingere* dicitur, ſi impingit ſecundum rectam ad contactum obliquam.

DEFINITIO 51.

375. *Centrum percuſſionis* eſt punctum, in quo ictus eſt maximus.

AXIOMA 3.

376. *Actioni æqualis, ſed contraria eſt reactio.*

SCHOLION.

377. *Hoc legum motus principium ab experientia petitur & a celeberrimo* Nevvtono (z) *his exemplis illuſtratur.* „Si quis, inquit, lapidem digito premit, premitur „& hujus digitus a lapide. Si equus „lapidem funi alligatum trahit, retrahetur etiam & equus æqualiter in lapidem: nam funis utrinque diſtentus eodem relaxandi ſe conatu urgebit equum verſus lapidem ac lapidem „verſus equum, tantumque impediet „progreſſum unius quantum promovet „progreſſum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi ſua quomodocunque mutaverit, idem quoque viciſſim in motu proprio eandem mutationem in „partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem preſſionis mutuæ) ſubibit.

THEOREMA 61.

Tab. IV. Fig. 51. 378. *Si corpus unum A in alterum B vel quieſcens vel tardius motum ſecundum eandem directionem, vel etiam ſecundum contrariam ipſi obviam factum impingat; ſumma impetuum in corporibus ſecundum eandem directionem motis, differentia eorundem in motis juxta contrarias eadem erit ante & poſt ictum.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus A & B moveri juxta eandem directionem, ſitque impetus ipſius A $= a$, impetus ipſius B $= b$; erit ſumma impetuum ante ictum $= a + b$. Si A acceleret motum ipſius B juxta ejusdem directionem in conflictu, incrementum quoddam impetus efficit (§. 17). Quare cum B eadem vi reagat in A, qua A agit in B (§. 376), ob contrarias virium æqualium directiones tantum impetus ſubtrahitur ex A, quantum additur ipſi B (§. 24). Unde ſi impetus ipſius B fuerit poſt ictum $= b + c$; erit impetus ipſius A poſt ictum $= a - c$. Summa igitur impetuum $b + c + a - c = b + a$ eadem poſt ictum, quæ ante ictum. Si B quieſcit, erit impetus ejus ante ictum $= o$, adeoque impetuum ſumma $= a$. Sed ſi poſt ictum impetus ipſius B $= c$; *per demonſtrata* impetus ipſius A $= a - c$. Unde denuo ſumma impetuum eadem ante & poſt ictum, hoc eſt, $= a + c$.

Si fuerit $c > a$; reactione ipſius B, qua efficitur impetus $a + c$ deſtruitur impetus a & efficitur impetus ſecundum directionem contrariam impulſi corporis A $= c$, *per demonſtrata.* Differentia igitur impetuum poſt ictum in corporibus B & A ſecundum contrarias directiones motis eſt $= b + a + c - c$ eadem eſt quæ ſumma ante ictum $a + b$.

Si

(z) Princip. Mathem. Philoſ. Natural. p. 13.

Si $c = a$, reactione ipſius B deſtruitur impetus in A, adeoque corpus A quieſcit & B verſus eandem plagam ſolum progreditur. Unde denuo ſumma impetuum poſt ictum $a + b + o$ æquatur ſummæ ante ictum $a + b$.

Si corpora A & B ſibi mutuo occurrant, erit differentia impetuum $a - b$. Sit poſt conflictum impetus ipſius B $= c$: deſtruitur ergo per actionem A impetus b & efficitur c. Reactione igitur ipſius B in A deſtruitur impetus $b + c$ adeoque poſt conflictum remanet impetus $a - b - c$. Quodſi $a > b + c$, progredientur A & B poſt conflictum juxta eandem directionem eſtque ſumma impetuum $a - b - c + c$ eadem quæ differentia $a - b$ ante ictum.

Quodſi $c + b > a$, deſtruitur reactione ipſius B $= c + b$ impetus a & efficitur ſecundum contrariam directionem impetus $c + b - a$ adeoque B & A reſiliunt ſecundum directiones contrarias. Differentia igitur impetuum poſt ictum $c - c - b + a$ eadem eſt, quæ fuerat ante ictum $a - b$.

Denique ſi $b + c = a$, reactione ipſius B deſtruitur impetus totus in A, qui adeo poſt ictum $= o$. Unde ſumma impetuum $c = a - b$ eadem quæ differentia eorundem ante ictum.

THEOREMA 62.

379. *Si duo corpora A & B pondere æqualia & non elaſtica, æqualibus celeritatibus lata, ſibi mutuo occurrunt, poſt ictum ambo quieſcunt.* Tab. IV. Fig. 53.

DEMONSTRATIO.

Cum enim corporum A & B maſſæ atque celeritates æquales ſint, *per hypoth.* impetus æquales habent (§. 18). Eorum itaque differentia ante ictum nulla eſt. Quodſi poſt ictum ſecundum eandem directionem progrederentur, ſumma impetuum deberet eſſe nulla (§. 378), ſecundum eandem igitur progredi nequeunt. Sed cum ſecundum contrarias ſe mutuo urgeant eadem vi, nec ulla ſit ratio, cur a ſe invicem reſiliant, *per hypoth.* ſecundum directiones contrarias moveri nequeunt. Poſt ictum ergo ambo quieſcunt. *Q. e. d.*

THEOREMA 63.

380. *Si corpus elateris expers A in aliud itidem non elaſticum B directe incurrat, nec per conflictum motus extinguatur; poſt ictum ambo eadem celeritate moventur ſecundum eandem directionem.*

DEMONSTRATIO.

Si enim A incurrat in B ſive quieſcens, ſive ſegnius motum urgebit ipſum ſecundum directionem

nem ſuam, adeoque cum nulla adſit ratio, cur a ſe invicem reſiliant, *per hypoth.* ſi A vincat, B neceſſario movebitur ſecundum directionem ipſius. *Quod erat unum.*

Quodſi jam A & B ſecundum eandem directionem progrediuntur, B tardius moveri nequit quam inſequens A. Cum vero eandem celeritatem adipiſcitur, quam habet ipſum A, motui ejus non amplius reſiſtit adeoque fugit, conſequenter ambo eadem celeritate progrediuntur. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 64.

Tab. IV. Fig. 53. 381. *Si corpus elateris expers A in aliud non elaſticum B quieſcens directe incurrat, celeritas poſt ictum eſt ad celeritatem ante ictum ut pondus ipſius A ad ponderum A & B ſummam.*

DEMONSTRATIO.

Sit maſſa ipſius A = M, alterius B = *m*, celeritas prioris = C; erit impetus ipſius A = MC (§. 18), ipſius B vero nullus, adeoque impetuum ſumma poſt ictum = MC (§. 378), conſequenter celeritas = MC : (M + *m*) (§. 18). Eſt adeo ut M + *m* ponderum ſumma ad M pondus moti, ita C celeritas ante ictum ad celeritatem poſt ictum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

382. Quodſi corpora A & B fuerint ejusdem ponderis; erit M = *m*, adeoque celeritas poſt ictum = MC : 2M = $\frac{1}{2}$C. Moventur itaque celeritate dimidia ejus, qua A ferebatur ante conflictum.

THEOREMA 65.

383. *Si corpus elateris expers A in aliud non elaſticum B tardius motum ſecundum eandem directionem directe impingat; erit celeritas poſt ictum æqualis impetuum ſummæ per ponderum ſummam diviſæ.*

DEMONSTRATIO.

Sint corporum A & B maſſæ M & *m*, celeritates C & *c*; erunt impetus ante conflictum MC & *mc* (§. 15), adeoque ſumma eorundem MC + *mc*: quæ cum eadem ſit poſt conflictum (§. 378), erit celeritas communis corporum A & B poſt eundem (MC + *mc*) : (M + *m*) (§. 18). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

384. Si pondera corporum A & B fuerint æqualia, erit M = *m*, adeoque celeritas poſt ictum M (C + *c*) : 2M = (C + *c*) : 2, ſeu ſemiſumma celeritatum ante ictum.

THEOREMA 66.

385. *Si duo corpora non elaſtica, pondere æqualia, diverſis celeritatibus lata, ſibi mutuo directe occurrant, poſt conflictum feruntur celerita-*

ritatum ſemidifferentia, qua movebantur ante ictum.

DEMONSTRATIO.

Sit maſſa communis $= M$, celeritates ſint ut C & c; erit differentia impetuum $M(C-c)$: cui cum æqualis ſit poſt conflictum ſumma eorundem (§ 378), erit celeritas communis $= M(C-c):2M = (C-c):2$, hoc eſt, æqualis velocitatum ante impactum ſemidifferentiæ. *Q. e. d.*

THEOREMA 67.

386. *Si duo corpora non elaſtica A & B iis celeritatibus ſibi mutuo directe occurrant, quæ ſunt reciproce ut pondera eorundem; ambo poſt ictum quieſcunt.*

DEMONSTRATIO.

Sint enim maſſæ M & m, celeritates C & c; quoniam $M:m = c:C$, *per hypoth.* erit $mc = MC$, adeoque impetuum differentia ante conflictum nulla (§. 18). Ergo ſumma impetuum poſt ictum cum nihilo æqualis ſit (§. 378); nullus quoque poſt ictum erit motus, hoc eſt, ambo quieſcunt. *Q. e. d.*

THEOREMA 68.

387. *Si duo corpora non elaſtica A & B eadem celeritate ſibi mutuo directe occurrunt; erit celeritas poſt impactum ad celeritatem ante eundem ut ponderum differentia ad ſummam eorundem.*

DEMONSTRATIO.

Sit communis celeritas $= C$, maſſæ corporum A & B ut M & m; erit differentia impetuum ante impactum $(M-m)C$ (§. 18). Huic cum æqualis ſit ſumma impetuum poſt impactum (§. 378); erit velocitas communis poſt eundem $= (M-m)C:(M+m)$, (§. 18), hoc eſt, ut ponderum ſumma ad differentiam eorundem ita celeritas ante ictum ad celeritatem poſt ictum. *Q. e. d.*

THEOREMA 69.

388. *Si duo corpora non elaſtica A & B quacunque celeritate ſibi mutuo directe occurrunt; erit celeritas poſt ictum æqualis ſemidifferentiæ impetuum per ſummam ponderum diviſæ.*

DEMONSTRATIO.

Sint corporum A & B maſſæ M & m, celeritates C & c; erit differentia impetuum ante ictum $MC-mc$ (§. 18). Huic cum æqualis ſit ſumma impetuum poſt impactum (§. 378); erit velocitas communis poſt eundem $(MC-mc):(M+m)$ (§. 18). *Q. e. d.*

PROBLEMA 57.

389. *Determinare partem impetus in conflictu amiſſam a fortiori.*

RESOLUTIO.

1. Celeritas, qua movetur corpus ante

ante conflictum, ducatur in maſſam ejus, ita habebitur impetus ante conflictum (§. 18).

2. Similiter celeritas, qua idem fertur poſt conflictum, ducatur in maſſam ejus, ita habebitur impetus poſt conflictum (§. 18).

3. Quodſi impetum poſteriorem a priori auferas, relinquetur amiſſus.

E. gr. Si duo corpora æqualis ponderis ſibi mutuo occurrant celeritatibus C & c; erit celeritas poſt conflictum $= \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}c$. Ergo impetus poſt conflictum eſt $\frac{1}{2}MC + \frac{1}{2}Mc$. Sed ante conflictum erat in fortiori $= MC$. Impetus ergo amiſſus eſt $\frac{1}{2}MC - \frac{1}{2}Mc$. Quare impetus integer ad partem amiſſam ut MC ad $\frac{1}{2}MC - \frac{1}{2}Mc$, hoc eſt, ut 2C ad $C - c$, ſeu ut dupla celeritas fortioris ad differentiam celeritatum ante conflictum.

SCHOLION.

390. *Hac ergo methodo inveniri poſſunt theoremata de impetu in conflictu amiſſo & inde magnitudinem ictus æſtimare licet.*

THEOREMA 70.

391. *Centrum percuſſionis idem eſt cum centro oſcillationis, ſi corpus percutiens circa punctum fixum rotatur.*

DEMONSTRATIO.

Centrum enim percuſſionis eſt punctum, in quo colligitur impetus omnis, ſeu circa quod impetus partium utrinque æquilibrantur (§. 375). Invenitur adeo ſi impetus partium conſiderentur inſtar ponderum ad lineam inflexilem ac gravitatis expertem applicatorum, hoc eſt, dividendo ſummam factorum ex impetibus partium in diſtantias a puncto ſuſpenſionis per ſummam impetuum (§. 118). Sed eodem modo invenitur centrum oſcillationis (§. 312). Ergo centrum oſcillationis idem eſt cum centro percuſſionis, ſi corpus percutiens circa punctum fixum rotatur. *Q. e. d.*

SCHOLION.

392. *Quæ igitur ſupra de centro oſcillationis dicta ſunt, eadem quoque de centro percuſſionis valent, ſi grave percutiens circa punctum fixum rotetur.*

THEOREMA 71.

393. *Centrum percuſſionis idem eſt cum centro gravitatis, ſi corporis percutientis partes omnes motu parallelo feruntur ſeu eadem celeritate moventur.*

DEMONSTRATIO.

Impetus enim ſunt facta ex ponderibus in celeritates (§. 18). Quare ſi æquiponderantia per eandem celeritatem multiplices, perinde eſt ac ſi eorum æquemultiplicia ſumas. Sed æquiponderantium æquemultiplicia quoq; æquiponderant (nam ſi A æquiponderet ipſi B, etiam 2A ipſis 2B & in genere mA ipſis mB æqui-

æquiponderare intelliguntur). Ergo circa centrum gravitatis impetus æquivalentes diſponuntur, conſequenter centrum gravitatis cum centro percuſſionis in hoc caſu coincidit.

DEFINITIO 52.

Tab. IV. Fig. 52. 394. *Angulus incidentiæ* DCA eſt, quem linea directionis corporis impingentis DC efficit ad punctum contactus C.

DEFINITIO 53.

395. Quodſi poſt ictum reflectitur, *Angulus reflexionis* ECF vocatur, quem linea directionis corporis reflexi EC efficit ad punctum contactus, unde reſilit.

THEOREMA 72.

396. *Ictus perpendicularis eſt ad obliquum ut ſinus totus ad ſinum anguli incidentiæ* DCA.

DEMONSTRATIO.

Demittatur ad AB perpendicularis HG, nempe in ipſum obicem, ſi ſuperficies plana, aut in rectam, quæ eundem in contactu C tangit, ſi ſuperficies curva, & compleatur rectangulum DGCH. Vis, qua urgetur corpus per DC, æquivalet viribus juxta directiones DH & DG agentibus (§. 199). Quare cum obex AB non opponatur directioni DH, ſed tantum alteri DG; perinde eſt ac ſi corpus D tantum percuteret obicem vi ſecundum DG agente. Æſtimatur vero magnitudo ictus ex impetu in conflictu amiſſo (§. 390) adeoque cum corpus idem ſit, ex celeritate (§. 38), conſequenter ex longitudine linearum DG, DH, DC (§. 203). Eſt adeo impetus corporis D per DC ad impetum per DG ut DC ad DG. Jam dum corpus oblique impingit, deſtruitur tantum ab obice impetus per DG, *per demonſtrat.* ſi vero perpendiculariter ſeu directe impingeret, deſtrueretur impetus totus per DG & DH, hoc eſt, per DC (§. 199). Eſt ergo ictus perpendicularis ad obliquum ut DC ad DG. Sed ſi DC ſumatur pro ſinu toto, erit DG ſinus anguli incidentiæ DCG (§. 2 *Trigon.*). Ictus itaque perpendicularis ad obliquum ut ſinus totus ad ſinum anguli incidentiæ. *Q.e.d.*

THEOREMA 73.

397. *Elater eſt æqualis vi comprimentis aut tendentis, quamdiu corpus adhuc comprimi poteſt.*

DEMONSTRATIO.

Corpus elaſticum adhuc ulterius comprimi aut tendi poteſt, nec tamen comprimitur aut tenditur *per hypoth.* Ergo tanta vi reſiſtit, quan-

quanta comprimitur vel tenditur (§. 62). Reſiſtit autem vi elateris (§. 371): adeoque elater æqualis eſt vi comprimentis aut tendentis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

398. Æquatur itaque etiam vi percutientis, quæ ad corpus elaſticum tendendum aut comprimendum requiritur.

THEOREMA 74.

399. *Si corpus H in obicem AB, qui cedere neſcit, directe impingat, ſitque vel utrumque, vel alterutrum elaſticum, eadem celeritate reflectitur per eandem rectam CH, qua advenerat.*

DEMONSTRATIO.

Si elater abeſſet, tota vis corporis B in reſiſtentiam obicis frangendam inſumeretur, motusque ceſſaret. Ergo vis omnis impenditur in compreſſionem corporis elaſtici, atque adeo hoc acquirit vim elaſticam iſti æqualem (§. 397). Cum igitur elater, abſumta vi comprimente, corpus reducat in ſtatum priſtinum, eadem vi illud repellit, qua impegerat, conſequenter eadem celeritate reſilit. Et quoniam corpus elaſticum ſe reſtituit ſecundum directionem, ſecundum quam compreſſum fuerat (nulla enim adeſt ratio, quæ directionem immutet); corpus reſilit per eandem rectam CH, per quam advenerat (§. 58). *Q. e. d.*

THEOREMA 75.

400. *Si corpus elaſticum D oblique impingit in obicem AB, qui cedere neſcit, ita poſt ictum reſilit, ut angulus reflexionis ſit æqualis angulo incidentiæ.*

DEMONSTRATIO.

Patet ex demonſtratione theorematis 73 (§. 396) vim per DC æquipollere viribus per DG & DH & in ictu tantum impendi vim per DG. Cum adeo poſt ictum remaneat vis per DH ſive CF & per vim elaſticam recuperetur vis per DG ſive CH; corpus poſt ictum iisdem viribus urgetur per CF & CH, quibus urgebatur ante conflictum, adeoque motu compoſito deſcribet rectam CE dato tempore ipſi DC æqualem, eruntque eodem tempore HE & DH æquales utpote ab eadem vi deſcripta (§. 199). Sunt igitur △△ DCH & CHE æqualia angulique cognomines æquales (§. 93 *Geom.*), conſequenter, cum HCA = HCF (§. 76 *Geom.*), DCA = ECF. *Q. e. d.* Tab. IV. Fig. 52.

PROBLEMA 58.

401. *Determinare angulum ECF, ſub quo reſilire debet corpus in C oblique impingens, ut ex D in E via breviſſima perveniat, ſuppoſita nempe reflexione in C.* Tab. IV. Fig. 52.

RESO-

RESOLUTIO.

Demiſſis ex D & E perpendicularibus DG & EF, fiat DG $= a$, EF $= b$, FG $= c$, CG $= x$, erit CF $= c - x$, DC² $= aa + xx$, CE² $= bb + cc - 2cx + xx$. Quoniam DC + CE eſt minimum aliquod *per hypoth.* fiat (§. 61 *Analyſ. infinit.*)

$$\sqrt{(aa+xx)} + \sqrt{(bb+cc-2cx+xx)} = y$$

erit $$\frac{xdx}{\sqrt{(aa+xx)}} + \frac{xdx-cdx}{\sqrt{(b^2+c^2-2cx+x^2)}} = dy = 0$$

$$x\sqrt{(b^2+c^2-2cx+x^2)} + (x-c)\sqrt{(a^2+x^2)} = 0$$

$$x\sqrt{(b^2+c^2-2cx+x^2)} = (c-x)\sqrt{(a^2+x^2)}$$

hoc eſt, CG.CE = CF.CD

Eſt itaque CG : CD = CF : CE (§. 269 *Arithm.*). Jam ſi punctum E ſupponatur in recta ipſi AB parallela; erit EF = DG (§. 215 *Geom.*) adeoque ſi DC ſumatur pro ſinu toto, erit GC ſinus anguli GDC, & ſi CE ſumatur pro ſinu toto, erit EF ſinus anguli CEF (§. 2 *Trigon.*). Sunt ergo GC & CF arcuum ſimilium ſinus (§. 12 *Trigon.*), adeoque anguli GDC & CEF (§. 135 *Geom.*), conſequenter & eorum complementa ad rectos DCG & ECF (§. 231 *Geom.*) æquantur.

COROLLARIUM.

402. Quoniam corpus D poſt impactum in C ita reſilit, ut angulus reflexionis ECF ſit æqualis angulo incidentiæ DCG (§. 400); ex D in E, ſuppoſita reflexione in C, via breviſſima pervenit.

PROBLEMA 59.

403. *Determinare punctum C, in quod impingere debet corpus D, ut reſiliens incurrat in corpus L.* Tab. IV. Fig. 52.

RESOLUTIO.

Dato puncto D, datur DG perpendiculum $= a$. Dato puncto L, datur LI $= b$, conſequenter GI $= c$. Fiat GC $= x$, erit CI $= c - x$. Et quia angulus LCI = DCG (§. 400), G vero & F recti, *per conſtruct.*

DG : LI = GC : CI (§. 252 *Geom.*)

$a : b = x : c - x$

Ergo $a + b : a = c : x$ (§ 181 *Arith.*)

hoc eſt, DG + LI : DG = GC + CI : CI.

THEOREMA 76.

404. *Si corpus elaſticum* A *in aliud quieſcens* B *directe incurrat, poſt ictum quieſcet* A, *&* B *movebitur ea celeritate, qua ante ictum ferebatur* A. Tab. IV. Fig. 53.

DEMONSTRATIO.

Si corpora non eſſent elaſtica, utrumque poſt ictum moveretur ſecundum eandem directionem celeritate dimidia. Sed cum vis elaſtica ſecundum eam directionem agat, ſecundum quam facta

eſt compreſſio ſitque vi comprimenti æqualis (§. 397); dimidia celeritate repellit A adeoque motum ejus ſiſtit; B vero dimidia celeritate ulterius impellit adeoque motum ejus accelerat (§. 63). Fertur itaque poſt ictum celeritate integra, qua ante ictum ferebatur A, & A quieſcit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

Tab. IV. Fig. 54. 405. Cum adeo A omnem ſuam vim transferat in B, B eodem modo eandem in C, C rurſus in D & D tandem in E transferre debet. Quare ſi fuerint plura corpora elaſtica pondere æqualia & ſe mutuo tangentia; atque A impingat in B, quieſcentibus omnibus intermediis, movetur ultimum E ea celeritate, qua impegerat A.

THEOREMA 77.

Tab. IV. Fig. 53. 406. *Si duo corpora elaſtica* A *&* B *pondere æqualia celeritate æquali ſibi mutuo directe occurrant, utrumque reſiliet ea celeritate & ſecundum eam directionem, qua advenerat.*

DEMONSTRATIO.

Si elater abeſſet, ambo quieſcerent (§. 379). Omnis ergo vis in compreſſione conſumitur. Huic adeo cum æqualis ſit elaſtica, qua reſiliunt ſecundum directionem, qua advenerant (§. 397); eadem vis æqualiter agens in corpus A & B eandem in utroque celeritatem & quidem priſtinæ æqualem producit. Reſiliunt itaque eadem celeritate, qua advenerant. *Q. e. d.*

THEOREMA 78.

407. *Si duo corpora elaſtica* A *&* B *pondere æqualia celeritate inæquali ſibi mutuo directe occurrant; poſt ictum celeritatibus permutatis feruntur.* Tab. IV. Fig. 53.

DEMONSTRATIO.

Concurrant corpora A & B celeritatibus $C+c$ & C. Quodſi eadem celeritate C concurrerent, A & B poſt ictum moverentur celeritate C (§. 406). Si B quieſceret & A celeritate *c* in ipſum incurreret, poſt ictum quieſceret A, & B moveretur celeritate *c* (§. 404). Ergo exceſſus celeritatis *c*, quo fertur A, totus transfunditur per conflictum in B, adeoque ipſo peracto A movetur celeritate C, B vero celeritate $C+c$. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

408. Poſt ictum itaque eadem celeritate a ſe invicem diſcedunt, qua ante ictum ad ſe invicem accedebant.

THEOREMA 79.

409. *Si corpus elaſticum* A *in aliud æquale* B *ſegnius motum incurrat, poſt ictum ambo permutatis celeritatibus ferentur ſecundam eandem, nempe priſtinam, directionem.* Tab. IV. Fig. 53.

DE-

DEMONSTRATIO.

Incurrat A celeritate $C+c$ in B celeritate C motum. Quoniam ob celeritates C & C æquales nullus fit impulſus, perinde eſt ac ſi A in B ſola celeritate c in B quieſcens impingeret. Tum vero quieſceret A, & B moveretur celeritate c (§. 404). Ergo poſt ictum A movebitur ſola celeritate C, B vero celeritate $C+c$, & utrumque quidem ſecundum priſtinam directionem, quia nihil directionem immutat. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

410. Poſt ictum itaque eadem celeritate a ſe invicem diſcedunt, qua ante ictum ad ſe mutuo accedebant.

THEOREMA 80.

Tab. IV. Fig. 53. 411. *Si corpus A in alterum B incurrit, ictus idem eſt, qui fieret a corpore A in B quieſcens cum differentia velocitatum incurrente.*

DEMONSTRATIO.

Sint enim maſſæ M & m, celeritates C & c, erit celeritas communis poſt impactum $= (MC+mc):(M+m)$ (§. 383), adeoque impetus ipſius $A = (M^2C+Mmc):(M+m)$ (§. 18), conſequenter impetus per ictum amiſſus $= MC-(M^2C+Mmc):(M+m) = (M^2C+MmC-M^2C-Mmc):(M+m) = Mm(C-c):(M+m)$. Sed ſi A incurrat in B quieſcens celeritate $C-c$; erit celeritas poſt ictum $= (MC-Mm):(M+m)$ (§. 381), adeoque impetus $(M^2C-M^2c):(M+m)$ (§ 18), conſequenter per ictum amiſſus $MC-Mc-(M^2C+M^2c):(M+m) = (M^2C-M^2c+MmC-Mmc-M^2C+M^2c):(M+m) = Mm(C-c):(M+m)$. In utroque igitur caſu idem impetus amittitur, conſequenter ictus idem eſt (§. 390).

COROLLARIUM.

412. Cum vis elaſtica ictui æqualis ſit (§. 398); cum differentia velocitatum, quam habebant ante conflictum, in corpora A & B agit.

THEOREMA 81.

413. *Si duo corpora A & B ſibi mutuo occurrunt, ictus idem contingit, qui fieret a corpore A in B quieſcens cum ſumma velocitatum impingente.* Tab. IV. Fig. 53.

DEMONSTRATIO.

Sint omnia ut ante, erit celeritas communis poſt impactum $(MC-mc):(M+m)$ (§. 388), adeoque impetus ipſius A ſeu fortioris $(M^2C-Mmc):(M+m)$, conſequenter impetus per ictum amiſſus $= MC-(M^2C+Mmc):(M+m) = (M^2C+MmC-M^2C+Mmc):(M+m) = (MmC+Mmc):(M+m) = Mm(C+c):(M+m)$.

 Sed

Sed ſi A incurrat in B quieſcens celeritate $C+c$, erit celeritas poſt ictum $=(MC+Mc):(M+m)$ (§. 381) adeoque impetus $(M^2C+M^2c):(M+m)$ (§.18), conſequenter per ictum amiſſus $MC+Mc-(M^2C-M^2c):(M+m)=(M^2C+M^2c+MmC+Mmc-M^2C-M^2c):(M+m)=(MmC+Mmc):(M+m)=Mm(C+c):(M+m)$. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

414. Cum vis elaſtica ictui æqualis ſit (§. 398), in corpora A & B cum ſumma velocitatum agit, quæ ante conflictum habebant.

PROBLEMA 60.

Tab. IV. Fig. 53. 415. *Determinare celeritatem corporum elaſticorum quorumcunque* A *&* B *celeritatibus quibuscunque directe concurrentibus.*

RESOLUTIO.

I. Si corpora A & B in easdem plagas tendant, poſt ictum vi ſola impulſus ſecundum eandem moventur celeritate communi $(MC+mc):(M+m)$ (§. 383). Accedit jam vis elaſtica, quæ agit in eadem corpora cum celeritate $C-c$ (§. 410) adeoque cum in momento ictus A & B corpus unum conſtituunt, eandem ita diſtribuit, ut celeritates, poſt ictum a vi elaſtica acquiſitæ, ſint in ratione maſſarum reciproca. Sit ergo celeritas ipſi B acquiſita $=x$, erit

$$M:m=x:C-c-x$$

$$MC-Mc-Mx=mx$$

$$MC-Mc=Mx+mx$$

$$(MC-Mc):(M+m)=x$$

Hinc celeritas ipſi A acquiſita $=C-c-(MC+Mc):(M+m)=(MC-Mc+mC-mc-MC+Mc):(M+m)=(mC-mc):(M+m)$. Jam cum elater corpus A repellat, directioni ejus contrarius, celeritas hæc ſubtrahenda eſt ab ea, quæ per ſolum impulſum acquiritur, cum vero idem corpus B ad eandem plagam propellat, celeritas hæc addenda eſt priori per impulſum ſolum acquiſitæ (§. 63). Unde tandem prodit celeritas ipſius $A=(MC+mc-mC+mc):(M+m)=(MC-mC+2mc):(M+m)$ & ipſius $B=(MC+mc+MC-Mc):(M+m)=(2MC+mc-Mc):(M+m)$.

E. gr. Sit M $=6$ librarum, $m=4$, $C=3$, $c=2$, erit poſt conflictum celeritas ipſius $A=(18-12+16):(6+4)=\frac{22}{10}=2\frac{1}{5}$ & ipſius $B=(36+8-12):10=\frac{32}{10}=3\frac{1}{5}$. Progrediuntur itaque A & B verſus eandem plagam celeritatibus $2\frac{1}{5}$ & $3\frac{1}{5}$.

Sit $M=2$, $m=6$, $C=4$, $c=1$, erit poſt conflictum celeritas ipſius $A=$

(8-24

$(8 - 24 + 12) : (2 + 6) = - \frac{4}{8} = - \frac{1}{2}$; celeritas ipſius B $= (16 + 6 - 2) : (2 + 6) = \frac{20}{8} = 2\frac{1}{2}$. Cum celeritas ipſius A negativa prodeat, id indicio eſt, celeritatem per actionem elateris acquiſitam eſſe majorem celeritate per impulſum acquiſita adeoque corpus A reſilire poſt ictum. Poſt conflictum itaque A cum dimidio celeritatis gradu recedit, B vero cum $2\frac{1}{2}$ progreditur.

II. Si corpora A & B ad contrarias plagas tendentia ſibi mutuo occurrant, in conflictu per impulſum ſolum utrique acquiritur celeritas $(MC - mc) : (M + m)$ (§.388). Cum vis elaſtica in corpora, quæ inter ſe colliduntur, agat cum celeritate $C + c$ (§.414), ſi celeritas ipſi B inde acquiſita ſit x, erit vi ſuperiorum.

$$M : m = x : C + c - x$$

$$MC + Mc - Mx = mx$$

$$MC + Mc = Mx + mx$$

$$(MC + Mc) : (M + m) = x$$

Hinc celeritas, quæ ipſi A acquiritur, $C + c\ (- MC - Mc) : (M + m) = (MC + Mc + mC + mc - MC - Mc) : (M + m) = (mC + mc) : (M + m)$. Unde tandem ut ante prodit celeritas ipſius A $= (MC - mc - mC - mc) : (M + m) = (MC - mC - 2mc) : (M + m)$; celeritas vero ipſius B $= (MC - mc + MC + Mc) : (M + m) = (2MC + Mc - mc) : (M + m)$.

Quodſi $mC + 2mc > MC$; celeritas ipſius A eſt negativa, quod oſtendit, vim elaſticam eſſe impulſu debiliorem, adeoque corpus A non reſilire, ſed progredi cum reſiliente B.

E. gr. Sit ut ante $M = 6$, $m = 4$, $C = 3$, $c = 2$, erit poſt conflictum celeritas ipſius A $= (18 - 12 - 16) : 10 = - 1$ & ipſius B $= (36 + 12 - 8) : 10 = \frac{40}{10} = 4$. Regreditur adeo corpus B cum quatuor gradibus celeritatum & A ipſum ſequitur cum uno.

COROLLARIUM 1.

416. Quoniam $\frac{MC - mC + 2mc}{M + m} = \frac{MC + mC - 2mC + 2mc}{M + m} = C - \frac{2mC + 2mc}{M + m}$ & $\frac{2MC + mc - Mc}{M + m} = \frac{Mc + mc + 2MC - 2Mc}{M + m} = c + \frac{2MC - 2Mc}{M + m}$, atque $(2MC - 2Mc) : (M + m)$ & $(2mC - 2mc) : (M + m)$ ſunt celeritates, quæ ſe habent ad celeritatum differentiam ante impactum, quæ *celeritas reſpectiva* dicitur, ut alterutrius ponderis duplum ad ponderum ſummam; hinc patet, ſi corpus elaſticum A in aliud B ſive quieſcens, ſive tardius motum incurrat, inveniri celeritatem poſt impactum e. gr. corporis A, ubi fiat; *ut ſumma ponderum ad du-*

duplum alterutrius, in hoc caſu ipſius B, ita celeritatum differentia ante impactum ad celeritatem, quæ ex celeritate ipſius A ante impactum ſubducta (in altero caſu eidem addita) relinquit celeritatem ejusdem poſt impactum.

COROLLARIUM 2.

417. Similiter quia $\frac{MC - mC - 2mc}{M+m} = \frac{MC + mC - 2mC - 2mc}{M+m} = C - \frac{2mC - 2mc}{M+m}$ & $\frac{-2MC - Mc + mc}{M+m} = \frac{Mc + mc - 2MC - 2Mc}{M+m} = c - \frac{2MC - 2Mc}{M+m}$, atque $(2mC + 2mc):(M+m)$ & $(2MC + 2Mc):(M+m)$ ſunt celeritates, quæ ſe habent ad celeritatum ante impactum ſummam (quæ *celeritas reſpectiva* dicitur) ut duplum ponderis alterutrius ad eorundem ſummam, patet, ſi duo corpora elaſtica A & B ſibi mutuo occurrant, inveniri poſt impactum e. gr. corporis A celeritatem, ubi fiat: *ut ſumma ponderum ad duplum alterutrius, in hoc caſu ipſius B, ita celeritatum ante impactum ſumma ad celeritatem, quæ ex celeritate ipſius A ante impactum ſubducta relinquit celeritatem ejusdem poſt impactum.*

THEOREMA 82.

418. *Si corpus elaſticum* A *directe impingat in aliud quieſcens B; erit celeritas ejus poſt conflictum ad celeritatem ante eundem, ut differentia ponderum ad ſummam eorundem, quam vero communicat cum B, ea ad eandem eſt ut duplum pondus ipſius* A *ad ponderum ſummam.*

DEMONSTRATIO.

Si B non quieſcit, celeritas ipſius A poſt ictum eſt $(MC - mC + 2mc):(M+m)$, (§. 415). Si vero quieſcit, celeritas ejus ante conflictum nulla eſt, adeoque $c = 0$. Quare cum in hoc caſu fiat $2mc = 0$; erit celeritas ipſius A poſt impactum $= (MC - mC):(M+m)$. Eſt itaque ad C celeritatem ante conflictum ut $M - m$ differentia ponderum ad $M + m$ eorundem ſummam. *Quod erat unum.*

Similiter ſi B non quieſcit, celeritatem ex conflictu acquirit $(2MC + mc - Mc):(M+m)$, (§. 415). Jam ſi quieſcit, celeritas ejus nulla eſt adeoque $c = 0$, conſequenter $mc = 0$ & $Mc = 0$. Quare celeritas ipſius B poſt conflictum $= 2MC:(M+m)$. Eſt igitur ad celeritatem ipſius A ante conflictum ut duplum ponderis A ad ſummam ponderum. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

419. Erit ergo ex æquo poſt conflictum

ctum velocitas ipſius A ad velocitatem ipſius B ut differentia ponderum ad duplum ipſius A (§. 167 *Arithm.*).

THEOREMA 83.

Tab. IV. Fig. 83. 420. *Si duo corpora elaſtica* A *&* B *ſibi mutuo directe occurrunt cum celeritatibus, quæ ipſorum ponderibus reciproce proportionales ſunt, poſt conflictum eadem celeritate a ſe invicem reſiliunt, qua advenerant.*

DEMONSTRATIO.

Poſt conflictum celeritas ipſius A eſt $(MC - mC - 2mc) : (M + m)$ & celeritas ipſius B eſt $(2MC + Mc - mc) : (M + m)$ (§. 415). Eſt vero $M : m = c : C$, *per hypoth.* adeoque $mc = MC$ (§. 267 *Arithm.*). Quod ſi ergo in expreſſione celeritatis ipſius pro $2mc$ ſubſtituas $2MC$, prodibit $(-mC - MC) : (M + m) = -C$. Reſilit ergo A celeritate C, qua advenerat. *Quod erat unum.*

Quodſi ſimiliter in expreſſione celeritatis ipſius B pro $2MC$ ſubſtituas $2mc$; prodibit $(mc + Mc) : (M + m) = c$. Abit ergo A eadem celeritate, qua advenerat. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 84.

421. *In conflictu corporum directo ſemper conſervatur eadem celeritas reſpectiva; hoc eſt, in concurſu directo eadem eſt differentia celeritatum ante & poſt conflictum, in occurſu directo eadem celeritatum differentia poſt conflictum, quæ fuerat ſumma ante eundem.*

DEMONSTRATIO.

In concurſu directo celeritates poſt conflictum ſunt $(MC - mC + 2mc) : (M + m)$ & $(2MC + mc - Mc) : (M + m)$ (§. 415), quarum differentia $(MC + mC - Mc - mc) : (M + m) = C - c$, quæ eſt celeritatum ante conflictum differentia. *Quod erat unum.*

In occurſu directo celeritates ſunt $(MC - mC - 2mc) : (M + m)$ & $(2MC + Mc - mc) : (M + m)$, quarum differentia $(MC + mC + Mc + mc) : (M + m) = C + c$. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

422. Eadem igitur celeritate a ſe mutuo poſt ictum diſcedunt, qua ante ictum ad ſe invicem accedebant.

THEOREMA 85.

423. *In conflictu corporum elaſticorum non ſemper conſervatur eadem impetus ſeu (ut Carteſiani loquuntur) motus quantitas: ſed ſubinde augeri, ſubinde minui poteſt.*

DEMONSTRATIO.

Si corpus elaſticum A directe impingit in aliud quieſcens B celeritate C, maſſis exiſtentibus M & m, erit celeritas ipſius A poſt conflictum $= (MC - mC) : (M + m)$,

 cele-

celeritas vero ipſius B = $2MC:(M+m)$, (§. 418). Jam cum impetus ſit factum ex celeritate in maſſam (§. 18); erit quantitas impetus ante conflictum mC, poſt conflictum $(M^2C-mMC):(M+m)+2MmC:(M+m)=(M^2C+MmC):(M+m)=MC$. Eſt vero $MC > mC$ (§. 186 *Arithm.*). Ergo quantitas impetus poſt conflictum augetur. Quodſi corpora A & B concurrant, celeritatibus $(MC-mc):(M+m)$ & $2MC:(M+m)$; erit quantitas impetus ante conflictum *per demonſtrata* = MC. Sed poſt conflictum quieſcet B & A movebitur celeritate C (§. 415) adeoque impetus quantitas erit mC, conſequenter minuitur. Quare non eadem conſervatur motus quantitas, ſed ſubinde augeri, ſubinde minui poteſt. *Q. e. d.*

SCHOLION.

424. *Falluntur adeo* Carteſius *& ejus aſſeclæ, qui eandem in natura motus quantitatem conſervari contendunt.*

THEOREMA 86.

Tab. IV. Fig. 53. 425. *Si duo corpora elaſtica* A *&* B *directe concurrant vel ſibi mutuo occurrant, ſumma factorum ex maſſis in quadrata celeritatum ante & poſt conflictum eadem.*

DEMONSTRATIO.

In concurſu directo celeritates poſt conflictum ſunt $(MC-mC+2mc):(M+m)$ & $(2MC-Mc+mc):(M+m)$ (§. 415), adeoque quadrata eorundem $(M^2C^2+4MmCc-4m^2Cc+4m^2c^2+m^2C^2-2mMC^2):(M^2+2mM+m^2)$, & $(4M^2C^2+4MmCc-2Mmc^2+m^2c^2-4M^2Cc+M^2c^2):(M^2+2mM+m^2)$, conſequenter priore per M, poſteriore per m multiplicato, prodit ſumma factorum ex maſſis $(M^3C^2+2Mm^2c^2+2M^2C^2m+M^2c^2m+Mm^2c^2+m^3c^2):(M^2+2mM+m^2)=MC^2+mc^2$, quæ eadem eſt ſumma ex factis maſſarum in quadrata celeritatum ante conflictum. Idem cum eodem modo in occurſu corporum directo oſtendatur; patet propoſitum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

426. Eadem itaque in conflictu conſervatur virium quantitas (§. 273).

PROBLEMA 61.

427. *Determinare motum corporum* A *&* B *oblique impingentium, ſive elaſticorum, ſive elateris expertium poſt conflictum.*

RESOLUTIO.

Motus corporis A per AC reſolvitur in duos alios ſecundum AE & AD & motus corporis B per BC ſimiliter in duos alios ſecundum BF & BG (§. 200) ſuntque celeritates per AD & BF ad celeritates per AC & BC ut ipſæ rectæ AD, BF, AC, BC (§. 203). Jam cum rectæ AE & BG ſint parallelæ, vires ſecundum has directiones agentes ſibi mutuo non opponuntur, adeoque in conflictu inſuper haben- Tab. IV. Fig. 55.

habendæ. Sed cum lineæ AD & BF, ſeu quod perinde eſt, EC & GC eandem rectam ad DC perpendicularem conſtituant, perinde eſt ac ſi corpora A & B ſolis velocitatibus, quæ ſunt ut EC & GC, directe ſibi mutuo occurrerent (§. 372). Determinetur itaque celeritas corporum A & B juxta ſuperiora. Sit e. gr. corporis A reſilientis celeritas ut CH. Quoniam motus per AE in conflictu non mutatur, fiat CK = AE & compleatur parallelogrammum HCKI; diagonalis CI deſignabit motum corporis A poſt conflictum, movebitur nempe poſt ictum corpus A juxta directionem CI & celeritate ut CI (§. 199). Eodem modo reperitur, corpus B reſiliens moveri per diagonalem parallelogrammi CM, in quo LM = BG. Sunt adeo celeritates poſt ictum ut CI ad CM. Quodſi poſt conflictum corpora A & B verſus eandem plagam tendant, utrumque parallelogrammum infra DO conſtruitur.

CAPUT XII.

De VI CENTRIFUGA ET CENTRIPETA.

DEFINITIO 54.

428. *Vis centrifuga* eſt vis, qua mobile circa centrum aliquod revolutum ab eo recedere conatur. E. gr. ſi corpus in peripheria circuli movetur, in quovis puncto A conatur progredi per tangentem AD (§. 58) &, ſi nihil obſtaret, actu progrederetur, adeoque eodem tempore, quo arculum AE deſcribit, a centro recederet quantitate rectæ DE ad AD perpendicularis per vim centrifugam (§. 200).

COROLLARIUM.

429. Eſt adeo vis centrifuga ut recta DE ad AD perpendicularis, ſi arcus AE infinite parvus (§. 200).

DEFINITIO 55.

430. *Vis centripeta* eſt vis, qua mobile per rectam AG progreſſurum retrahitur a motu rectilineo, ut in curva incedat.

COROLLARIUM 1.

431. Eſt itaque vis centripeta ut re-

ſta DE, ſi arculus AE infinite parvus.

COROLLARIUM 2.

432. Et hinc vis centripeta centrifugæ æqualis eſt.

DEFINITIO 56.

433. *Vires centrales* communi nomine dicuntur vis centrifuga atque centripeta.

THEOREMA 87.

Tab. V. Fig. 56. 434. *Si duo corpora pondere æqualia eodem vel æquali tempore motu æquabili peripherias circulorum inæqualium deſcribant, erunt vires centrales ut diametri* AB *&* HL.

DEMONSTRATIO.

Sit arculus AE infinite parvus, adeoque a ſubtenſa non differat. Quia peripheriæ eodem tempore deſcribuntur; ſi ex centro C ducatur radius CE, erit HK arculus eodem momento deſcriptus & ad peripheriam minorem ut alter AE ad majorem (§. 133 *Geom.*). Quodſi jam ducantur tangentes AD & HI atque ex punctis E & K ad illas perpendiculares ED & KI, △△ ADE & HIK eodem modo determinantur (§. 115 *Geom.*) adeoque ſimilia ſunt (§. 116 *Geom.*), conſequenter AE:HK = DE:IK (§. 166 *Geom.*). Sunt vero ut DE ad IK ita vis centralis in circulo majore ad vim centralem in minore (§. 429). Ergo vires centrales ſunt ut arcus AE & HK (§. 156 *Arithm.*), conſequenter ut peripheriæ circulorum, quas percurrunt, *per demonſtrata*, adeoque & ut diametri eorundem (§. 390 *Geom.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

435. Quodſi ergo vires centrales duorum corporum peripherias circulorum inæqualium deſcribentium fuerint ut diametri, temporibus æqualibus easdem percurrunt.

THEOREMA 88.

436. *Corporis in peripheria circuli incedentis vis centralis eſt ut arcus infinite parvi* AE *quadratum per diametrum* AB *diviſum.* Tab. V. Fig. 56.

DEMONSTRATIO.

Demittatur perpendicularis EM: erit in rectangulo ADEM AM = DE. Quoniam arcus infinite parvus AE a ſubtenſa non differt; erit BA : AE = AE : AM (§. 314 *Geom.*). Eſt ergo AM = DE = AE^2 : BA. Quare cum vis centralis ſit ut DE (§. 429); erit eadem ut AE^2 : BA. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

437. Cum ergo corpus motu æquabili tempuſculis æqualibus arculos æquales AE deſcribat (§. 27); vis centralis, qua corpus in peripheria circuli urgetur, conſtanter eadem eſt.

THEO-

THEOREMA 89.

ab. V. ig. 6. 438. *Si duo corpora diverſas peripherias motu æquabili deſcribant, vires centrales ſunt in ratione compoſita ex duplicata celeritatum & reciproca diametrorum.*

DEMONSTRATIO.

Sunt enim ut $AE^2 : AB$ ad $HK^2 : HL$ (§. 436), adeoque ut $AE^2 . HL$ ad $HK^2 . AB$ (§. 104 *Analyſ. finit.*). Sed cum arcus AE & HK eodem tempore deſcribantur, *per hypoth.* erunt iidem ut celeritates (§. 28). Sunt itaque vires centrales in ratione compoſita ex duplicata celeritatum & reciproca diametrorum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

439. Si celeritates fuerint æquales, erunt vires centrales reciproce ut diametri AB & HL (§. 172 *Arithm.*).

COROLLARIUM 2.

440. Si diametri AB & HL fuerint æquales, hoc eſt, ſi utrumque mobile in eadem peripheria, ſed diſpari celeritate, incedat; erunt vires centrales in ratione duplicata celeritatum (§. 172 *Arithm.*).

THEOREMA 90.

441. *Si duorum mobilium in diverſis peripheriis incedentium vires centrales fuerint æquales; erunt diametri circulorum* AB *&* HL *in ratione duplicata celeritatum.*

DEMONSTRATIO.

Vires enim centrales in eodem inſtanti ſunt $AE^2 : AB$ & $HK^2 : HL$ (§. 436). Quare $AE^2 : AB = HK^2 : HL$, *per hypoth.* conſequenter $AE^2 : HK^2 = AB : HL$ (§. 164 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 91.

442. *Si duo corpora in peripheriis inæqualibus eadem vi centrali urgentur, tempus in majori eſt ad tempus in minori in ratione ſubduplicata diametri majoris* AB *ad minorem* HL. Tab. V. Fig. 56.

DEMONSTRATIO.

Sit $AB = D$, $HL = d$, celeritas in majori peripheria $= C$, in minori $= c$, peripheria major $= P$, minor $= p$, tempus per illam $= T$, per hanc $= t$; erit $C^2 : c^2 = D : d$ (§. 441), adeoque $C : c = \sqrt{D} : \sqrt{d}$ (§. 239 *Arithm.*). Eſt vero $P : p = D : d$ (§. 390 *Geom.*). Ergo & $\frac{P}{C} : \frac{p}{c} = \frac{D}{\sqrt{D}} : \frac{d}{\sqrt{d}} = \sqrt{D} : \sqrt{d}$ (§. 197 *Arithm.*). Sed $\frac{P}{C}$ & $\frac{p}{c}$ ſunt tempora, quibus peripheriæ vel etiam arcus ſimiles, qui peripheriarum rationem habent (§. 163 *Arithm.*), deſcribuntur (§. 16). Ergo $T : t = \sqrt{D} : \sqrt{d}$. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

443. Eſt igitur $T^2 : t^2 = D : d$, hoc eſt, diametri circulorum, in quorum peripheriis mobilia eadem vi centrali urgentur, ſunt in ratione duplicata temporum.

COROLLARIUM 2.

444. Quoniam $C^2 : c^2 = D : d$ (§. 441), erit quoque $T^2 : t^2 = C^2 : c^2$ & $T : t = C : c$ (§. 104 *Analyſ. finit.*), hoc eſt, tempora, quibus peripheriæ aut arcus ſimiles percurruntur a mobilibus, eadem vi centrali impulſis, celeritatum rationem habent.

THEOREMA 92.

445. *Vires centrales ſunt in ratione compoſita ex directa diametrorum & reciproca quadratorum temporum per integras peripherias.*

DEMONSTRATIO.

Sint vires V & v, reliqua ut in demonſtratione præcedente: erit $V : v = \frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d}$ (§. 436). Sed $C = D : T$ & $c = d : t$ (§. 16). Ergo $V : v = \frac{D^2}{DT^2} : \frac{d^2}{dt^2}$ (§. 176. 156 *Arithm.*), conſequenter $V : v = \frac{D}{T^2} : \frac{d}{t^2} = Dt^2 : dT^2$ (§. 104 *Analyſ. finit.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 93.

446. *Si tempora, quibus in peripheriis integris aut arcubus ſimilibus mobilia feruntur, ſunt ut diametri circulorum, vires centrales ſunt reciproce ut eædem diametri.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam $T : t = D : d$, *per hypoth.* & $V : v = \frac{D}{T^2} : \frac{d}{t^2}$ (§. 445); erit etiam $V : v = \frac{D}{D^2} : \frac{d}{d^2} = \frac{1}{D} : \frac{1}{d} = d : D$. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

447. Quoniam $V : v = \frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d}$ (§. 436); erit $\frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d} = d : D$, conſequenter $C^2 : c^2 = Dd : Dd$ (§. 176 *Arithm.*). Sunt itaque celeritates hoc in caſu æquales.

THEOREMA 94.

448. *Si corpus quoddam in peripheria circuli motu uniformi incedat, ea quidem celeritate, quæ acquiritur per altitudinem* AL *cadendo; erit vis centralis ad gravitatem ejus ut dupla altitudo* AL *ad radium* CA. Tab. V. Fig. 56.

DEMONSTRATIO.

Eo tempore, quo grave cadit per AL, motu uniformi deſcriberet 2 AL, nempe celeritate, quam caden-

cadendo per AL acquiſivit & qua per AE movetur (§. 78). Eſt igitur tempus per AE ad tempus per AL ut AE ad 2 AL (§. 28), & hinc reperitur ſpatium eodem tempore a gravi cadente percurſum, quo percurritur AE, $= AL. AE^2 : 4 AL^2 = AE^2 : 4 AL$ (§. 81). Eſt vero vis centralis ad gravitatem, in eodem corpore in ratione celeritatum, quas vires iſtæ producunt (§. 127) adeoque ſpatiorum eodem tempore motu æquabili deſcriptorum (§. 25). Quare cum ſpatium eo inſtanti, quo vi gravitatis conficitur $AE^2 : 4 AL$, ſit $AE^2 : BA$ (§. 436); erit vis centralis ad gravitatem ejus ut $AE^2 : BA$ ad $AE^2 : 4 AL$, hoc eſt, ut 4 AL ad BA, ſeu 2 AL ad CA (§. 104 *Analyſ. infinit.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

449. Quodſi adeo gravitas corporis dicatur G; erit vis centrifuga $2 AL. G : CA$.

THEOREMA 95.

450. *Si grave in peripheria circuli æquabili motu feratur ea quidem celeritate, quam acquirit cadendo per altitudinem* AL *dimidio radio æqualem; vis centralis erit gravitati æqualis.*

DEMONSTRATIO.

Vis centralis eſt $2 AL. G : CA$ (§. 449). Quare ſi $AL = \frac{1}{2} CA$; eadem erit $CA. G : CA = G$. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

451. Ergo ſi gravitati vis centralis æqualis eſt, ea celeritate in peripheria circuli fertur, quam cadendo per altitudinem radio dimidio æqualem acquirit.

THEOREMA 96.

452. *Si vis centralis gravitati æqualis eſt, tempus per peripheriam integram eſt ad tempus deſcenſus per dimidium radium ut peripheria ad radium.*

DEMONSTRATIO.

Spatium motu uniformi cum ea celeritate percurſum, quæ cadendo per $\frac{1}{2}$ CA acquiritur, eſt in tempore æquali $=$ CA (§. 79). Quare cum peripheria circuli eadem celeritate uniformiter percurratur; erit tempus per peripheriam ad tempus deſcenſus per dimidium radium ut peripheria ad radium CA (§. 26). *Q. e. d.*

THEOREMA 97.

453. *Si duo corpora in peripheriis inæqualibus celeritate inæquali incedant, quæ ſit reciproce in ratione ſubduplicata diametrorum; vires centrales ſunt in ratione duplicata diſtantiarum a centro virium reciproce ſumtarum.*

DE-

DEMONSTRATIO.

Si celeritates fuerint C & *c*, diametri D & *d*, vires V & *v*; erit $V : v = \frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d}$ (§.438). Sed $C : c = \sqrt{d} : \sqrt{D}$, *per hypoth.* adeoque $C^2 : c^2 = d : D$ (§.239 *Arithm.*). Ergo $V : v = \frac{d}{D} : \frac{D}{d} = d^2 : D^2$ (§.104 *Analyſ. finit.*), $= \frac{1}{4}d^2$ ad $\frac{1}{4}D^2$ (§.172 *Arithm.*), hoc eſt, reciproce ſunt ut quadrata radiorum ſeu diſtantiarum. *Q.e.d.*

THEOREMA 98.

454. *Si duo corpora in peripheriis inæqualibus celeritatibus incedunt, quæ ſunt reciproce ut diametri; erunt vires centrales reciproce ut cubi diſtantiarum a centro virium.*

DEMONSTRATIO.

$V : v = \frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d}$ (§.438). Sed $C : c = d : D$ *per hypoth.* adeoque $C^2 : c^2 = d^2 : D^2$ (§.329 *Arithm.*). Ergo $V : v = \frac{d^2}{D} : \frac{D^2}{d} = d^3 : D^3$ (§.104 *Analy. finit.*) $= \frac{1}{8}d^3 : \frac{1}{8}D^3$ (§.172 *Arithm.*), hoc eſt, vires centrales reciproce ſunt ut cubi radiorum ſeu diſtantiarum a centro virium. *Q.e.d.*

THEOREMA 99.

455. *Si duorum corporum in peripheriis inæqualibus latorum celeritates fuerint reciproce in ratione ſubduplicata diametrorum; tempora, quibus integras peripherias aut arcus ſimiles percurrunt, ſunt reciproce in ratione triplicata diſtantiarum a centro virium.*

DEMONSTRATIO.

Sint tempora T & *t*, celeritates C & *c*, diametri D & *d*. Cum tam peripheriæ (§.390 *Geom.*) quam arcus ſimiles (§.163 *Arithm.*) diametrorum rationem habeant; erit $T : t = \frac{C}{D} : \frac{c}{d}$ (§.16). Eſt vero $C : c = \sqrt{d} : \sqrt{D}$, *per hypoth.* Ergo $T : t = \frac{\sqrt{d}}{D} : \frac{\sqrt{D}}{d} = d\sqrt{d} : D\sqrt{D}$ (§.104 *Analyſ. finit.*) $= \sqrt{d^3} : \sqrt{D^3}$ (§.57 *Analyſ. finit.*), conſequenter $T^2 : t^2 = d^3 : D^3$ (§.239 *Arithm.*) $= \frac{1}{8}d^3 : \frac{1}{8}D^3$ (§.172 *Arithm.*). *Q.e.d.*

COROLLARIUM.

456. Ergo ſi vires centrales ſunt reciproce in ratione diſtantiarum a centro duplicata, tempora, quibus peripheriæ integræ aut arcus ſimiles percurruntur, ſunt reciproce in triplicata earundem diſtantiarum.

THEOREMA 100.

457. *Si duorum corporum in peripheriis inæqualibus incedentium celeritates fuerint ut diametri reciproce,*

proce, tempora ſunt reciproce in ratione duplicata diſtantiarum a centro.

DEMONSTRATIO.

Quia $C : c = d : D$, *per hypoth.* & peripheriæ (§. 390 *Geom.*) atque arcus ſimiles (§. 163 *Arithm.*) ſunt ut radii, adeoque $T : t = \frac{C}{D} : \frac{c}{d}$ (§. 16); erit $T : t = \frac{d}{D} : \frac{D}{d} = d^2 : D^2$ (§. 104 *Analyſ. finit.*) $= \frac{1}{4}d^2 : \frac{1}{4}D^2$ (§. 172 *Arithm.*), hoc eſt, tempora ſunt reciproce in ratione duplicata radiorum ſeu diſtantiarum a centro. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

458. Si ergo vires centrales ſunt reciproce ut cubi diſtantiarum a centro virium, tempora, quibus integræ peripheriæ aut arcus ſimiles percurruntur, ſunt reciproce ut quadrata earundem (§ 454).

THEOREMA 101.

459. *Si corpus in linea curva verſus easdem partes cava ea lege incedat, ut radius CB ex ipſo in punctum fixum C, quod in eodem plano ſitum eſt, ductus areas BAC, BCE &c. deſcribat temporibus proportionales, ſeu dato tempore æquales; a vi centripeta verſus punctum C urgetur.*

DEMONSTRATIO.

Progrediatur corpus ſola vi inſita per rectam ſeu arcum infinite parvum AB dato minimo quovis inſtanti; momento itaque altero ab eadem promoveretur per BD ipſi AB æqualem (§. 26) & in directum ſitam (§. 58). Sed per vim centripetam a DB retrahitur & per arculum BE incedere cogitur, eſtque △ CAB = △ BEC, *per hypoth.* & ducta recta CD, ob AB = DB, *per demonſtrata*, △ CDB = CBA (§. 367 *Geom.*). Ergo △ CDB = △ CEB (§. 79 *Arithm.*), conſequenter perpendicula ex E & D in BC demiſſa æqualia ſunt (§. 367 *Geom.*) & hinc DE ipſi FB parallela (§. 215 *Geom.*). Cum adeo vires, quibus urgetur mobile per diagonalem BE parallelogrammi DEFB, agant juxta directiones BD & BF (§. 199), vis centripeta in B tendit ad punctum C. Idem cum eodem modo in quovis alio elemento curvæ demonſtretur, patet vim centripetam a motu rectilinio verſus C retrahere mobile. *Q. e. d.*

THEOREMA 102.

460. *Si corpus ſecundum directionem rectæ AD progrediatur & una a vi centripeta ad punctum fixum C in eodem plano ſitum urgeatur; curvam deſcribit verſus C cavam, cujus areæ quæcunque duobus radiis AB & CB comprehenſæ ſunt temporibus, quibus deſcribuntur, proportionales.* Tab. V. Fig. 57.

Mmmm   *DE-*

DEMONSTRATIO.

Vis enim inſita vel impreſſa cum agat juxta BD & centripeta juxta BF ſeu BC, *per hypoth.* viribus conjunctis deſcribitur diagonalis BE parallelogrammi DEFB (§. 199). Quoniam itaque quovis inſtanti directio mobilis a vi centripeta mutatur, curva deſcribitur (§. 20 *Geom.*), eaque verſus C cava, quia quælibet particula curvæ BE a proxima AB verſus centrum C declinat. *Quod erat unum.*

Sunt vero ob AB = DB *per hypoth.* △△ ABC & BCD æqualia (§. 367 *Geom.*) & ob ED & BC parallelas (§. 199) △△ BCD & BCE itidem æqualia ſunt (§. 367 *Geom.*), conſequenter ABC = BCE. Quod cum eodem modo demonſtretur de triangulis quotcunque aliis æqualibus tempuſculis deſcriptis; patet, areas rectis ex centro C ductis interceptas temporibus, quibus deſcribuntur, æquales eſſe. *Quod erat alterum.*

CAPUT XIII.
DE
MACHINIS SIMPLICIBUS.

DEFINITIO 57.

461. *Machina* vocatur, quicquid ad motum producendum conducit, ut vel virium, vel temporis compendio efficiatur.

SCHOLION.

462. *Quoniam effectus machinarum ex ſtructura ipſarum ſecundum immutabiles motuum leges conſequuntur; omnes operationes rerum corporearum mechanicæ dicuntur, quia agunt ſtructuræ ſuæ convenienter & juxta æternas motuum leges.* Hinc *manifeſtum eſt, illum demum mechanice philoſophari, qui evidenter oſtendit, quomodo vi legum motus effectus rerum ex ſtructura ipſarum conſequantur. Nec difficulter hinc colligitur, paucos admodum eſſe, qui mechanice philoſophantur. Apparet etiam, philoſophiam mechanicam liberam eſſe ab ea labe, quam imperiti eidem adſpergere conantur. Immo nec obſcurum eſt, ſine Matheſeos præſidio de rebus naturalibus temere philoſophari.*

DEFINITIO 58.

463. Per *Potentiam* intelligo, vim, quæ machinæ applicata ad motum tendit, ſive actu eundem producat, ſive non. In priore caſu dicitur *Potentia movens*; in poſteriore *Potentia ſuſtentans.*

DEFINITIO 59.

464. *Pondus* appello, quod ope machinæ vel ſuſtentatur, vel movetur, vel motui producendo utcunque reſiſtit.

DEFINITIO 60.

Tab. V. Fig. 58. 465. *Vectis* eſt linea recta inflexilis & gravitatis expers AB, unico ſui puncto C fulcro firmo D innixus, circa quod moveri poteſt.

COROLLARIUM.

466. Omnia ergo inſtrumenta, in quibus rectam circa punctum fixum mobilem concipere licet, cui uno in loco pondus aliquod in alio potentia in uſu applicatur, ad vectem revocantur, conſequenter quæ de vecte demonſtrantur, ad eadem recte applicantur.

SCHOLION 1.

467. *Ex natura vectis adeo ratio redditur non modo ſtructuræ & effectuum omnium inſtrumentorum in officinis artificum atque opificum, nec non paſſim in vita communi obviorum; ſed & motuum animalium: quod poſterius primus docuit* Johannes Alphenſus Borellus *in peculiari* de motu animalium *opere.*

SCHOLION 2.

468. *In genere autem notandum eſt, ubi machinarum leges inveſtigamus, non conſiderari materiam, ex qua conſtant, nec materiæ affectiones neque varias figuras, quæ ob certos uſus inducuntur; ſed tantum eorum rationem haberi, quæ machinæ eſſentiam abſolvunt, ut nempe conſtet, quæ machinæ qua tali conveniant. Quodſi enim contingat, vel materiam, vel figuram, vel aliud quodcunque obſtaculum impedire, quo minus lex iſta accurate obſervari queat; ea ex ſuis principiis ſeorſim ſunt determinanda.*

DEFINITIO 61.

469. *Hypomochlium* eſt fulcrum, cui vectis innititur.

DEFINITIO 62.

470. *Vectis homodromus* eſt, in quo pondus medium locum tenet inter locum potentiæ B & hypomochlium C, vel potentia A medium locum occupat inter locum ponderis B & hypomochlium C. Tab. V. Fig. 59.

DEFINITIO 63.

471. *Vectis heterodromus* eſt, in quo hypomochlium medium locum C tenet inter locum ponderis A & locum potentiæ B. Tab. V. Fig. 58.

DEFINITIO 64.

472. A*xis in peritrochio* eſt circulus AB baſi cylindri concentricus & una cum ipſo circa axem ejus EF mobilis. Cylindrus ille A*xis*, *circulus Peritrochium*, radii circuli (qui ſubinde ſoli comparent) *Scytalæ* appellantur. Tab. V. Fig. 60.

SCHOLION.

473. *Proprie per axem intelligitur virga ferrea, cui circumpoſitus eſt cylindrus ligneus ſcytalis inſtructus. Enimvero rationem paulo ante reddidi* (§. 468), *cur definitiones ad geometriam puram revocari conſultum ſit.*

COROLLARIUM.

474. Axi adeo in peritrochio locus eſt, quotiescunque in motu machinæ concipere licet circulum circa axem fixum deſcriptum & cylindri huic circumpoſiti plano concentricum.

DEFINITIO 65.

Tab. V. Fig. 61. 475. *Trochlea* eſt circulus circa centrum C volubilis.

DEFINITIO 66.

Tab. V. Fig. 62. 63. 476. *Cochlea* eſt cylindrus rectus AB ſpirali ſimiliter ſulcatus. Deſcribitur autem illa ſpiralis ſi recta FG motu æquabili in ſuperficie cylindri circumferatur & interea punctum I ex F verſus G motu itidem æquabili deſcendit. *Cochlea mas* eſt, ſi ſuperficies convexa; *Cochlea fœmina* vero, ſi concava fuerit ſulcata.

SCHOLION.

477. *Mas & fœmina, ſi motus gigni debet, ſemper conjunguntur. Loquor nimirum de cochleæ ſimplicis uſu. Si enim cum axe in peritrochio conjungitur; fœmina opus non eſt, cum is vices ejus adimpleat. Sed hoc in caſu machina compoſita prodit.*

DEFINITIO 67.

Tab. V. Fig. 63. 478. *Cuneus* eſt priſma triangulare, cujus baſes ſunt triangula æquicrura acutangula.

AXIOMA 6.

479. *Potentia æqualis eſt ponderi quod, ſalvo effectu, in ejus locum ſubſtitui poteſt.*

SCHOLION.

480. *Patet ex ipſa æqualitatis definitione* (§. 15 Arithm.).

THEOREMA 103.

481. *Si potentia B vecti ſive homodromo, ſive heterodromo applicata ſuſtentat pondus in A applicatum, rationem reciprocam diſtantiarum ab hypomochlio ad pondus habet.* Tab. V. Fig. 58.

DEMONSTRATIO.

Sit primum vectis AB heterodromus. Quoniam ſupponitur horizonti parallelus; linea directionis utriusque ponderis erit ad ipſum perpendicularis, centrumque gravitatis unius in A, alterius in B (§. 173). Quodſi ergo pro potentia in B applicata ſubſtituatur pondus æquale; habebimus duo pondera, quorum centra gravitatis recta AB connectuntur, eaque in æquilibrio, cum potentia pondus ſuſtentet *per hypoth.* Eſt igitur C centrum gravitatis commune (§. 85), conſequenter pondus in B, hoc eſt, potentia ad pondus in A reciproce ſe habet ut AC ad CB (§. 106). *Quod erat unum.*

Si vectis fuerit homodromus CB, ponderis A non aliam partem ſuſtentat potentia in B applicata, quam quæ ferenda eſt a fulcro ibi ſuppo- Tab. V. Fig. 59.

ſuppoſito. Eſt igitur ad pondus A ut diſtantia ponderis ab hypomochlio AC ad diſtantiam potentiæ CB (§. 189). *Quod erat ſecundum.*

ab. V. g. 5. Si vectis fuerit inclinatus, hoc eſt, ſi linea directionis ponderis & potentiæ cum vecte AB angulum efficiat obliquum, erunt CD & CE ad lineas directionis AF & EG perpendiculares diſtantiæ a centro motus C (§. 187), conſequenter eodem, quo ante, modo demonſtratur, potentiam ſuſtentantem, quæ in B applicatur, eſſe ad pondus in A ſuſpenſum ut DC ad CE. *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM.

482. Quodſi potentia, quæ pondus ſuſtentat, augeatur, præpollebit, adeoque dato vecte pondus movebit.

SCHOLION.

483. *Facile itaque ad vectem ea omnia transferuntur, quæ ſuperius de æquiponderantibus* (§. 106 & ſeqq. itemque 188 & ſeqq.) *demonſtrata ſunt.*

PROBLEMA 62.

484. *Data gravitate vectis heterodromi AB diſtantia centri gravitatis ab hypomochlio CV, diſtantiis ponderis atque potentiæ AC & CB, una cum pondere A, invenire potentiam, quæ ipſum ſuſtentare valet.*

RESOLUTIO.

1. Concipiamus vectem gravitatis expertem & ejus loco in V appenſum pondus eidem æquale. Quodſi fiat ut AC ad CV ita gravitas vectis ad quartum: reperietur pondus, quod vectis ſuſtentate valet (§. 481).

2. Subtrahatur id a pondere dato, reſiduum erit pondus a potentia ſuſtentandum.

3. Fiat igitur ut CB ad CA ita pondus reſiduum ad quartum: & reperietur potentia in B applicanda, ut dato vecte datum pondus ſuſtentet (§. 481).

Sit e. gr. CA = 1, CV = 2, CB = 5, G = 10 librarum, O = 300. Fiat

1 — 2 — 10   5 — 1 — 280
10   1
20   280
300   3
280   280 (56 Potentia.
     55

PROBLEMA 63.

485. *Datis gravitate vectis heterodromi AB, diſtantia centri gravitatis ab hypomochlio CV, diſtantiis potentiæ atque ponderis BC & CA, invenire pondus ſuſtentandum.* Tab. V. Fig. 58.

RESOLUTIO.

1. Quæratur ut in problemate præcedente pars ponderis, a vecte ſolo ſuſtentandi.

2. Quæratur eadem ratione pars alte-

altera ponderis, quam potentia in B applicata ſuſtentare valet.

3. Jungantur partes ſigillatim repertæ in unam ſummam. Ita prodit pondus quæſitum.

Sit e. gr. CA = 1, CV = 2, CB = 5, G = 10, potentia 56 librarum: invenietur

ponderis pars prima = 20
altera = 280

pondus integrum = 300

PROBLEMA 64.

Tab. V. Fig. 58. 486. *Datis gravitate vectis heterodromi* AB, *pondere ſuſtentando* G, *potentia in* B *applicanda*, *longitudine ac centro gravitatis vectis* V, *invenire centrum gravitatis commune ſeu centrum motus* C

RESOLUTIO.

1. Concipiatur vectis gravitatis expers & ejus loco in centro gravitatis V appenſum pondus G. Quæratur centrum gravitatis commune Z potentiæ in B applicatæ & ponderis G (§. 111).
2. Subtrahatur ZB ex AB, relinquetur AZ.
3. Concipiatur denique in Z appenſum pondus, gravitati vectis & potentiæ junctim ſumtis æquale, & inveniatur hujus ponderis & ponderis dati O centrum gravitatis commune C (§. 111), quod quærebatur.

E. gr. Sit potentia in B 56, gravitas vectis 10, pondus O 300 librarum, AB = 6, VB = 3. Fiat

66 — 10 — 3

$\frac{3}{30}$ ZB = $\frac{30}{66}$ = $\frac{5}{11}$

AB = $\frac{66}{11}$

AZ = $\frac{61}{11}$

366 — 66 — $\frac{61}{11}$

h. e. 61 11 $\frac{61}{11}$ 61 (1 = AC

11 61

61

PROBLEMA 65.

487. *Datis gravitate & centro gravitatis* F *vectis homodromi* CB, *pondere* G, *diſtantia ejus ab hypomochlio* CA, *una cum diſtantia potentiæ* CB, *invenire potentiam, quæ pondus ſuſtentare valet.* Ta V Fig 59

RESOLUTIO.

1. Concipiatur vectis gravitatis expers & ejus loco in F appenſum pondus ei æquale, quæraturque potentia vectem ſolum ſuſtentatura (§. 481).
2. Quæratur porro potentia requiſita ad pondus datum G ſuſtentandum (§. *cit.*).
3. Addantur potentiæ ſigillatim repertæ in unam ſummam. Ita prodit potentia quæſita.

Sit e. gr. CA = 1, CF = 3, CB = 6, pondus datum 300, gravitas vectis 10 librarum. Reperietur potentia vectem ſuſten-

ſuſtentatura 5, pondus vero ſolum ſuſtentatura 50, adeoque potentia integra 55.

THEOREMA 104.

488. *Si potentia vecte ſive heterodromo, ſive homodromo pondus attollit, ſpatium illius eſt ad ſpatium hujus ut hoc ad potentiam, quæ idem pondus tantum ſuſtentare valet.*

DEMONSTRATIO.

Dum pondus attollitur per arcum A*a*, potentia movetur per arcum B*b*. Sunt vero arcus A*a* & B*b* ſimiles, in vecte heterodromo ob angulos verticales ad C æquales (§. 151 *Geom.*); in homodromo, quia concentrici, conſequenter A*a*:B*b* = AC : CB (§. 390 *Geom.* & §. 163 *Arithm.*) ſed ut AC ad CB ita potentia ad pondus, quod ſuſtentare valet (§. 481). Ergo ſpatium potentiæ ad ſpatium ponderis ut pondus ad potentiam, quæ idem ſuſtentare valet (§. 156 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

489. Lucrum itaque virium cum temporis diſpendio conjungitur & contra.

PROBLEMA 66.

490. *Stateram conſtruere, hoc eſt, inſtrumentum, quo unico pondere mediante diverſorum corporum gravitatem explorare licet.*

RESOLUTIO.

1. In virga ferrea aut lignea, aut ex quacunque materia alia parata, AB aſſumatur ad arbitrium punctum C & in eo perpendiculariter erigatur examen ſeu lingula CD. Tab. V. Fig. 66.
2. Jugum intra trutinam ſeu ſcapum GF ſuſpendatur &
3. Brachium minus AC unco AH & lance G alioque quocunque modo oneretur, donec majori æquilibretur, aut non multum ab æquilibrio abſit.
4. Pondus I huc illucque promoveatur, donec cum una, duobus, tribus, quatuor &c. libris in lance G collocatis æquilibretur, notentur puncta, in quibus I ponderat ut una, duo, tres, quatuor &c. libræ.

Ipſa conſtructio loquitur, hoc modo unici ponderis I ope pondera corporum admodum differentium explorari poſſe (§. 481).

SCHOLION 1.

491. *Quodſi onera ingentia, quales ſunt currus foeno onuſti, ponderanda, non opus eſt, ut ad æquilibrium reducantur brachia; ingentes vero illæ ſtateræ trutina & lingula non habent opus. Situs enim jugi horizontalis, quantum ad praxin ſufficit, nudo oculo facile dignoſcitur.*

SCHOLION 2.

492. *Empirica ſtateræ, qua utuntur artifices, diviſio geometricæ præferenda eſt, qua tra-*

brachium longius BC ejuſdem ubique ſpiſſitudinis in partes æquales dividi jubetur. Neque enim materiæ conditio artificumque negligentia patitur, ut conſtructio ſatis ſit accurata.

SCHOLION 3.

493. *Cum pondera non ubivis locorum æqualia ſint; ſtateræ quoque empirico modo conſtructæ univerſales non ſunt.*

SCHOLION 4.

494. *Utut autem commodiſſimus ſit ſtateræ uſus, quia non multis opus eſt ponderibus & axis minus gravatur; e vita tamen communi eam proſcribi præſtat, quoniam venditores fraudulenti fallacem facile reddunt, nec adeo in promptu ſit fallaciam retegere. Ad communem itaque uſum conſtruuntur libræ æqualium brachiorum. Sed antequam conſtructionem tradamus, fundamenta quædam theoretica ſunt præmittenda.*

THEOREMA 105.

Tab. V. Fig. 67. 495. *Si libra, cujus centrum motus C fuerit ſupra rectam, e cujus extremis pendent pondera æqualia H & I, horizonti ſit parallela, quieſcit; ſed ſi inclinatur, tamdiu movetur, donec iterum horizonti ſit parallela.*

DEMONSTRATIO.

Si enim jugum AB horizonti parallelum, lineæ directionis ponderum ad eam ſunt perpendiculares, (§. 173) adeoque brachia AL & LB coincidunt cum diſtantiis a centro motus (§ 187) Quare cum ſit AL=LB, erit in L centrum gravitatis commune ponderum (§. 107). Ex hoc igitur ſuſpenſa quieſcunt (§. 87). *Quod erat unum.*

Quodſi ex ſitu ſuo dimoveatur, ducatur CD ad horizontem perpendicularis & GF cum eodem parallela: erunt diſtantiæ GE & EF, quæ cum inæquales ſint, pondera non æquilibrantur (§. 481), redit itaque libra in ſtatum horizonti parallelum (§. 114). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 106.

496. *Si libra, æqualibus ponderibus utrinque onuſta, cujus centrum motus infra jugum AB, fuerit horizonti parallela, quieſcit; ſi vero inclinatur, in ſitum horizontalem non revertitur, ſed deſcendit pondus unum, donec libra pervenerit in ſitum priori contrarium.* Tab. V. Fig. 68.

DEMONSTRATIO.

Si jugum AB fuerit horizontale, erunt lineæ directiones ponderum H & I ad id perpendiculares (§. 173), adeoque diſtantiæ a centro motus rectæ AL & LB (§. 187). Eſt vero AL = LB, ex natura libræ, adeoque cum pondera itidem æqualia ſint, *per hypoth.* centrum gravitatis commune eorundem eſt in C (§ 107), adeoque ſitum non mutat (§. 87). *Quod erat unum.*

Si jugum inclinetur, ducatur DC ad horizontem perpendicularis & per E recta GF eidem parallela; erunt diſtantiæ GE & EF a cen-

a centro motus C inæquales. Præponderat ergo H ex majori diſtantia EG adeoque continuo deſcendit, donec A, B & L ſint in eadem recta (§. 114). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 107.

ab. 497. *Si libra, æqualibus ponderibus utrinque onuſta, cujus centrum* g. *motus C in ipſo jugo AB, fuerit ho-* 9. *rizonti parallela, quieſcit, nec quomodocunque inclinata ſitum mutat.*

DEMONSTRATIO.

Prius eodem modo patet, quo in theoremate præcedente. Poſterius ita demonſtratur. Ducatur DE per C horizonti parallela, erunt DC & CE diſtantiæ ponderum H & I (§. 187). Sed ob rectos ad E & D atque verticales angulos ad C æquales (§. 150 *Geom.*), itemque AC = CB, ex natura libræ, erit DC = CE (§. 236 *Geom.*). Quare cum pondera H & I æqualia ſint *per hypoth.* adhuc æquilibrantur (§. 107). Libra igitur quieſcit. *Q. e. d.*

PROBLEMA 67.

498. *Libram conſtruere, hoc eſt, inſtrumentum, in cujus extremitatibus appenſa gravia æqualia æquiponderant in ſitu horizontali.*

RESOLUTIO.

1. Jugum AB bifariam dividatur in C, ita, ut brachia AC & CB ſint ejuſdem longitudinis, ſintque tum brachia cum uncis ſuis A & B, tum lances D & E ejuſdem prorſus ponderis, ita ut jugum ex puncto C appenſum tam lancibus inſtructum, quam ſine iisdem ſitum tueatur horizontalem. Tab. V. Fig. 70.
2. In medio jugi puncto C excitetur perpendiculariter examen ſive lingula CF.
3. Jugum denique intra trutinam HI ita ſuſpendatur, ut centrum motus C ſit paulo ſupra jugum ſeu rectam AB, quæ appenſionum puncta A & B conjungit, vel ut centrum motus ſit in ipſa recta AB.

Dico, ſi libra ex trutina HI ſuſpenſa examen intra eandem abſcondatur, gravia lancibus impoſita eſſe æqualia, ſeu gravitatem utriusque eſſe eandem.

DEMONSTRATIO.

Si libra ex I ſuſpendatur, erit trutina HI ad lineam horizontalem perpendicularis (§. 173). Quod ſi ergo lingula intra eam abſconditur, cum ea ſit ad jugum AB perpendicularis *per conſtructionem*, jugum AB erit horizonti parallelum. Quare cum centrum motus C ſit vel in jugo AB, vel ſupra jugum, *per conſtruct.* pondera utrinque ſuſpenſa æqualia ſunt (§. 495. 497). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

499. Si brachia ſint inæqualia, libra doloſa eſt.

SCHOLION 1.

500. *Præſtat brachia eſſe longiora, quam breviora, quia idem error in diviſione brachiorum admiſſus minorem in ponderibus producit, ſi brachia longiora, quam ſi breviora. Fac enim brachium AC eſſe juſto longius uno ſcrupulo quarto ſeu una decima lineæ. Si brachium AB* $= 5''$, *erit* AB : AC = 500 : 501. *Si AB* $= 5'$; *erit AB : AC* = 5000 : 5001. *In caſu itaque poſteriori differentia brachiorum eſt* $\frac{1}{5000}$; *in priore* $\frac{1}{500}$ *brevioris. Hinc & pondus majus in caſu poſteriore excedere debet minus* $\frac{1}{5000}$ *ſui, in priore autem* $\frac{1}{500}$ *ſui.*

SCHOLION 2.

501. *Vulgares libræ ita conſtruuntur, ut centrum motus ſit paulo altius jugo, quo libra ex ſitu horizontali emota, ponderibus utrinque æqualibus appenſis, non quieſcat, niſi eidem reſtituta* (§. 495). *Non tamen nimis ab eo removeri debet, ut lingula minores declinationes indicet.*

SCHOLION 3.

502. *Ne affrictus impediat jugi e ſitu horizontali emotionem, axis ejus, qui trutinæ inſeritur, cylindricus ſit & foramen in trutina rotundum, ut contactus exiguus evadat. Immo motus jugi pernicior evadit, ſi axis in aciem deſinat, qua parte trutinam tangit. Unde & jugum leve ac tenue eſſe debet, quantum per materiam ponderandam fieri poteſt, ut minori vi e ſitu ſuo dimoveatur ſicque accuratius indicet æquilibrium.*

PROBLEMA 68.

503. *Libram propoſitam examinare, utrum accurata ſit, nec ne.*

RESOLUTIO.

Permutentur lances aut pondera in iis æquilibrata. Quodſi enim maneat æquilibrium, libra accurata eſt; ſin minus, doloſa.

DEMONSTRATIO.

Si enim libra doloſa eſt, brachia inæqualia ſunt (§ 499) adeoque lanx ex majori brachio ſuſpenſa levior altera (§. 481). Quare ſi lancem leviorem e minori, graviorem e majori brachio ſuſpendas; præponderabit e majori brachio ſuſpenſa adeoque æquilibrium tollitur (§. 114). *Q. e. d.*

PROBLEMA 69.

504. *Libra doloſa verum pondus mercis explorare.* Ta V. Fi 7

RESOLUTIO.

1. Merce in lance E collocata, notetur pondus in altera D ipſi æquilibratum.
2. Eadem tranſlata in D, notetur pondus in E ipſi æquilibratum.
3. Pondera iſta in ſe invicem ducantur &
4. Ex facto radix quadrata extrahatur. Dico, hanc eſſe verum mercis pondus.

Sit e. gr. pondus in E = 10, in D = 9 librarum, reperietur verum mercis pondus $9\frac{48}{100}$.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim ut AC ad BC ita merx

ad

ad pondus in D poſitum & ut AC ad BC ita pondus in E ad mercem (§. 481). Ergo mercis pondus eſt medium proportionale inter pondera in lancibus D & E collocata (§. 156 *Arithm.*), conſequenter æquale radici ex facto ponderum in ſe invicem extractæ (§. 271 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

505. Si verum mercis pondus inventum, ratio brachiorum non amplius latet. Eſt enim AC ad CB ut pondus mercis ad pondus in D ipſi æquilibratum, e. gr. in noſtro exemplo ut 948 ad 900 ſeu ut 237 ad 225 (§. 172 *Arithm.*).

COROLLARIUM 2.

506. Data ratione brachiorum AC & CB facile determinatur error in æquilibrio admiſſus (§. 481). Æquiponderent e. gr. in lance E 100 libræ merci in altera D collocatæ, ut habeatur quæſitum, fiat

237 — 225 — 100

100   237) 225.00 (95 fere

———   2133

22500   ———

1170

1185

Dolus ergo committitur 5 librarum.

COROLLARIUM 3.

507. Invenitur quoque pars, qua brachium longius excedit minus, iisdem datis. Sit enim jugum integrum 100 partium. Fiat ut ſumma brachiorum 237 + 225 ſeu 462 ad majus 237 ita 100 ad idem brachium in partibus jugi centeſimis 513 fere. Sed ex natura libræ eſſe debet 500: excedit ergo veram quantitatem particulis 13, qualium ſcilicet jugum eſt 100.

THEOREMA 108.

508. *Si potentia ope axis in peritrochio ſuſtentet pondus G ſitque li-* Tab. VI.
nea directionis AL *ad peripheriam* Fig.
rotæ vel ad ſcytalam perpendicula- 71.
ris; erit ut radius axis CE ad radium rotæ CA *ſeu longitudinem ſcytalæ ita potentia ad pondus.*

DEMONSTRATIO.

Quodſi potentia in A applicata deprimit rotam vel ſcytalam, perinde eſt ac ſi vecte heterodromo ACE, cujus centrum motus in C, pondus G ſuſtentaret. Si vero in *a* applicata eandem attollit, perinde eſt ac ſi vecte homodro *a*EC pondus idem G ſuſtentaret. Omnes enim machinæ partes reliquæ ad ponderis ſuſtentationem nil conferunt, cum utrinque ſibi mutuo æquilibrentur, ut machina tanquam gravitatis expers conſiderari poſſit. Jam cum linea directionis potentiæ in A vel *a* ſit ad AC vel *a*C perpendicularis, *per hypoth.* & funis EG a pondere G extenſus ad EC horizontalem *per hypoth.* ſimiliter normalis (§. 173); erit ut

CE ad CA vel ut EC ad C*a* ita potentia ad pondus (§. 48). *Q. e. d.*

THEOREMA 109.

Tab. VI. Fig. 71. 509. *Si potentia in F deprimat rotam juxta lineam directionis FD ad radium rotæ obliquam ſed directioni perpendiculari parallelam; ad potentiam, quæ juxta directionem perpendicularem* AL *agit, eam habet rationem, quam ſinus totus ad ſinum anguli directionis* DFC.

DEMONSTRATIO.

Quoniam FD perpendicularis ad AC, *per hypoth.* erit DC potentiæ in F applicata diſtantia a centro motus C (§. 187). Eſt ergo ut potentia in F ad pondus G ita EC ad CD (§. 481) & ut potentia in A ad pondus G ita EC ad CA (§. 508). Ergo potentia in F ad potentiam in A ut DC ad AC (§. 168 *Arithm.*). Sed ſi AC vel FC (§. 38 *Geom.*) ſumatur pro ſinu toto, erit DC ſinus anguli DFC (§. 2 *Trigon*). Potentia igitur in A eſt ad potentiam in F ut ſinus totus ad ſinum anguli directionis DFC. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

510. Quare cum diſtantia potentiæ in A ſit radius CA; dato angulo directionis DFC inveniri poteſt diſtantia DC.

Sit e. gr. FC = 4′ & DFC = 48°. Calculus ita ſubducetur:

Log. ſin. Tot.		100000000
Log. FC		0.60 206 00
Log. ſin. DFC		98710735
Log. DC		50.4731335

cui quam proxime reſpondent in tabulis 2′ 9″ 7‴.

THEOREMA 110.

511. *Potentiæ in diverſis punctis F & K rotam juxta directiones FD & KI perpendiculari* AL *parallelas deprimentes ſunt inter ſe ut diſtantiæ a centro motus CD & CI reciproce.* Tab. VI. Fig. 71.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim potentia in F ad pondus G ut EC ad CD & idem pondus G ad potentiam in K ut IC ad CE (§. 481). Ergo potentia in F ad potentiam in K ut IC ad CD (§. 185 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

512. Creſcente adeo diſtantia a centro motus, potentia decreſcit & contra.

COROLLARIUM 2.

513. Quare cum radius AC ſit diſtantia maxima & potentiæ juxta lineam directionis ad eundem perpendicularem agenti conveniat (§. 187); erit potentia perpendicularis omnium minima, quæ datum pondus G ſuſtentare valent juxta diverſas directiones parallelas agentes.

COROLLARIUM 3.

514. Si ex centro C erigatur radius

CH ad AC perpendicularis, erit FD eidem parallela (§. 241 *Geom.*). Quare ſi ex F demittatur perpendicularis FM, erit eadem ipſi AC parallela (§. *cit.*), conſequenter FM = DC (§. 223 *Geom.*). Cum adeo FM ſit diſtantia potentiæ in F applicata; in praxi facile definitur abſque calculo.

THEOREMA III.

Tab. I. Fig. I. 515. *Si potentia juxta perpendicularem* AL *deprimit rotam & pondus* G *attollit, erit ſpatium potentiæ ad ſpatium ponderis, ut pondus ad potentiam, quæ id ſuſtentare valet.*

DEMONSTRATIO.

Dum rota ſemel circumvolvitur, potentia integram ejus peripheriam percurrit. Interea autem pondus attollitur per ſpatium peripheriæ axis æquale. Eſt itaque ſpatium potentiæ ad ſpatium ponderis ut peripheria rotæ ad peripheriam axis, conſequenter ut radius rotæ AC ad radium axis CE (§. 390 *Geom.*). Sed ut AC ad CE ita pondus ad potentiam, quæ id ſuſtentare valet, (§. 508). Ergo ſpatium potentiæ eſt ad ſpatium ponderis ut pondus ad potentiam, quæ id ſuſtentare valet. *Q. e. d.*

PROBLEMA 70.

516. *Dato pondere dataque potentia ipſum ſuſtentatura axem in peritrochio conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Aſſumatur radius axis ponderi ſuſtentando conveniens, ne ſcilicet axis frangatur.
2. Fiat ut potentia ad pondus ita radius axis ad radium rotæ, ſeu longitudinem ſcytalæ (§. 508).

COROLLARIUM.

517. Quodſi potentia fuerit pars ponderis exigua, radius rotæ enormis prodit. E. gr. Sit pondus 3000, potentia 50 librarum; erit radius rotæ ad radium axis ut 60 ad 1. Hinc ſi radius axis non excederet pedem dimidium, foret radius rotæ pedum 30.

SCHOLION.

518. *Huic malo medela affertur, rotas cum axibus multiplicando, & ut una alteram circumagere valeat, dentibus vel etiam tympanum paxillis inſtruendo.*

THEOREMA 112.

519. *Si pluribus rotis dentatis potentia aliqua, cujus linea directionis KL peripheriam ultimæ tangit, pondus H ſuſtentat; erit ea in ratione compoſita omnium earum, quas radii axium ad radios rotarum habent, nempe CB : CD, EF : EG, HI : HK.* Tab. VI. Fig. 72.

DEMONSTRATIO.

Quodſi concipiamus potentiam applicari in D; erit ea ad pondus A ut CB ad CD (§. 508), conſe-

 quen-

quenter $=$ A.CB : CD (§. 272 *Arithm.*). Axis igitur DF tantopere gravatur, ac ſi pondus A.CB : CD appenderetur. Concipiamus itaque porro potentiam in G applicari, quæ hoc pondus ope rotæ alterius ſolius, conſequenter pondus A ope duarum ſuſtentet. Cum ſit ad pondus A.CB : CD ut EF ad EG (§. 508); reperietur $=$ A.CB.EF : CD.EG (§. 272 *Arithm.*). Quare axis tertius GI tantopere gravatur, ac ſi pondus A.CB.EF : CD.EG appenderetur. Quoniam potentia in K eſt ad hoc pondus ut HI ad HK (§. 508); reperietur ea $=$ A.CB.EF.HI : CD.EG.HK (§. 272 *Arithm.*) & ita porro, ſi plures fuerint rotæ. Eſt igitur potentia in K applicata ad pondus A, quod ope plurium rotarum ſuſtentat, ut A.CB.EF.HI : CD.EG.HK ad A, hoc eſt, ut A.CB.EF.HI ad A.CD.EG.HK (§. 170 *Arithm.*), adeoque & ut CB.EF.HI ad CD.EG.HK (§. 172 *Arithm.*), conſequenter in ratione compoſita CB : CD, EF : EG & HI : HK (§. 148 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

520. Quodſi pondus ducas in factum ex radiis axium & productum dividas per factum ex radiis rotarum; potentia ipſum ſuſtentatura reperitur, quæ aucta idem attollet. Sit e. gr. A $=$ 6000 librarum, BC $= 6''$, CD $= 34''$, EF $= 5''$, EG $= 35''$, HI $= 4''$, HK $= 27''$; erit BC.EF.HI $=$ 120 & CD.EG.IK $=$ 32130 & hinc potentia $=$ 6000. 120 : 32130 $= 22\frac{1314}{3213} = 22\frac{146}{357} = 22\frac{1}{3}$ quam proxime.

COROLLARIUM 2.

521. Si vero potentiam ducas in factum ex radiis rotarum, & productum dividas per factum ex radiis axium; prodibit pondus, quod ſuſtentare valet. Sit e. gr. Potentia $22\frac{146}{357}$ librarum, reliqua omnia ſint ut ante; reperietur pondus 6000.

SCHOLION.

522. *Loco ultimæ rotæ in praxi adhibetur manubrium ABCD, ubi AE radio axis,* CD *radio rotæ reſpondet.* Ta VI Fi 73

PROBLEMA 71.

523. *Data potentia datoque pondere, invenire numerum rotarum & in unaquaque rationem radii axis ad radium rotæ definire, ita ut potentia peripheriæ rotæ ultimæ applicata juxta directionem perpendicularem pondus datum ſuſtentet.*

RESOLUTIO.

1. Dividatur pondus per potentiam.
2. Quotus diſpergatur in factores.

Dico, numerum factorum indicare numerum rotarum, radiosque axium ſe habere ad radios rotarum ut unitatem ad radios ſingulos.

Sit

Sit e. gr. pondus 3000 librarum & potentia 60, erit quotus 50, qui reſolvitur in factores 4. 5. 5. 5. Quatuor igitur conſtrui poſſunt rotæ, in quarum una radius axis eſt ad radium rotæ ut 1 ad 4, in reliquis ut 1 ad 5.

DEMONSTRATIO.

Si pondus per potentiam dividitur, unitas eſt ad quotum ut potentia ad pondus (§. 62 *Arithm.*). Eſt igitur potentia ad pondus in ratione compoſita unitatis ad ſingulos factores (§. 148 *Arithm.*). Quare ſi radii axium fiant ad radios rotarum ut unitas ad eosdem factores; potentia erit ad pondus in ratione compoſita radiorum axium ad radios rotarum. Potentia igitur pondus ſuſtentare valet ope machinæ conſtructæ (§. 519). *Q. e. d.*

SCHOLION.

524. *Quoniam in exceſſu peccari nequit, conſultum eſt, ubi potentia non exacte dividit pondus, quotum unitate majorem aſſumere. Similiter unam, immo aliquot unitates quoto addere licet, ſi in factores commode diſpergi nequit.*

THEOREMA 113.

Tab. VI. Fig. 72. 525. *Si ope duarum rotarum potentia movet pondus, revolutiones tardius motæ ſunt ad revolutiones celerius motæ ut peripheria axis celerius motæ ad peripheriam rotæ, cui occurrit.*

DEMONSTRATIO.

Interea dum rota tardius mota M unam revolutionem abſolvit, peripheria axis FD, qui eidem occurrit, totam ejus peripheriam emetiri debet. Toties igitur axis FD, conſequenter rota N, circumvolvitur, antequam rota M unam revolutionem abſolvit, quoties peripheria axis FE in peripheria rotæ M continetur. Sunt adeo revolutiones rotæ tardius motæ ad revolutiones velocius motæ ut peripheria axis FD ad peripheriam rotæ M, cui occurrit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

526. Eædem igitur revolutiones ſunt ut radius axis FE ad radium rotæ DC (§. 390 *Geom.*).

COROLLARIUM 2.

527. Cum numerus dentium in axe FD ſit ad numerum dentium in peripheria rotæ M ut peripheria illius ad peripheriam hujus; erunt revolutiones rotæ tardius motæ M ad revolutiones celerius motæ N, ut numerus dentium ſeu paxillorum in axe ad numerum dentium in rota M, cui iſte occurrit.

THEOREMA 114.

528. *Si ope plurium rotarum M, N, O &c. potentia movet pondus A, erunt revolutiones rotæ celerrime motæ O ad revolutiones tardiſſime motæ* Tab. VI. Fig. 72.

motæ M in ratione compoſita ex rationibus reciprocis peripheriarum axium IG, FD &c. & peripheriarum rotarum N, M &c. quibus illi occurrunt.

DEMONSTRATIO.

Sint peripheriæ rotarum M & N *m* & *n*, peripheriæ axium DF & GI *a* & *b*: erit ut *a* ad *m* ita 1 ad numerum revolutionum rotæ N (§. 525) = *m* : *a* (§. 272 *Arithm.*). Eſt vero porro ut *b* ad *n* ita *m* : *a* ad numerum revolutionum rotæ O (§. 525) = *mn* : *ab* (§. 272 *Arithm.*). Quare revolutiones rotæ celerrime motæ O ſunt ad revolutiones rotæ tardiſſime motæ M ut 1 ad *mn* : *ab*, hoc eſt ut *ab* ad *mn* (§. 170 *Arithm.*) conſequenter in ratione compoſita ex rationibus peripheriarum rotarum M & N ad peripherias axium DF & GI, qui ipſis occurrunt, (§. 148 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

529. Quoniam numeri dentium ſunt in ratione peripheriarum; revolutiones rotæ tardiſſime motæ M ſunt ad revolutiones velociſſime motæ O in ratione compoſita earum quas habent numeri dentium in axibus FD, IG &c. ad numeros dentium in rotis N & M &c. quibus occurrunt.

COROLLARIUM 2.

530. Quia peripheriæ ſunt ut radii (§. 390 *Geom.*), revolutiones rotæ tardiſſime motæ M ſunt ad revolutiones rotæ velociſſime motæ O in ratione compoſita earum, quas habent radii axium GH, DE &c. ad radios rotarum GE, DC &c. quibus occurrunt.

COROLLARIUM 3.

531. Quare ſi factum ex radiis rotarum GE, DC &c. ducas in numerum revolutionum rotæ tardiſſime motæ M & productum dividas per factum ex radiis axium, qui ipſis occurrunt, GH, DE &c. prodit numerus revolutionum rotæ velociſſime motæ O. E. gr. ſit GE = 8, DC = 12, GH = 4, DE = 3, & revolutio rotæ M una, erit numerus revolutionum rotæ O = 96 : 12 = 8.

PROBLEMA 71.

532. *Datis revolutionibus rotæ velociſſime circumactæ O interea abſolutis, dum tardiſſime mota M ſemel in orbem redit; invenire dentium in axibus & rotis numerum.* Tab. VI. Fig. 72.

RESOLUTIO.

1. Numerus datarum revolutionum diſpergatur in factores.
2. Numerus dentium ſeu paxillorum in axibus pro arbitrio aſſumtis ducatur ſigillatim in ſingulos factores.

Dico, facta exhibere numeros dentium in peripheriis rotarum, quibus totidem axes occurrunt.

E. gr. Si rota velociſſime mota 40 revo-

revolutiones abſolvat, dum tardiſſime ſemel circumagitur; reſolvatur numerus 40 in factores 5 & 8. Hinc intelligitur, duabus opus eſſe rotis totidemque axibus dentatis, qui iſtis occurrant. Quodſi axis habuerit dentes 6; rota una habebit 30, altera 48, tertia, cui potentia applicatur, nullis inſtruenda, figuram ſortitura pro potentiæ applicandæ conditione.

DEMONSTRATIO.

Revolutiones rotæ tardiſſime motæ ſunt ad revolutiones velociſſime circumactæ in ratione compoſita numerorum dentium in axibus ad numeros dentium in rotis quibus occurrunt (§. 529). Cum itaque numeros dentium in rotis invenerimus, numeris dentium in axibus per factores multiplicatis, in quos numerus revolutionum rotæ velociſſime circumactæ reſolvitur, ſitque adeo unitas ad factores hoſce ut numerus dentium in axibus ad numerum dentium in rotis, quibus occurrunt (§. 59 *Arithm.*); revolutiones rotæ tardiſſime motæ erunt ad revolutiones velociſſime circumactæ in ratione compoſita unitatis ad factores numeri revolutionum poſteriorum dati, conſequenter ut unitas ad ipſum hunc numerum (§. 148 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 115.

533. *Si ope plurium rotarum potentia movet pondus, ſpatium ponderis eſt ad ſpatium potentiæ ut potentia ſuſtentans ad pondus.*

DEMONSTRATIO.

Sint peripheriæ rotarum M, N, O &c. *a*, *b*, *c* &c. axium CB, DE, GH &c. *d*, *e*, *f* &c. erit numerus revolutionum rotæ O interea peractarum, dum M ſemel in orbem redit, $ab:ef$ (§. 528). Jam ſi rota M ſemel circumagitur, ſpatium a pondere percurſum æquatur peripheriæ axis BC, ſpatium vero potentiæ, peripheriæ rotæ O per numerum revolutionum interea abſolutarum multiplicatæ. Eſt igitur ſpatium ponderis ad ſpatium potentiæ ut *d* ad $abc : ef$, conſequenter ut *def* ad *abc* (§. 170 *Arithm.*). Sed $d:a = CB:CD$, $e:b = DE:EG$, $f:c = GH:HK$ (§. 390 *Geom.*) adeoque $def : abc = CB.DE.GH : CD.EG.HK$ (§. 202 *Arithm.*). Ergo ſpatium ponderis ad ſpatium potentiæ ut CB.DE.GH ad CD.EG.HK (§. 156 *Arithm.*) & ideo ut potentia ſuſtentans ad pondus (§. 519). *Q. e. d.* Tab. VI. Fig. 72.

COROLLARIUM.

534. Quo major itaque potentia, eo velocior ponderis motus; quo illa minor, eo hic tardior.

THEOREMA 116.

535. *Spatia ponderis atque potentiæ ſunt in ratione compoſita revo-*

lutionum rotæ tardiſſime motæ ad revolutiones rotæ velocisſime motæ & peripheriæ axis iſtius ad peripheriam hujus.

DEMONSTRATIO.

Sit numerus revolutionum rotæ tardiſſime motæ $= m$, numerus revolutionum velociſſime motæ $= n$, peripheria axis in rota priore $= a$, peripheria poſterioris $= b$. Cum in una revolutione ſpatium ponderis ſit a, potentiæ b; erit ſpatium ponderis, durantibus revolutionibus m, $= ma$; ſpatium potentiæ, durantibus revolutionibus n, $= nb$. Eſt igitur ſpatium ponderis ad ſpatium potentiæ ut ma ad nb, hoc eſt, in ratione compoſita revolutionum m & n; atque peripheriæ axis rotæ tardiſſime motæ a & peripheriæ rotæ velociſſime motæ b (§. 148 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

536. Cum ſpatia ponderis & potentiæ ſint reciproce ut potentia ſuſtentans ad pondus (§. 533); potentia ſuſtentans pondus erit ad pondus in ratione compoſita revolutionum rotæ tardiſſime motæ ad revolutiones velociſſime motæ & peripheriæ axis iſtius ad peripheriam hujus.

PROBLEMA 72.

537. *Data peripheria axis rotæ tardiſſime motæ cum peripheria rotæ velociſſime motæ & ratione revolutionum rotæ iſtius ad revolutiones hujus, invenire ſpatium, quod potentia decurrit, donec pondus emetiatur ſpatium datum.*

RESOLUTIO.

1. Ducatur peripheria axis rotæ tardisſime motæ in antecedentem & peripheria rotæ velociſſime motæ in conſequentem rationis.
2. Quæratur ad hæc duo facta & ſpatium ponderis datum numerus quartus proportionalis: erit is ſpatium potentiæ quæſitum. (§. 535).

Sit e. gr. ratio revolutionum rotæ tardiſſime motæ ad revolutiones rotæ velociſſime motæ $= 2 : 7$, & ſpatium ponderis 30 pedum. Peripheria axis rotæ tardiſſime motæ ſit ad peripheriam velociſſime circumactæ ut 3 ad 8. Reperietur ſpatium potentiæ $= 7 . 8 . 30 : 2 . 3 = 7 . 4 . 10 = 280$.

PROBLEMA 73.

538. *Data peripheria rotæ velociſſime motæ, una cum numero revolutionum ejusdem & ratione tam peripheriarum ejusdem rotæ atque axis rotæ tardiſſime motæ, quam revolutionum utriusque, invenire ſpatium ponderis.*

RE-

RESOLUTIO.

1. Ducatur peripheria rotæ velociſſime motæ in numerum revolutionum ejusdem, factum erit potentiæ ſpatium.
2. Ducantur quoque in ſe invicem tam antecedentes, quam conſequentes datarum rationum.
3. Quæratur ad hæc duo facta & ſpatium potentiæ modo inventum numerus quartus proportionalis: erit is ſpatium ponderis quæſitum (§. 535).

E. gr. Sit peripheria rotæ velociſſime motæ 10, ratio ejus ad peripheriam axis, ex quo pondus ſuſpenditur, = 8 : 3, numerus revolutionum = 28, ratio revolutionum = 7 : 2. Reperietur ſpatium ponderis = 3. 2. 28. 10 : 8. 7 = 3. 10 = 30.

PROBLEMA 74.

539. *Data ratione peripheriarum rotæ velociſſime motæ atque axis rotæ tardiſſime motæ itemque revolutionum utriusque, una cum pondere, invenire potentiam, quæ id ſuſtentare valet.*

RESOLUTIO.

1. Ducantur in ſe invicem tam antecedentes, quam conſequentes datarum rationum.
2. Quæratur ad factum antecedentium, factum conſequentium & pondus datum numerus quartus proportionalis; erit is potentia quæſita (§. 536).

Sit ratio peripheriarum 8 : 3, ratio revolutionum 7 : 2, pondus 2000. Reperietur potentia = 3. 2. 2000 : 8. 7 = 12000 : 56 = $214\frac{2}{7}$.

SCHOLION.

540. *Non abſimili modo pondus invenitur, ſi potentia detur & ratio tam peripheriarum axis rotæ tardiſſime motæ & rotæ velociſſime circumactæ, quam revolutionum utriusque.*

PROBLEMA 75.

541. *Datis revolutionibus rotæ velociſſime motæ interea abſolvendis, dum tardiſſime mota ſemel in orbem redit, una cum ſpatio, per quod pondus elevari debet & peripheria rotæ tardiſſime motæ, invenire tempus elevationi quæſitæ impendendum.*

RESOLUTIO.

1. Fiat: ut peripheria axis rotæ tardisſime motæ ad ſpatium ponderis datum, ita numerus revolutionum rotæ velocisſime motæ datus ad quartum proportionalem, qui erit numerus revolutionum interea abſolvendarum, dum pondus emetitur ſpatium datum.
2. Per experientiam determinetur numerus revolutionum rotæ velocisſime circumactæ intra unius horæ ſpatium aut tempus datum quodcunque abſolvendarum.

3. Per

3. Per hunc dividatur numerus quartus proportionalis paulo ante inventus.

Quotus erit tempus elevationi ponderis impendendum. *Q. e. d.*

THEOREMA 117.

Tab. V. Fig. 61. 542. *Si potentia P ope trochleæ ſimplicis Q pondus ſuſtentat; ita ut linea directionis utriusque tangat peripheriam, erit huic æqualis.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam lineæ directionis potentiæ atque ponderis peripheriam trochleæ tangunt, *per hypoth.* ad radios AC & CB perpendiculares ſunt (§.239 *Geom.*). Jam cum ad ſuſtentationem præter rectam ACB partes reliquæ nil conferant, ſitque centrum motus in C (§.475); potentia erit ad pondus ut CB ad CA (§. 481). Sed CB = CA (§. 475). Ergo potentia ponderi æqualis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

543. Trochlea igitur ſimplex, ſi lineæ directionis potentiæ atque ponderum peripheriam tangunt, nec juvat, nec impedit potentiam, ſed ejus directionem tantum mutat.

COROLLARIUM 2.

544. Utimur ergo trochlea, quoties potentiæ trahentis directio verticalis in horizontalem, aut ſurſum tendens in tendentem deorſum & contra mutari debet.

SCHOLION 1.

545. *Hoc ipſo ſecuritati trahentium ſæpiſſime proſpicitur. Fac enim pondus ingens eſſe ad inſignem altitudinem attollendum ab operariis funem trahentibus. Quodſi contingat funem DE abrumpi & operariorum capitibus imminere pondus, in extremo vitæ periculo conſtituuntur. Enimvero ſi ope trochleæ B directio verticalis AB in horizontalem BC mutatur rupto fune DE nihil metuendum periculi.*

SCHOLION 2.

446. *Hæc ipſa mutatio lineæ directionis ope trochlearum in horizontalem hunc etiam præſtat uſum, ut, ſi potentia aliqua ſecundum unam directionem plus virium impendere poſſit, quam ſecundum alteram, vi maxima utamur, nec non ut potentiis uti liceat, quæ juxta datam directionem agere non poſſent.* E.gr. *equus non trahit ſecundum directionem verticalem, trahit tamen ſecundum horizontalem. Verticalis igitur tractio ſi mutatur in horizontalem, equus pondus attollere poterit.*

THEOREMA 118.

447. *Si potentia in E applicata ſecundum lineam directionis BE, quæ trochleam in B tangit & funi AD parallela eſt, pondus F ex centro trochleæ C ſuſpenſum ſuſtentet; ponderis ſubdupla eſt.* T. V. F. 7

DEMONSTRATIO.

Patet enim præter rectam AB partes trochleæ reliquas nihil conferre ad ponderis F ſuſtentationem. Cum vero trochlea ſit circa centrum

trum C mobilis (§. 475) in H erit centrum motus. Et quia tam linea directionis ponderis CF, quam linea directionis potentiæ BE ad AB perpendicularis, *per hypoth.* erit potentia in E ad pondus F ut AC ad AB (§. 481). Eſt vero AC $= \frac{1}{2}$ AB (§. 475). Ergo potentia ponderis F ſubdupla. *Q. e. d.*

SCHOLION.

548. *Cum trochlea cum unco ſuo & loculamento, quod in uſu abeſſe nequit, una attollatur a potentia ſurſum trahente ſecundum directionem EB, ejus gravitas ponderi F addenda eſt.*

THEOREMA 119.

549. *Si potentia in B applicata ope polyſpaſti ſuſtentet pondus F, ita ut omnes funes AB, HI, GF, EL, CD ſint inter ſe paralleli; erit potentia ad pondus ut unitas ad numerum funium HI, GF, EL, CD, quæ a pondere F trahuntur.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam funes omnes ſunt inter ſe paralleli adeoque a centris trochlearum ſuarum intervallo radiorum utrinque diſtant; nulla eſt ratio, cur a pondere F unus magis trahatur quam alter. Pondus igitur æquali vi omnes extendit adeoque æqualiter per eos dividitur, ita ut, ſi fuerint funes quatuor, perinde ſit ac ſi tantum pars quarta ponderis ex fune CD ſuſpenderetur. Potentia igitur in B applicata cum æqualis ſit ponderi ex fune CD ſuſpenſo (§. 542); quartam non niſi ponderis partem in præſenti caſu ſuſtentat, hoc eſt, in genere eam ad pondus rationem habet, quam unitas ad numerum funium, quos pondus F extendit. *Q. e. d.*

SCHOLION I.

550. *Ne polyſpaſtorum altitudo in nimium excreſcat, ſi ex pluribus trochleis componantur; trochleæ ita jungintur, ut tam omnes ſuperiores, quam omnes inferiores circa communem axem verſatiles exiſtant. Tum vero omnes inter ſe æquales eſſe debent, ut funes ſint paralleli.* Tab. VI. Fig. 77.

SCHOLION 2.

551. *Uſus trochlearum inſignis eſt in ponderibus elevandis, tum quod machina ſpatium exiguum occupet & facile huc illucque transportetur, tum quod inſigni virium compendio pondus ſatis ingens attolli poſſit.*

COROLLARIUM I.

552. Cum numerus trochlearum inferiorum & ſuperiorum ſimul ſumtarum æqualis ſit numero funium inferiores ſuſtentantium; potentia pondus F ope polyſpaſti ſuſtentans eſt ad pondus ut unitas ad numerum trochlearum inferiorum & ſuperiorum ſimul ſumtarum. Tab. VI. Fig. 76.

COROLLARIUM 2.

553. Dato igitur trochlearum numero & potentia, facile invenitur pondus ſuſtentandum; potentia nempe per

 pon-

pondus multiplicatur. Sit e. gr. potentia 50 librarum, numerus trochlearum 5; erit pondus 250.

COROLLARIUM 3.

554. Similiter dato numero trochlearum & pondere ſuſtentando, potentia invenitur, pondere per numerum trochlearum diviſo. Sit e. gr. pondus 800 librarum, numerus trochlearum 6: erit potentia 150.

SCHOLION 3.

555. Dechales (a) *autor eſt, experientia conſtare, quod homo ſimpliciter ſolo inſiſtens 150 libras elevare poſſit. Cum igitur 150 librarum potentia ope polyſpaſti ex 6 trochleis compoſiti 900 libras ſuſtentare poſſit; evidens eſt, quod unus homo ejus ope pondus 900 fere librarum attollere poſſit.*

SCHOLION 4.

Tab. VI. Fig 76. 556. *Mire multiplicantur trochlearum vires, ſi polyſpaſti plures conjunguntur, tum enim potentia in polyſpaſto uno ad attollendum pondus Q applicanda vicem ſubit ponderis F ex polyſpaſto altero appenſi. Ponamus igitur pondus Q eſſe 1000 librarum & trochleas in unoquoque polyſpaſto quatuor; erit ergo pondus F ex altero polyſpaſto ſuſpenſum nonniſi quarta illius pars, nempe 250, conſequenter potentia quarta pars hujus, hoc eſt, decima ſexta totius, $62\frac{1}{2}$.*

PROBLEMA 76.

557. *Datis pondere atque potentia, invenire numerum trochlearum, ex quibus componendus eſt polyſpaſtus.*

RESOLUTIO.

Pondus per potentiam dividatur, quotus erit numerus quæſitus (§. 552).

Sit e. gr. pondus 600 librarum, potentia 150; erit numerus trochlearum 4: quarum omnium eadem diameter, ſi duæ in parte inferiore, duæ in ſuperiore circa communem axem verſatiles conſtruantur (§. 550).

THEOREMA 120.

558. *Si potentia trochlearum ope movet pondus, erit ſpatium potentiæ ad ſpatium ponderis ut pondus ad potentiam ſuſtentantem.* Tab. VI. Fig. 76.

DEMONSTRATIO.

Ponamus enim pondus F per pedem unum attolli: evidens eſt, funium omnium, ex quibus trochleæ inferiores cum pondere ſuſtentantur, longitudinem intervallo unius pedis minui debere. Potentia igitur tot pedes extrahere debet, quot ſunt funes trochleas inferiores ſuſtentantes. Quare ſpatium ejus eſt ad ſpatium ponderis ut numerus funium trochleas inferiores ſuſtentantium ad unitatem, conſequenter ut pondus ad potentiam ſuſtentantem (§. 549). Q. e. d.

COROLLARIUM.

559. Quo minor itaque potentia pon-

(a) Mechanic. lib. 4. prop. 4. Mund. Math. Tom. 2. f. m. 189.

pondus ope polyſpaſti attollit; eo tardius id movetur: ut adeo virium compendium cum temporis diſpendio conjungatur.

THEOREMA 121.

560. *Si pondus vel reſiſtentia cochlea ſuperanda fuerit ad potentiam ut peripheria a potentia percurrenda ad diſtantiam binarum helicum BI; potentia ponderi æquipollet.*

DEMONSTRATIO.

Celeritates, quibus moventur potentia & pondus, ſunt ut ſpatia eodem tempore deſcripta, nempe ut peripheria a potentia percurrenda ad diſtantiam helicum BI (§. 28). Sed vires mortuæ ſunt in ratione compoſita celeritatum & maſſarum (§. 226). Quare cum potentiæ pondus æquale ſubſtitui poſſit (§. 479), ſitque ut pondus potentiæ æquale ad pondus elevandum aut deprimendum reciproce ut peripheria a potentia percurrenda ad diſtantiam helicum BI *per hypoth.* celeritates ſunt ut maſſæ reciproce. Ergo vis potentiæ eſt ad vim ponderis ut factum ex maſſa potentiæ in maſſam ponderis ad factum ex maſſa ponderis in maſſam potentiæ (§. 148 *Arithm.*) Quare cum hæc facta æqualia ſint (§. 191 *Arithm.*); vires æquales ſunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

561. Cum peripheria a potentia percurſa in una cochleæ converſione ſit ſpatium ejus, diſtantia autem duarum helicum BI reſpondeat ſpatio ponderis; erit hic quoque ſpatium ponderis ad ſpatium potentiæ ut reciproce potentia ſuſtentans ad pondus.

COROLLARIUM 2.

562. Virium itaque compendium cum temporis diſpendio denuo conjungitur.

THEOREMA 122.

563. *Si diſtantia helicum BI minor fuerit, potentia ad eandem reſiſtentiam ſuperandam applicata minor eſt, quam ſi illa major fuerit.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim ut ſpatium potentiæ ad helicum diſtantiam, ita pondus ad potentiam (§. 561). Quodſi ergo helicum diſtantia minuitur, ſpatium potentiæ ad eandem (§. 189 *Arithm.*), adeoque & pondus ad potentiam rationem majorem habet, quam ante. Eſt igitur potentia in caſu poſteriore minor, quam in priore (§. 190 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 123.

564. *Si cochlea mas intra fœminam quieſcentem convertitur, minor potentia ad eandem reſiſtentiam ſuperan-*

Tab. VI. Fig. 78. *perandam requiritur, ſi ſcytala CD longior, quam ſi brevior.*

DEMONSTRATIO.

Ut peripheria ſcytala CD tanquam radio deſcripta ad helicum diſtantiam IK ita reſiſtentia ſuperanda ad potentiam (§. 560) ſed ſi ſcytala longior, major peripheria deſcribitur, quam ſi brevior (§.390 *Geom.)*. Ergo in illo caſu ad diſtantiam helicum IK (§.187 *Arithm*), conſequenter & reſiſtentia ſuperanda ad potentiam, majorem rationem habet, quam in hoc caſu. Quare cum reſiſtentia eadem maneat, *per hypoth.* potentia in caſu poſteriore major, quam in priore (§. 189 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 77.

565. *Data diſtantia potentiæ a centro cochleæ CD, diſtantia helicum IK & potentia in D applicata, determinare reſiſtentiam ſuperandam, vel hac data invenire illam.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur peripheria circuli radio CD deſcribenda (§. 406 *Geom.*).
2. Quæratur porro ad diſtantiam helicum, peripheriam modo inventam & potentiam datam; vel ad peripheriam inventam, diſtantiam helicum IK & reſiſtentiam datam numerus quartus proportionalis: erit is in priore caſu reſiſtentia ſuperanda, in altero potentia, qua ad reſiſtentiam datam vincendam utendum (§. 560).

E. gr. Sit diſtantia helicum 3″, diſtantia potentiæ a centro cochleæ CD 25″, potentia 30 librarum. Fiat

100 — 314 — 50″
50

157|00 Peripheria a potentia conficienda

Fiat porro

3 — 157 — 30
1 10 10 (§. 286 *Arithm.*)

1570 pondus, cui reſiſtentia æqualis.

PROBLEMA 78.

566. *Data reſiſtentia, quæ data potentia ſuperari debet, cochleæ diametrum, diſtantiam helicum IK & longitudinem ſcytalæ CD definire.* Tab. VI. Fig. 78.

RESOLUTIO.

1. Diſtantia helicum & diameter cochleæ pro arbitrio aſſumantur, ſi ope ſcytalæ convertenda eſt cochlea intra matricem.
2. Fiat ut potentia data ad reſiſtentiam, quam ſuperare debet, ita helicum diſtantia ad quartum; quæ erit peripheria a ſcytala CD in converſione cochleæ deſcribenda (§. 460).
3. Quodſi ergo quæratur ſemidiameter hujus peripheriæ (§. 406 *Geom.*);

Geom.); habebitur longitudo ſcytalæ CD.

4. Quodſi vero cochlea fœmina circa marem convertitur ſine ſcytala, peripheria *per n*:2 inventa eadem fere eſt, quæ cochleæ, adeoque ſemidiameter *per n. 3* reperta cochleæ ſemidiameter.

E. gr. Sit pondus 6000 librarum, potentia 100, diſtantia helicum 1″. Reperietur peripheria a potentia percurrenda 6000 : 100 = 60, adeoque longitudo ſcytalæ, ſi qua utaris, 1′9″, ſi nulla utaris, erit latus cochleæ fœminæ 19″.

COROLLARIUM.

567. Quodſi peripheria cochleæ in rectam BC transferatur, & in B perpendicularis BC erigatur altitudini cochleæ æqualis, tandem ducantur rectæ C1, D2, E3 &c. parallelogrammum circa cylindrum, cujus peripheria recta BC æqualis, circumvolutum helicem, qua cylindrus ſulcandus, exhibebit.

DEFINITIO 68.

568. *Cochlea infinita* ſeu *perpetua* vocatur, ſi rotam ſtellatam DF circumagit.

COROLLARIUM.

569. Dum cochlea ſemel circumvolvitur; rota nonniſi unius dentis intervallo promovetur.

SCHOLION.

570. *Dicitur autem ideo infinita, quia ſine fine circumagi poteſt.*

THEOREMA 124.

571. *Si potentia manubrio cochleæ infinitæ AB applicata fuerit ad pondus in ratione compoſita ex peripheria axis rotæ EH ad peripheriam manubrio verſato a potentia deſcriptam & revolutionum rotæ DF ad revolutiones cochleæ CB; ponderi æquivalebit.*

DEMONSTRATIO.

Si peripheriam axis HE per numerum revolutionum rotæ ſtellatæ DF multiplices, prodibit ſpatium ponderis G. Sed ſi peripheria manubrio AB deſcripta multiplicetur per numerum revolutionum cochleæ CB; factum eſt ſpatium potentiæ. Sunt igitur celeritates, quibus pondus & potentia moventur, ut iſta ſpatia (§. 28). Quare cum pondus ad potentiam ſit in ratione reciproca eorundem ſpatiorum (*per hypoth.* & §. 148 *Arithm.*) vires ſunt in ratione compoſita earum, quas habet ſpatium ponderis ad ſpatium potentiæ & ſpatium potentiæ ad ſpatium ponderis (§. 216), hoc eſt, ut factum ex ſpatio ponderis in ſpatium potentiæ ad factum ex ſpatio potentiæ in ſpatium ponderis (§. 142 *Arithm.*).

rithm.), adeoque æquales (§.191 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

572. Quoniam rotæ motus tardiſſimus (§. 569); exigua potentia ingens pondus moveri poteſt ope cochleæ infinitæ.

COROLLARIUM 2.

573. Utimur adeo cochlea infinita, vel ſi ingens admodum pondus per exiguum ſpatium movendum, vel ſi motus tardiſſimus efficiendus.

SCHOLION.

574. *Commodus igitur ejus uſus eſt in horologiis.*

PROBLEMA 79.

Tab. VI. Fig. 80. 575. *Datis dentium numero, diſtantia potentiæ a centro cochleæ AB, & radio axis HF una cum potentia invenire pondus.*

RESOLUTIO.

1. Ducatur diſtantia potentiæ a centro cochleæ AB in numerum dentium: factum eſt ut ſpatium potentiæ interea abſolutum, dum pondus conficit ſpatium peripheriæ axis æquale (§. 391 *Geom.* & 569 *Mech.*).

2. Quæratur numerus quartus proportionalis ad radium axis, ſpatium potentiæ modo inventum & potentiam; erit is pondus, quod potentia ſuſtentare valet (§. 571).

E. gr. Sit AB = 3, radius axis HF = 1, potentia 100 librarum, numerus dentium rotæ DF 48; erit pondus = 3. 48. 100 : 1. 1 = 14400.

SCHOLION 1.

576. *Apparet hinc, cochleam infinitam in amplificandis potentiarum viribus reliquas omnes antecellere.*

SCHOLION 2.

577. *Solent etiam cochleæ conſtrui, quæ a rotis dentatis circumaguntur, cumque cochlea a ſingulis dentibus ſemel circumvolvatur, motus efficitur velociſſimus. Hinc ejus uſus eſt in machinis, quæ ad poliendum corpora aſpera, veluti ad poliendum vitra, adhibentur.*

THEOREMA 125.

578. *Si potentia cuneo ita applicata, ut linea directionis CD ſit ad latus* AB *perpendicularis, fuerit ad reſiſtentiam ſuperandam, ut* AB *ad* CD, *reſiſtentiæ æquipollet.* Tab. V. Fig. 64.

DEMONSTRATIO.

Ponamus cuneum detrudi usque ad rectam GF ipſi AB parallelam: erit DE ſpatium potentiæ, FG ſpatium ponderis. Eſt vero DE : FG = DC : AB (§. 378 *Geom.*). Ergo celeritates potentiæ & ponderis ſunt ut DC ad AB (§. 28). Sed vires potentiæ ac ponderis ſunt in ratione compoſita ipſorummet atque celeritatum (§. 226), potentia vero ad pondus ut AB ad DC, *per hypoth.* Ergo vires ſunt AB. DC ad DC. AB (§. 148 *Arithm.*), adeoque æquales (§. 191 *Arithm.*). *Q. e. d.*

CO-

COROLLARIUM 1.

579. Potentia igitur dimidiæ reſiſtentiæ æquivalens eſt ad eam ut AC ad DC, hoc eſt, ut ſinus totus ad tangentem anguli dimidii cunei ADC (§. 7 *Trigon.*).

COROLLARIUM 2.

580. Cum tangens anguli minoris minor ſit quam majoris (§. 7 *Trigon.*), potentia ad dimidiam reſiſtentiam majorem rationem habet, ſi angulus major, quam ſi minor (§. 187 *Arithm.*). Unde in priori caſu major eſt quam in poſteriori (§. *cit.*), hoc eſt, cunei acutiores magis potentiæ vires amplificant quam minus acuti.

SCHOLION.

581. *Ex natura cunei reddenda eſt ratio omnium fere inſtrumentorum, quibus ad ſcindendum aut dividendum utimur: qualia ſunt cultri, enſes, ſecures, ſciſſella aliaque inſtrumenta celatoria.*

CAPUT XIV.

De

POTENTIARUM AD MACHINAS APPLICATIONE.

DEFINITIO 69.

582. Per *potentias animatas* intelligo homines & animantia bruta: *per inanimatas* vero aërem, aquam, ignem, gravitatem, elaterem.

DEFINITIO 70.

583. Potentia dicitur *trudendo movere*, ſi linea directionis tendit in plagam moventi oppoſitam.

DEFINITIO 71.

584. Potentia dicitur *deprimere*, ſi linea directionis tendit a movente deorſum.

DEFINITIO 72.

585. Potentia dicitur *trahere*, ſi linea directionis tendit ad moventem.

DEFINITIO 73.

586. Potentia dicitur *elevare*, ſi linea directionis tendit ſurſum.

DEFINITIO 74.

587. Potentia animata dicitur *calcando* movere, ſi pedibus deprimit vel protrudit mobile.

DEFINITIO 75.

588. Potentia animata *Verſando movere* dicitur, ſi eidem loco inſiſten-

ſiſtentis manus per peripheriam circuli movetur.

PROBLEMA 80.

589. *Machinam conſtruere, quam homo trudendo movere poſſit.*

Tab. VII. Fig. 81.

RESOLUTIO.

1. Cylindrus ligneus EF verticaliter erigatur, ita ut in punctis E & F circa axem EF verſari poſſit.

2. In quatuor fere pedum altitudine infigatur vectis GI.

Quodſi enim homo manibus pro trudat vectem GH, cylindrus EF circa axem ſuum circumagetur (§. 127 *Geom.*).

SCHOLION.

590. *Si machina ita ſimplex ad pondera attollenda adhibetur,* Ergata *appellari ſolet.*

COROLLARIUM 1.

Tab. VII. Fig. 82. 591. Quodſi GH fuerit temo cum libra; equus vel taurus *trahendo* machinam movebit.

COROLLARIUM 2.

Tab. VII. Fig. 81. 592. Si annulo L alligetur funis, quem manibus prehendat homo aut corpori ſuo circumplicet; machinam *trahendo* movebit.

PROBLEMA 81.

Tab. VI. Fig. 83. 593. *Machinam conſtruere, quam homo verſando movere poſſit.*

RESOLUTIO.

Ad cylindrum horizontalem applicetur manubrium vel rectangulum BDC, vel in arcum circuli incurvatum HI. Cum enim homo manu circa centrum radium BD circumducit; verſando machinam movet (§. 588 *Mech.* & §. 127 *Geom.*).

SCHOLION.

594 *Si duo manubria eidem machinæ applicantur, neceſſe eſt, ut ſitum habeant contrarium, quia dum unus manubrium ABDC deprimit, alter alterum EFGH attollere debet.*

PROBLEMA 82.

595. *Machinam conſtruere, quam homo partim trahendo, partim deprimendo movere poſſit.*

RESOLUTIO.

Talis eſt axis in peritrochio EABF. Quodſi enim ſcytalam A manu prehendas & ad te adducas, trahendo axem EF movebis (§. 585): ſed ubi ulterius eandem deorſum urgeas, deprimendo eundem axem movebis (§. 584). Tab. V. Fig. 60.

Loco peritrochii ſufficiunt ſcytalæ ſolæ GH & KI: quæ ſi duobus in locis ad axem aptentur, duo homines una eandem partim trahendo, partim deprimendo movebunt. Tab. VII. Fig. 84.

SCHOLION.

596. *Si cylindrus horizontaliter poſitus & ſolis ſcytalis inſtructus ad pondera attollenda aut attrahenda adhibetur,* ſucula *vocatur.*

PROBLEMA 83.

597. *Machinam conſtruere, quam par-*

partim trahendo, partim protrudendo movere poſſit homo.

RESOLUTIO.

Tab. I. VII. Fig. 85. 1. Vectis homodromus HFG circa punctum C mobilis trajiciatur per annulum F virgæ ferreæ EF, aut virga alio quocunque modo ad eum firmetur.

2. Per annulum E alteri extremo ejusdem virgæ affixum tranſeat uncus rectangulus ABCD cylindro interrupto KL infixus

Quodſi enim manu applicata vectem HG ad te adducas, radius AB ſemiperipheriam deſcribet, ſicque trahendo movebis machinam (§. 585). Si vero manubrium ABCD, quod nunc partem ſui BC tibi obvertit, in priſtinum ſitum redigis; idem radius BA alteram ſemiperiam deſcribet, ſicque trudendo movebis machinam (§. 583).

Aliter.

Tab. VII. Fig. 86. Idem præſtabis, ſi vectis HFG ſolo affigatur, ita tamen ut, quemadmodum ante, circa punctum G moveri libere poſſit. Reliqua omnia eadem ratione ſe habeant, ut ante.

PROBLEMA 84.

598. *Machinam conſtruere, quam homo calcando movere poſſit.*

RESOLUTIO.

Conſtruatur tympanum AB cum cylindro circa axem ejus mobile, & ejus altitudinis, ut homo unus vel plures intra ejus ambitum ſtare poſſint. Hanc enim calcando cylindrum cum rota circumagent. Tab. VII. Fig. 87.

Aliter.

Conſtrui quoque poteſt rota ad horizontem inclinata AB, cujus inferior ſuperficies dentibus, ſuperior ſcalis inſtruitur; quamvis autem rationem plani inclinati habeat, ut adeo potentia non tota vi ſua in eam agat (§. 211), major tamen diſtantia a centro motus eſſe poteſt, quam in verticaliter erectis. Tab. VII. Fig. 88.

Aliter.

Si pondus movendum ſit exiguum & motus celer requiritur, vecte homodromo FH ad horizontem parumper inclinato & circa centrum F mobili utimur, qui virga ferrea HI cum manubrio BE connexus cylindrum GL circumducit, ſi pede deprimatur. Tab. VIII. Fig. 89. Tornatores filum cylindro circumducunt perticæ flexili aut laminæ elaſticæ KN alligatum. Tab. VIII. Fig. 91. Quoniam potentia in G, adeoque in minori diſtantia, applicatur, motus eſt celer, utut potentia major eſſe debeat reſiſtentia in H vincenda (§. 481).

PROBLEMA 85.

599. *Machinam conſtruere, quam equus vel bos trahendo movere poſſit.*

RESOLUTIO.

Tab. VII. Fig. 82. Utendum eſt cylindro verticaliter erecto NO cum temone HG 8 minimum pedum, ut ſupra (§. 591). Præſtat autem temonem eſſe longiorem, quam breviorem, ne vertigine capiatur brutum in peripheria circuli continuo decurrens.

PROBLEMA 86.

Tab. VIII. Fig. 91. 600. *Machinam conſtruere, quam equus vel bos calcando movere poſſit.*

RESOLUTIO.

Conſtruendum eſt tympanum AB ſubſcudibus transverſis munitum & ſuper eo ſtabulo includatur equus vel bos per ſolum pertuſum pedibus poſterioribus rotæ inſiſtens ſubſcudemque ad horizontem inclinatam protrudens.

Aliter.

Si pondera minora moveri debent, veluti veru cum aſſa, tympanum eum in modum conſtrui ſolet, quo majora (§. 598), ab hominibus intra earum ambitum conſiſtentibus impellenda, & canis intus collocatur, tam pedibus, quam corporis ſui mole eandem circumagens.

SCHOLION.

601. *Cum machinæ hactenus deſcriptæ omnes, unica nonniſi (§. 589) excepta, ad axem in peritrochio revocentur, ſi attendatur ad lineam directionis potentiæ & inde determinetur diſtantia a centro motus (§. 187); virium æſtimatio haud difficulter inſtituitur (§. 508. 509).*

PROBLEMA 87.

602. *Machinam conſtruere, quæ a pondere deſcendente moveatur.* Tab. VII. Fig. 92.

RESOLUTIO.

1. Circa cylindrum AB horizontaliter poſitum funis circumvolvatur &
2. idem circa trochleam C circumducatur in magna a pavimento diſtantia.
3. Ejus denique extremitati alligetur pondus Q, quod dum deſcendit, cylindrum AB circumagit.

COROLLARIUM 1.

603. Quo major eſt altitudo, per quam pondus Q deſcendit, eo diutius durat motus.

SCHOLION.

604. *Hinc horologia, quæ a pondere deſcendente moventur, in editis turribus collocantur, aut, ſi index circumagendus fuerit exiguus, in ſuprema conclavis parte.*

COROLLARIUM 2.

605. Ut pondus Q lento gradu deſcendat, nec motus ejus acceleretur (§. 65);

65); cylindri AB motus eſſe debet quam tardiſſimus, conſequenter pondus ad movendam machinam adhiberi nequit, niſi in machinis compoſitis, ubi motus in principio tardus, ſed per plures machinæ partes propagatus ſit celerior (§. 528).

COROLLARIUM 3.

606. Cum adeo pondus in minori a centro diſtantia applicandum ſit, ibi potiſſimum huic potentiæ eſt locus, ubi non magna eſt reſiſtentia.

COROLLARIUM 4.

Tab. II. Fig. 607. Quodſi pondus P ex polyſpaſto FP ſuſpendatur, pondus celerius cylindrum LM circumagere poteſt. Dum enim per ſpatium peripheriæ cylindri deſcendit, & funes fuerint quatuor; cylindrus quater circumvolvitur, cum ſine polyſpaſto nonniſi ſemel circumageretur. Sed quia funis A I a quarta tantum ponderis Q parte trahitur (§. 549); perinde eſt ac ſi quarta tantum ejus pars ſine polyſpaſto ad machinam agitandam adhiberetur. Utendum igitur eſt polyſpaſto, ubi ſpatium non ſatis altum deſcenſui ponderis conceditur.

PROBLEMA 88.

Tab. II. Fig. 608. *Pondere appenſo adjuvare potentiam moventem.*

RESOLUTIO.

1. Ponderi movendo E alligetur funis EF & circa trochleam G circumducatur.
2. Alteri ejus extremo alligetur pondus D movendo fere æquilibratum.

Quodſi ergo exigua vis applicetur ad funem HD, pondus E movebit.

PROBLEMA 89.

609. *Machinam elateris vi movere.*

RESOLUTIO.

Tab. VIII. Fig. 95.

1. Lamella chalybea AB altero ſui extremo axiculo CD afferruminata in gyros contorqueatur & thecæ cylindricæ includatur.
2. Huic affigatur catenula, altero ſuo extremo axi coniformi GH alligata.

Quoniam enim laminæ vis elaſtica continuo minuitur, ſub initium & utique fortius trahens in minori a centro motus diſtantia GL applicanda; ſub finem vero, ubi ſegnius trahit, in majori IK (§. 508): quo obtinetur, ut potentia hæc in ſe ſatis inæquabilis ad motum tamen regularem, qualis eſt horologiorum portatilium, adhiberi poſſit.

SCHOLION.

610. *Equidem figura fuſi GH non conica, ſed alia conoidica eſſe debebat & celeberrimus* de la Hire (b) *in ejus conſtructionem inquirit. Sed cum hypotheſes aſſumere cogatur a rigore veri-*

(b) Traite de Mecanique prop. 72 p. 233 & ſeqq.

veritatis alienas; ipſemet non diffitetur, regulam, quam invenit, praxi non ſatis exacte reſpondere. Cæterum vi elaſtica animantur quoque automata culinaria.

DEFINITIO 76.

611. *Rota directa* eſt, quæ ab aqua deſuper labente & intra cavitates palmularum collecta movetur. *Rota* vero *retrograda* vocatur, quæ ab aqua celeriter profluente & in infimam rotæ palmulam impetum faciente circumagitur.

COROLLARIUM 1.

612. Quoniam aqua rarisſime ea rapiditate fertur, ut rotas molares circumagere poſſit; ex alto præcipitata impetum acquirat neceſſe eſt (§.65).

COROLLARIUM 2.

613. Cum itaque corpus grave tamdiu deorſum tendat, quamdiu centro telluris propius fieri poteſt; locus, ubi rotæ collocantur, centro telluris vicinior eſſe debet quam is, unde aqua in eas derivatur.

COROLLARIUM 3.

614. Et cum aquæ fluentes ſucceſſive cadant, a latice ſeu origine earundem nonniſi exigua declivitas, nempe quam ſufficere experientia loquitur, ad diſtantiam 100 pedum minimum $\frac{1}{4}$ unius pedis, ad ſummum dimidii, concedenda, reliqua autem proxime ante rotam in præcipitium mutanda.

COROLLARIUM 4.

615. Inquirendum itaque quanto depreſſior ſit locus, ubi rotæ molares conſtituuntur, quam origo aquarum.

DEFINITIO 77.

616. *Ars libellandi* eſt ars determinandi declivitatem aquarum, ſeu generalius, quanto intervallo punctum aliquod ſit terræ centro propius quam alterum.

COROLLARIUM.

617. Quoniam lineæ horizontalis puncta ſingula a centro Telluris æqualiter diſtant (§.165); aquæ libellantur, ſi linea horizontalis in datorum locorum ſuperiore inventa usque ad inferiorem continuetur & ejus a ſuperficie aquarum diſtantia utrobique inveſtigetur. Diſtantiarum enim differentia declivitatem metitur.

DEFINITIO 78.

618. *Libella* eſt inſtrumentum, quo invenitur linea horizontalis & ad datum quodcunque intervallum continuatur.

PROBLEMA 90.

619. *Libellam conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Ex centro ſemicirculi C ſuſpen- T
datur pondusculum H. V
2. Diametro AB infigantur unci Fi
E & F. 9

Quod-

Quodſi enim funis per uncos E & F ita extendatur, ut filum CD ſemicirculum appenſum bifariam ſecet; lineam horizontalem apparentem repræſentabit.

DEMONSTRATIO.

Quia ponduſculum H filum CD extendit; erit CD linea directionis ejus (§. 20). Et quia ſemicirculum bifariam ſecat, ad AB perpendicularis eſt (§. 137 *Geom.*). Ergo AB eſt linea horizontalis apparens (§. 173). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Regulæ orichalceæ AB afferruminentur dioptræ & inferius in C lamina cochlea E inſtructa.
2. Laminæ vero huic afferruminetur priſma excavatum FG cum ſtylo GHIK bifurcato.
3. Inferius afferruminetur annulus cum anſula, ut, ſi opus fuerit, pondus appendi poſſit.
4. Paretur denique fulcrum ſemicirculare aut ſemiellipticum NO ſuperius in P cochlea PQ inſtructum, ut inſtrumentum cruribus IK in cuſpides acutas deſinentibus in punctis S & T inſiſtere queat.

Quodſi enim fulcimentum mediante cochlea ad arborem aut baculum erectum firmetur, inſtrumentum eidem inſiſtens vi gravitatis in eum ſitum ſeſe diſponet, ut regula cum dioptris ſit horizonti parallela.

Aliter.

Ricciolus propria experientia fretus hanc libellam (c) commendat. Tab. IX. Fig. 98.

1. Super regula AB pedum 12 aut ad ſummum 20 canaliculo excavato inſeratur tubus CD ex laminis ferreis ſtanno obductis paratus, cruribus CA & BD ad angulos rectos reclinatis.
2. In C & D afferruminentur cochleæ orichalceæ fœminæ, quibus aliæ mares inſerantur, ut tubus quam arctiſſime claudi poſſit.
3. Glutine quodam in cochleis maribus firmentur tubi vitrei EC & FD ad AB normales.
4. Denique in G afferruminetur globus orichalceus, isque cavus, ne gravitate moleſtus ſit, & intra matricem fulcro affixam ita reponatur, ut libere huc illucque libella moveri & in ſitu eodem, ſi neceſſe ſit, immota ſervari poſſit. Orificia vero tuborum E & F obturentur, ne aqua effluere poſſit inter transferendum.

Quodſi enim inſtrumentum aqua reple-

(c) Geograph. Reformatæ lib. 6. c. 26 §. 8. f. 239.

repleas & tubum ita conſtituas, ut aqua utrobiq; in tubis vitreis eandem altitudinem AH & BI attingat; erit HI linea horizontalis apparens, cum fluidorum quieſcentium partes omnes eandem a centro telluris diſtantiam habeant: alias enim remotiores vi gravitatis ruerent verſus locum inferiorem, qui conceditur.

5. Conſultum quoq; eſt, ut ad tubos BD & AC afferruminentur dioptræ K & L ad juvandam collineationem.

Aliter.

Tab. IX. Fig. 99. 1. Tubus vitreus, cujus longitudo IL ultra pedis longitudinem excreſcere poteſt, glutine quodam firmetur intra tubulos orichalceos IP & QL, ſitque tubus in altero extremo L apertus, ſed obturaculo quodam ex ſubere parato & capite orichalceo inſtructo claudendus.

2. Tubus ita paratus firmetur ſuper regula ST, ad quam etiam

3. Firmentur dioptræ M & N.

4. Infra hanc regulam firmetur alia minor CD circa axiculum in C mobilem, mediante cochlea G nunc attollenda, nunc deprimenda.

5. Intra has regulas ſit lamina elaſtica H ex orichalco aut chalybe parata, ut inſtrumentum tanto accuratius ad ſitum horizontalem diſponi poſſit.

6. In medio denique regulæ inferioris afferruminetur matrix ſeu cochlea fœmina, ut libella ad fulcrum quoddam, quoties ea utendum, firmari poſſit.

Quodſi tubum vel aqua, vel ſpiritu vini colorato repleas, ita tamen ut pauculum aeris remaneat, bullulam in ſuperficie fluidi formaturum; aſcendet bullula in partem ſuperiorem, ſi tubus fuerit inclinatus, ſed datum ſitum e. gr. in F tuebitur, ſi horizontalis fuerit. Levia enim ſurſum aſcendunt, quantum datur.

SCHOLION 1.

620. *Alia libellarum genera a viris celeberrimis* Philippo de la Hire, Roemero, Hugenio, Picardo *inventa deſcribuntur a modo laudato* Picardo (d). *Adhuc alia dederunt* viri Cl. Coupletus (e) & Hartſoekerus (f). *Ego eas deſcripſi, quas mea inſtrumentorum ſupellex mihi ſuppeditavit.*

SCHOLION 2.

621. *Prima libellarum, quam exhibui non ſatis*

d) Traité du nivellement c. 2. p. 37 & ſeqq.

e) Memoires de l'Academie Royale des Sciences A. 1669. p. 172.

f) in Miſcellan. Berolinenſ. p. 328 & in Actis Eruditorum A. 1712. p. 34.

ſatis fida. Ricciolus *enim jam obſervavit, facile aberrari 5 minutis, immo gradu dimidio, niſi ingens fuerit. Sed moles uſum moleſtum reddit. Facile tamen medela quæritur, ſi ſcilicet loco ſemicirculi utamur regula AB trium pedum cum altera longiore CD quatuor pedum ad angulos rectos priori inſiſtente: quæ ſi dioptris inſtruatur & libere ſuſpendatur, fulcro conveniente adhibito, exactiſſimam libellam conſtituit.*

SCHOLION 3.

622. *Solent quoque a nonnullis in libellationibus præſertim longioribus dioptrarum loco adhiberi teleſcopia; ſed multa circumſpectione opus eſt, ut rite ad inſtrumenta applicentur. Enimvero ea de re in Opticis rectius dicetur.*

PROBLEMA 91.

623. *Rectificare libellam.*

RESOLUTIO.

Ut certus ſis, libellam eſſe revera in ſitu horizontali

1. Inſtrumento in A collocato collineatio fiat in C centrum tabulæ in B erectæ.
2. Libella, quæ eum in finem duplicibus dioptris inſtrui debet, invertatur & denuo collineatio fiat in tabulam DE.
3. Quodſi idem punctum C ſit in linea viſuali, libella convenientem habet ſitum; ſin in puncto altiori aut depreſſiori deſinat, pauliſper attollenda vel deprimenda eſt (quo ſpectant regulæ cum cochleis in libellis paulo ante deſcriptis), donec linea viſualis punctum inter duas collineationes medium attingat.

DEMONSTRATIO.

Ponamus inſtrumentum eſſe in linea horizontali AC & viſu attingi punctum C. Si ſitus inſtrumenti mutetur, ut B in A & A in B conſtituatur, cum linea horizontalis non ſit niſi unica, adhuc linea viſualis AB ultra dioptras continuata in puncto C terminabitur. *Quod erat unum.* Tab. IX. Fig. 102.

Quodſi inſtrumentum non ſit horizonti parallelum, centrum ejus G ſecabit horizontalem AB eritque HGB = AGF (§. 150 *Geom.*), & collineanti per F & H occurret punctum altius D. Quodſi libella invertatur, ut H in *h* & F in *f* conſtituatur; erit *h*GA = BG*f* (§. 150 *Geom.*). Eſt vero *h*GA = HGB, quia inſtrumentum ſitu reſpectu lineæ horizontalis immutato inverſum. Ergo BG*f* = HGB. Quare cum porro, ob rectam D*d*, in quo ſunt puncta D & *d*, ad lineam horizontalem perpendicularem, anguli recti ad C æquales ſint (§. 139 *Geom.*); erit CD = C*d* (§. 236 *Geom.*), hoc eſt, linea horizontalis cadit in punctum C intra duo collineata D & *d* medium. *Q. e. d.*

PROBLEMA 92.

624. *Aquas libellare.*

RESOLUTIO.

Tab. IX. Fig. 101. 1. Eo in loco, ubi origo declivitatis ſtatuitur, ope ponderis ex fune ſuſpenſi exploretur, quanto intervallo ſuperficies aquæ a ripa abſit.

2. Idem fiat altero in loco, ubi declivitatis terminus ſtatuitur.

3. Erectis in A & B baculis ad horizontem perpendicularibus cum tabulis D & C nigro colore tinctis, ſed cruce alba notatis, atque ope cochleæ in quocunque ſitu ad baculos firmandis, libella EF collocetur in P.

4. Tabula utraque D & C nunc attollatur; nunc deprimatur, donec per EF collineanti punctum medium, in quo lineæ albæ ſeſe mutuo interſecant, occurrat.

5. Inveſtigetur exactisſime altitudo punctorum D & C nempe AD & BC atque in ſchedula notetur.

6. Tum inſtrumento in Q & baculo AG in M translato, fiat ut ante collineatio in O & P, notenturque altitudines OB & PM. Et ita operatio continuetur, donec terminum declivitatis M attigeris.

7. Addantur in unam ſummam altitudines AD & BO &c. itemque BC & MP &c. & priori adjiciatur altitudo ripæ in origine declivitatis A, poſteriori vero altitudo ripæ in fine declivitatis M.

8. Quodſi enim aggregatum poſterius e priori auferas, relinquetur declivitas aquarum a termino A usque ad alterum M fluentium reſpectu lineæ horizontalis apparentis.

9. Quare ſi tractus AM fuerit longus; quod ab ea ſubtrahendum eſt, ut habeatur declivitas reſpectu lineæ horizontalis veræ, invenitur per problema 28 (§. 174) aut ſine novo calculo in tabula ſuperius exhibita (§. 175).

Sit AD	34″	BG	57″
BO	68	PM	102
altit. ripæ AL	64	altit. ripæ MN	58
Summa	166	Summa	217
			166
		declivitas LI	51

Sit LK 900 pedum; erit declivitas LI mulctanda 3 lineis, ut relinquatur vera 5′ 0″ 7‴.

DEMONSTRATIO.

Ducantur IN & LK itemque OQ parallelæ; erit DQ = OC & PN = QI (§. 215 *Geom.*). Ergo DA + AL + OB = QL + BC & PM + MN + BC = QI + BC, conſequenter QI + BC - QL - BC = LI. *Q. e. d.*

SCHOLION.

625. *Quoniam in hac operatione facile ab-*

errari

errari poteſt, conſultum eſt, ut libellatio bis inſtituatur, nempe primum a termino A usque ad terminum M, deinde retro a termino M usque ad terminum A.

DEFINITIO 79.

626. *Sectio fluminis* eſt planum ad angulos rectos ſecans aquam in alveo fluentem, cujus fundus horizontalis, ripæ autem inter ſe parallelæ.

COROLLARIUM 1.

627. Quoniam linea directionis particularum aquæ tanquam corporis gravis eſt ad horizontalem perpendicularis (§. 173) & fundus alvei atque ſuperficies aquæ horizontalis, ripæ vero inter ſe parallelæ, *per hypoth.* latera plani ſecantis erunt ad baſin perpendicularia & inter ſe parallela, conſequenter ſectio rectangulum eſt (§. 215. 223. 96 *Geom.*).

COROLLARIUM 2.

628. Invenitur adeo ſi latitudo alvei in profunditatem aquæ ducatur (§. 357 *Geom.*).

COROLLARIUM 3.

629. Sunt etiam ſectiones diverſæ in ratione compoſita latitudinum alveorum & profunditatum aquarum.

SCHOLION 1.

630. *Cum aquæ fluentes nunc intumeſcant, nunc tabeſcant, eo potiſſimum tempore ſectionem fluminis dimetiri debet molendina exſtructurus, quo mediocrem habet altitudinem.*

SCHOLION 2.

631. *Quodſi aquæ copia non abundamus, conſultum eſt, ut aqua in ſtagno colligatur inde per alveum in rotas deducenda, ne minimum ejus pereat. Quærendi etiam ſunt fontes in vicinia ſiti & aqua ex iis in ſtagnum derivanda.*

SCHOLION 3.

632. *Cum ex ſuperioribus conſtet, in conflictu corporum non modo habendam eſſe rationem maſſæ, ſed etiam celeritatis, qua corpus in aliud quieſcens impingens movetur (§. 378); in molendinis aquarum vi agitandis conſideranda eſt & ſectio earum & declivitas in præcipitium mutanda, unde celeritas ejus dependet. Quodſi declivitas fuerit inſignis, plurimorum ſcilicet pedum, e. gr. 10 aut 12, & ſectio aquæ exigua, rota conſtruitur directa; aſt ſi declivitas exigua & ſectio ingens, rota utendum eſt retrograda.*

PROBLEMA 93.

633. *Aquam fluentem in rotam directam deducere.*

RESOLUTIO.

1. Ut declivitas in præcipitium mutari poſſit, aqua per alveum aut canalem ex ligno conſtruſtructum deducatur ad rotam, & diſtantiæ 100 pedum concedatur declivitas $\frac{1}{4}$ unius pedis, ne aqua nimis ſegniter fluat.
2. Rota ratione decente conſtructa ſub canali ita conſtituatur, ut aqua deorſum ruens per planum declive in capſulam ab axe ſecundam irruat, ipſa vero aquæ

effuſæ ſuperficiem non attingat, ne motus retardetur.

COROLLARIUM 1.

634. Quodſi a declivitate integra ſubducatur pars, quæ aquæ concedenda, ut intra alveum ſuum fluere poſſit & in rotam præcipitanda impetum acquirat, nec non ut aqua effuſa defluat; diameter rotæ relinquitur.

COROLLARIUM 2.

635. Ut aqua omnis in palmulas incidat, eas canale latiores eſſe præſtat.

PROBLEMA 94.

636. *Rotam directam conſtruere.*

RESOLUTIO.

Tab. IX. Fig. 103. Totum artificium huc redit, ut ſitus palmularum determinetur; id quod ſequentem in modum fieri ſolet.

1. Semidiametro rotæ (quæ eſt dimidia altitudo ejus) in ſcala modica ſumta deſcribatur circulus AIKA & ſemidiametro minore CE, quæ differat a priori quantitate latitudinis orbium AE quibus palmulæ infiguntur, alius.
2. Recta AE dividatur in tres partes æquales, ita ut DE ſit $\frac{1}{3}$ AE.
3. Ex centro C per D deſcribatur circulus in tot partes æquales dividendus, quot palmulis inſtruenda eſt rota.
4. Applicata regula ad duo diviſionis puncta H & F, tertio intermedio D relicto, ducatur recta HI &
5. in H excitetur perpendicularis HG.

Recta HI ſitum palmulæ unius; recta vero HG ſitum alterius determinat. Et eodem modo ſitus binarum quarumcunque aliarum palmularum determinatur.

PROBLEMA 95.

637. *Aquam ad rotam retrogradam deducere.*

RESOLUTIO.

1. Ne aqua ſuperflua in rotam incidat & tota ejus declivitas, parte demta, quæ ipſi ut fluere poſſit concedenda, in præcipitium mutari queat; foſſa effodiatur a flumine, ex quo aqua deducitur, tanto intervallo diſtans, quanto conceditur, tum ut aqua impetu in rotam facto promptius defluat, tum ne aqua intumeſcens ripis foſſæ atque molendino facile damnum inferat.
2. Ne autem aqua intumeſcens agros vicinos inundet, riparum ſufficiens eſſe debet altitudo. Conſultum quoque eſt, ut fundus foſſæ arena complanetur.
3. Quo aquæ ſufficiens copia in foſſam deducatur, per transverſum fluminis excitandus eſt agger, tantæ altitudinis, quanta permittitur ad aquam citra damnum

num alterius in motu ſuo retardandam.

In fine foſſæ trabs horizontaliter ſternatur, quæ *arboris molinariæ* fert nomen, ejus ſuperficies cum fundo foſſæ ſit in eodem plano, ut aqua omnis in rotas præceps dari poſſit.

Super arbore molinaria perpendiculariter erigantur duæ trabeculæ tertia transverſa jungendæ & canaliculis excavandæ, ut tabula nunc elevata, nunc depreſſa aqua a rota arceri, vel ad eandem demitti poſſit.

Ut igitur aqua tabula depreſſa impedita, quo minus ad rotam præcipitetur, aliorſum fluere poſſit, & ne aqua intumeſcens ripas foſſæ egrediatur; alicubi foſſæ molinariæ a latere jungenda eſt alia, ad arbitrium claudenda & aperienda, aquæ ſuperfluæ tranſitum conceſſura.

Alveus denique declivis in fine foſſæ excitetur, profunditatis AB, quanta eſt declivitas in præcipitium mutanda, utque in rotam directe impingat aqua, ſuperficies per quam delabitur ſternenda eſt juxta arcum DC ex centro rotæ E intervallo radio ejus paulo majore deſcriptum.

Quodſi foſſæ molinariæ locus nullus concedatur, agger per transverſum fluminis prope molam conſtruendus, ut aqua in motu retardata in alveum derivetur.

COROLLARIUM 1.

638. Si ea fuerit foſſæ latitudo, ut duabus rotis juxta ſe invicem conſtituendis locus concedatur; duo quoque conſtruendi ſunt alvei cum tertio intermedio, vel a latere poſito, per quem aqua ſuperflua a molendino arcetur.

COROLLARIUM 2.

639. Quodſi declivitas aquæ in præcipitium mutanda ea fuerit, ut ejus dimidium, vel ſubtriplum &c. rotæ agitandæ ſufficiat; intra unum alveum duæ vel tres &c. rotæ conſtituuntur, declivitate inter eas diviſa, ita tamen ut præcipitium majus ſit ante poſteriores, quam anteriores rotas.

SCHOLION 1.

640. *Aggeres excitantur, palis in fundum fluminis adactis, quarum anteriores altiores, poſteriores humiliores; differentia altitudinis primarum & ultimarum exiſtente æquali altitudini, ad quam aquam in motu retardare licet. Spatia palis interjecta arena & ſabulo replentur & ſuperius ſtratum paratur vel ex aſſeribus, vel ex lapidibus. Fundus fluminis ante aggerem ad 6 vel 7 pedum diſtantiam complanatur, ne aqua vim ipſi inferre poſſit.*

SCHOLION 2.

641. *Rotarum retrogradarum conſtructio nihil habet difficultatis: palmularum enim ſitus determinatur per radios ex centro rotæ eductos, ſive intra orbes collocentur, ſive in fronte conſtituantur.*

PRO-

PROBLEMA 97.

Tab. IX. Fig. 105. 642. *Vi venti machinam movere.*

RESOLUTIO.

1. Axi inſigantur virgæ AB & CD ſe mutuo ad angulos rectos in E ſecantes, quarum longitudo 32 pedum fieri ſolet.
2. Ad has virgas ex ſcandulis conſtruantur alæ figuram trapezii parallelarum baſium habentes, quarum latitudo HI ſit 6 circiter pedum, inferior FG per radios ex centro E ad C & H ductos determinatur.
3. Ita autem alæ aptandæ ſunt, ut FG cum axe EL efficiat angulum 45°.
4. Denique ut alæ vento ſemper obverti poſſint; tota machina circa axem NK verſatilis eſſe debet, ut ope vectis PQ huc illucque verſari atque in omnes plagas dirigi queat.

Aliter.

Tab. IX. Fig. 106. Alii turriculam ex lapidibus vel lateribus conſtruunt, ita ut tantummodo tectum cum axe alato verſatilis exiſtat. Eum ſcilicet in finem.

1. Turricula annulo ligneo cingitur & in eo canaliculus effoditur, in cujus fundo hinc inde trochleæ orichalceæ ita immittuntur, ut exiguum ſegmentum ultra eum promineat.
2. Intra canaliculum alius annulus reponitur, cui tectum ſuperſtructum.
3. In exteriori circa turriculam area deſiguntur unci ferrei G &
4. Cum annulo mobili connectuntur trabes AB & FC, quarum altera priorem tecto firmius affigit.
5. Denique in B alligetur funis trabi AB in E circumducendus & altero ſui extremo axi in peritrochio aut ſuculæ alligandus. Quodſi enim funis per uncum G ducatur & ſucula convertatur, trabs AB ad illum adducitur, conſequenter alæ in plagam ipſi oppoſitam diriguntur.

SCHOLION 1.

643. *Prior modus noſtris in oris uſitatus, poſteriore in Batavia utuntur. Et poſterior quidem priori præſtat, quia alæ conſtrui poſſunt majores, conſequenter machina a vento agitari, ubi major reſiſtentia ſuperanda. Quodſi vero ad hanc vincendam minores ſufficiunt, prior ideo antefertur, quia ſumtibus longe minoribus exſtruitur.*

SCHOLION 2.

644. *De machinis vi ignis movendis cogitarunt* Thomas Savery (g) Amontons (h) & Dionyſius Papinus (i): *ſed valde vereor, ne*

g) in Tranſact. Anglican. n. 252 p. 228.
h) Memoires de l' Academie Royale des Sciences Anne 1699 edit. Bat. p. 154.
i) in Arte nova ad aquam ignis adminiculo efficaciſſime elevandam.

ne inventa ipſorum praxi parum reſpondeant. Hactenus cum ſucceſſu eadem non uſi ſunt, niſi automata culinaria huc referre velis, quæ a fumo agitantur.

SCHOLION GENERALE.

645. *Quæ hactenus de potentiarum ad machinas applicatione diximus, eum unice in finem propoſuimus, ut in machinis inveniendis uſui eſſent, quoniam earum ſtructura externa, ex parte etiam interna inde pendet. Mathematica horum omnium tractatio & plus temporis requirit, quam huic operæ impendere conceditur, cum pleraque adhuc in deſideratis habeantur, nec ad ſcopum noſtrum apprime facere videtur. Neque operas manuarias hic exponere viſum eſt, cum eædem ad Matheſin non ſpectent, ſed ab eadem ſupponantur. Matheſis enim in dimetiendis iis occupatur, quæ ſub menſuram cadunt; manuarias vero artes non docet; quamvis utile judicemus, ut a theoria ad praxin progreſſurus earum non ſit ignarus, ne (de quo vulgo conqueruntur) in theoria pro veris habeantur, quæ non ſuccedere in praxi experientia loquitur. Ne igitur in hunc ſcopulum impingas, nihil aſſumendum eſt tanquam arte parabile, quod arte parari poſſe non jam ante experientia cognoveris aut ex iis, quæ experientia conſtant, legitima conſequentia deduxeris.*

CAPVT XV.
DE
RESISTENTIA IN MACHINIS
SEV FRICTIONE.

DEFINITIO 80.

646. *Frictio* eſt reſiſtentia ſuperficiei, per quam inceditur.

SCHOLION.

647. *Ita perſpicaciſſimus* Leibnitius (k) *frictionem definit, qui primus hanc materiam diſtincte evolvit.*

DEFINITIO 81.

648. *Corpus* dicitur *aſperum*, in cujus ſuperficie eminentiæ & cavitates alternantur.

DEFINITIO 82.

649. *Superinceſſus radens* eſt, ſi punctum idem ſuperincedentis lineam in ſuperficie deſcribit, per quam inceditur. E. gr. Talis eſt ſuperinceſſus parallelepipedi ſuper plano protruſi.

DEFINITIO 83.

650. *Superinceſſus volvens* eſt, ſi punctum contactus continuo mutatur. E. gr. Talis eſt rotæ in curru tam reſpectu axis, quam reſpectu ſoli.

DEFINITIO 84.

651. *Motus mixtus* eſt, ſi volutioni

(k) in Miſcellaneis Berolinenſibus p. 307.

ni admiſcetur motus radens elementaris ſeu inſtantaneus.

SCHOLION.

652. *Hunc motum diſtinctius explicat* Leibnicius (l); *ſed nos eodem nunc non utemur.*

THEOREMA 126.

653. *Si ſuperficies, per quam inceditur, & ſuperficies corporis, quod per illam incedit fuerint aſperæ, frictio oritur.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim in ſuperficie corporis aſperi eminentiæ & cavitates ubique alternentur (§. 648); ſi tam ſuperficies corporis incedentis, quam ea, per quam inceditur, aſperæ fuerint, eminentiæ vel ſunt intra cavitates deprimendæ, vel prorſus abradendæ, vel eminentiæ unius ex cavitatibus alterius attollendæ. Sed nihil eorum fieri poteſt ſine motu, nec motus produci ſine vi impreſſa. Vis igitur, qua corpus movetur, vel tota, vel ex parte his effectibus impendenda, adeoque motui corporis reſiſtitur (§. 21), conſequenter frictio oritur (§. 646). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

654. Quo aſperiores itaque ſunt ſuperficies, eo reſiſtentia major.

SCHOLION 1.

655. *Aſperitas æſtimanda eſt non modò ex numero eminentiarum abradendarum vel deprimendarum; verum & ex difficultate eas abradendi vel deprimendi, nec non ex mole cavitatum. Fieri namque poteſt, ut eminentiæ aliæ minori vi abradantur, vel deprimantur, aliæ autem nonniſi majori vincantur.*

COROLLARIUM 2.

656. Si corpora frictione continuata politiora fiunt, frictio minuitur.

SCHOLION 2.

657. *Id ipſum experientia clariſſime loquitur.*

COROLLARIUM 3.

658. Superficies adeo partium in machinis, quæ ſe mutuo tangunt, quantum fieri poteſt, poliri debent.

COROLLARIUM 4.

659. Quoniam tamen corpus nullum adeo poliri poteſt, ut omnis aſperitas tollatur, microſcopiis teſtibus; conſultum eſt (quod & dudum in praxi receptum) ut partes ſe mutuo tangentes oleo aut alio unguine illinantur.

THEOREMA 127.

660. *Dum pondus corporis incedentis ſuperficiem ejus ad ſuperficiem, per quam inceditur, apprimit; frictio augetur.*

DEMONSTRATIO.

Dum enim pondus corporis incedentis ſuperficiem ejus apprimit ad ſuperficiem, per quam inceditur; eminentiæ unius tanto pro- fun-

(l) in Miſcellan. Berolinenſ. p. 312, 313.

fundius in cavitates alterius deſcendunt, adeoque majori vi inde rurſus attolluntur (§. 215) vel etiam deprimuntur aut abraduntur. Major itaque vis requiritur ad hæc obſtacula vincenda, quam ſi non adeo valide corpus incedens apprimeretur. Unde patet, quod appresſio ex pondere ſuperincedentis augeat reſiſtentiam ſuperficiei, per quam inceditur (§. 21), hoc eſt, frictio augetur (§. 6[illegible]). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

661. Creſcente adeo pondere corporis incedentis aut inſiſtentis, frictio creſcit.

SCHOLION.

662. *Hinc libra exiguis ponderibus onuſta exigua vi ab æquilibrio dimovetur; pluribus autem onuſta, majori vix dimovetur.*

THEOREMA 128.

663. *Si linea directionis corporis incedentis ad ſuperficiem, per quam incedit, fuerit obliqua; frictio intenditur.*

DEMONSTRATIO.

Si enim linea directionis corporis incedentis ad ſuperficiem, per quam inceditur, obliqua; vis, qua movetur, verſus ſuperficiem, per quam inceditur, nititur adeoque perinde eſt, ac ſi ſuperficies incedentis a pondere ad eam apprimeretur. Sed appreſſio ex pondere incedentis frict ionem intendit (§. 660). Ergo eadem intenditur, ſi linea directionis incedentis ad ſuperficiem, per quam inceditur, fuerit obliqua. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

664. Quoniam ictus perpendicularis eſt ad obliquum ut ſinus totus ad ſinum anguli incidentiæ (§. 396), ſinus autem anguli majoris major, eſt minoris contra minor (§. 2 *Trigon.*); niſus corporis ſuperincedentis in ſuperficiem, per quam inceditur, conſequenter frictio major eſt, quo propius ad perpendiculum accedit linea directionis corporis incedentis.

SCHOLION.

665. *Hæc denuo experientiæ valde conſona ſunt & præcipue in dentibus rotarum obſervatur, ut ſæpiſſime hac de cauſa prorſus frangantur.*

COROLLARIUM 2.

666. Tollitur adeo hæc frictio, ſi linea directionis corporis incedentis fuerit parallela ſuperficiei, per quam inceditur: tum enim niſus ſuperincedentis in eam nullus eſt.

THEOREMA 129.

667. *Si ſuperinceſſus volvens, longe minor eſt frictio, quam ſi radens extiterit.*

DEMONSTRATIO.

Sit regula dentata AB & ſuper ea incedat rota DE, cujus dentes ſint ad peripheriam normales. Tab. IX. Fig. 107.

 Quod-

Quodſi ſuperinceſſus fuerit radens, dens F, qui regulam tangit, lineam rectam in ſuperficie regulæ deſcribere debet (§. 649). Cum adeo ipſi reſiſtat dens regulæ H, progredi omnino nequit, niſi hic frangatur, aut deprimatur, vel dens rotæ F curvetur aut prorſus abradatur. Idem ergo cum contingat, ſi corporis cujuscunque alterius aſperi ſuper ſuperficie aſpera incedentis ſuperinceſſus radens fuerit; frictio omnis locum habet, quæ ab aſperitate ſuperficiei oriri poteſt. Enimvero ſi rota ED ſuper regula provolvatur, tum dens regulæ H inceſſui ejus non amplius reſiſtit, niſi quatenus ex cavitate F ſupra eminentiam dentis H attollendus. Idem cum valeat, ſi corpus quodcunque aſperum ſuper aſpera ſuperficie volvitur, frictio minor eſt, ſi ſuperinceſſus volvens, quam ſi radens extiterit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

668. Ne igitur in machinis frictio magnam vis motricis partem abſumat, cum cura diſpiciendum eſt, ut, quantum fieri poteſt, nulla pars machinæ alteram radat, quin potius una ſuper altera volvatur.

COROLLARIUM 2.

669. Hinc conſultum eſt, ut axiculi cylindrorum non (quod vulgo fieri ſolet) matrici concavæ, ſed rotulis A, B, C, D circa axiculos verſatilibus imponantur.

SCHOLION 1.

670. *Suaſit hoc dudum* Paulus Caſatus (m) *& experientia confirmat, quantum virium hoc artificio lucremur. Quodſi metuas, ne axiculus cylindri ſatis tuto duobus rotulis A & B incumbat, tertiam addere licet.*

SCHOLION 2.

671. *Hinc etiam, ſi trochlea circa centrum mobilis, tractioni minus reſiſtitur, quam ſi eadem fixa foret. Eadem eſt ratio, cur rotæ curruum circa axem verſatiles ſint.*

SCHOLION 3.

672. *Patet quoque ratio, cur trahæ difficillime trahantur in plateis lapidibus ſtratis; facillime autem, ſi nive via obtegatur, ut planitiem probe politam exhibeat.*

SCHOLION 4.

673. *Ex eodem fonte* Olaus Roemerus, *cum Pariſiis commoraretur, quamvis non ſine ſubſidio Geometriæ ſublimioris deduxit, figuram dentium in rotis epicycloidalem eſſe debere: id quod poſt eum quoque oſtendit* Philippus de la Hire (n): *ſed, quod dolendum, hactenus in praxin recepta non eſt.*

COROLLARIUM 3.

674. Quoniam rotulæ circa axiculum fixum verſatiles volvuntur, dum in ſuperficie corporis alterius incedunt; earum ope ſuperinceſſus radens in volventem transmutari poteſt, quotiescunque datur.

m) Mechanicorum lib. 2. c. 1. p. 130.
n) Memoires de Mathemat. & de Phyſique p. 51 & ſeqq.

SCHOLION 5.

675. *Ita in machinis, quæ ſerrarum reciprocatione ligna ſecant, rectanguli lignei, cui ſerræ inſeruntur, latera iſtiusmodi rotulis inſtrui deberent. Minuta enim frictione, plures ſerræ una ſecare poſſent. Similiter brachia piſtillorum attollendorum CD rotulis inſtruere juvat, ut ſuper pinnulis curvis EF axis FH ſine frictione incedant. Pinnulis figuram epicycloidicam aſſignat* Cl. de la Hire (o).

COROLLARIUM 4.

676. Et quia axes curvati ſuperinceſſum plane tollunt (§. 597); iis rotarum loco utendum, quotiescunque datur.

SCHOLION 6.

677. *Equidem nec hic ceſſat frictio in E & G. Enimvero ea perexigua eſt, ſi comparetur cum frictione, quæ ex ſuperinceſſu rotarum oriri ſolet.*

SCHOLION 7.

678. *Equidem* Amonto *regulam univerſalem dedit computandi vim ad frictionem in dato quolibet caſu ſuperandam requiſitam* (p); *ſed cum omnem frictionem a ſola appreſſione ex pondere ſuperincedentis derivet, ex antecedentibus ſatis apparet, quod propoſito ſatisfacere nequeat.*

CAPUT XVI.
De
MACHINIS COMPOSITIS.

DEFINITIO 85.

679. *Machina compoſita* eſt, quæ ex pluribus ſimplicibus tanquam partibus conſtat.

SCHOLION.

680. *Machinarum compoſitarum nullus eſt numerus. Conſtruuntur autem tum ad onera ingentia attollenda, tum ad motus varios producendos, qui in uſum vitæ humanæ redundant. Omnia nimirum hominum opera a machinis perfici poſſunt, ad quæ idem ſemper motus vel continuo, vel juxta certam periodum repetitur. Ita ad frumentum in farinam conterendum rotatione continua ſaxi molaris opus eſt: unde hæc opera machinis demandatur. Similiter ad contuſionem granorum, ex quibus oleum exprimitur, piſtillorum elevatione continuo iteranda opus eſt: hinc a machinis contuſio iſta perficitur. Ut arbor proſtrata in aſſeres diſſecetur, continua ſerrarum reciprocatione opus eſt. Quare denuo machinarum vires ad hunc uſum transferuntur. Noſtrum equidem non eſt, theatrum quoddam machinarum in præſenti aperire; ſed ut compoſitionis earundem quandam ideam animo comprehendant tyrones, unum ſaltem alterumque exemplum in medium afferemus, additis regulis quibusdam generalibus, quibus de machinis inveniendis ſolliciti juvantur.*

PROBLEMA 97.

681. *Dato opere perficiendo, machinam componere.*

o) loc. cit. p. 72 & ſeqq.

p) Memoires de l'Academie Royale des Sciences A. 1699 p. 260 & ſeqq. edit. Bat.

RESOLUTIO.

1. Ante omnia opus eſt, ut operis perficiendi notionem diſtinctam &, quantum licet, adæquatam habeamus: ad quam quomodo perveniatur, ex commentatione de methodo §. 8 & 10 colligitur, & alibi diſtinctius explicavi (q). Scilicet ſingula, quæ in opere perficiendo, ulla ratione diſtingui poſſunt, tum ſigillatim expendenda, tum inter ſe conferenda.

2. Ex hac operis perficiendi idea colligendum, quali motu opus ſit ad id præſtandum, quod requiritur: qui eſt effectus a machina producendus.

3. Ex eadem quoque conſtabit quantitas virium ad reſiſtentiam in motu ſuperandam requiſitarum: ubi

4. inprimis conſideranda eſt frictio ex ſuperinceſſu mobilis orinnda & de remediis mechanicis capite ſuperiori expoſitis deliberandum.

5. Antequam vero conſilium ineatur, quibusnam machinis ſimplicibus combinatis motus deſideratus produci queat; de potentia machinam agitatura cogitandum eſt, quoniam pro ejus conditione variat interna quoque machinæ ſtructura. Quam primum igitur certus fueris de potentia ad machinam applicanda; externa ejus ſtructura ſtatim conſtabit ex capite decimo quarto.

6. Unde quantitate virium, quæ ad motum ultimum producendum requiruntur, una expenſa, vi capitis undecimi non difficulter determinantur machinæ ſimplices in compoſita combinandæ.

E. gr. Sit conſtruenda machina, qua onus ingens O in altum attolli poſſit & quæ commode de loco in locum transferri queat. Cum onus attollendum ſit corpus grave, ſtatim apparet, lineam directionis eſſe ad horizontem perpendicularem. Talis ergo conſtruenda eſt machina, quæ pondus ſurſum trahat ſecundum lineam directionis ad horizontem perpendicularem. Quoniam vero pondus oneris non determinatur, ſed ſaltem ingens ſupponitur; machinam conſtruere ſufficit, qua homo pondus aliquod viribus ſuis longe ſuperius elevare poſſit, tempore tamen non nimis longo. Et quia machina compendioſa eſſe debet, ut commode huc illucque transferri poſſit; moveri optime poterit verſando, adeoque axe incurvato ABC inſtruenda (§. 593). Enimvero ut pondus ingens moveri poſſit, axis curvatus ſolus non ſufficit, ſed cum rota dentata GF axi hori-

Ta X. Fig 110

(q) Zu den vernünfftigen Gedancken von den Kräfften des Verſtandes c. 1. §. 17. 18. p. 16. 17.

horizontali GH infixa combinandus. Denique ut funis pondus ſurſum trahens circa cylindrum inferiore loco conſtitutum circumvolvi queat, ſupra trochleis I & K ad axem GH adducendus. Conſtat ergo machina ex axe GH cum rota ſtellata GF & axe dentato LC atque incurvato CBA duabusque trochleis I & K. Trochleæ ad virium incrementum nil conferunt, ſed ſola rota FG & axis incurvatus CBA. Eſt nimirum ſepoſita frictione potentia ſuſtentans ad pondus in ratione compoſita radii axis dentati LC ad BC & radii axis GH ad ſemidiametrum rotæ GF (§. 519).

PROBLEMA 98.

682. *Machinam conſtruere, qua ingens admodum pondus ad altitudinem mediocrem attolli poteſt.*

RESOLUTIO.

1. Erigatur vectis AB, cujus centrum C, & in D infigatur uncus, cui onus attollendum G alligari poſſit.
2. Alteri vectis extremo B affigatur annulus E, qui cochleæ fœminæ F ſeu matrici afferrumınetur.
3. Matrici inſeratur cochlea HI, quæ ergatæ IL circa axem ſuum in L mobili firmiter inſiſtat.

Quodſi enim mediantibus ſcytalis M, N, O, P, cylindrus IL cum cochlea HI circumagitur; matrix EF deſcendit & vectem AB deprimit, conſequenter pondus G attollit.

Quod vero exigua admodum vi pondus admodum ingens attolli poſſit, patet ex theor. 121 (§. 560) & th. 103 (§. 481). Eſt nimirum potentia ad pondus in ratione compoſita AC ad CB ſi AB fuerit horizontalis & diſtantiæ duarum helicum in cochlea ad peripheriam ſcytala deſcriptam. Sit e. gr. diſtantia helicum 3‴, longitudo ſcytalæ 3′, erit peripheria, quæ eadem deſcribitur 942‴, adeoque potentia in N eſt ad reſiſtentiam in E ut 3 ad 942, hoc eſt, ut 1 ad 314. Sit jam AC : CB = 1 : 3; erit ergo reſiſtentia in E $\frac{1}{3}$ ponderis G, conſequenter potentia ad ſcytalam M applicata $\frac{1}{942}$ ponderis. Quodſi ſingulis ſcytalis ſingulæ potentiæ applicentur; erit una earundem $\frac{1}{3768}$ ponderis.

COROLLARIUM.

683. Si cochlea cum ergata removeatur funis ET alligetur in B, pondus G ſimiliter cum virium compendio attolletur, quamvis multo minore.

SCHOLION.

684. *Machina poſteriore utuntur ad onera ex navi una in alteram contiguam tranſponenda.*

PROBLEMA 88.

685. *Molam acuminariam conſtruere, hoc eſt, machinam, qua inſtru-*

ſtrumenta ferrea aut chalybea acuuntur.

RESOLUTIO.

Tab. X. Fig. 111. 1. Cotes aquariæ A & B axi CD curriculo F inſtructo infigantur ad acuendum.

2. Axi alteri EG infigantur duo orbes lignei H & I, ſuper quorum primo H arena politura inchoatur, ſuper altero vero I ſmyride continuatur. Addantur duo alii minores K & L corio ſuperinducti, ſuper quibus ſmyridis pulvere ſubtiliori politura perficitur.

3. Utrique axi DC & GE infigatur etiam rotula M in peripheria crena inſtructa, ut loro circa utriusque peripheriam circumducto una alteram movere poſſit.

4. Ad curriculum F circumagendum adhibeatur rota ſtellata N, quæ communem cum rota molari FQ, e. gr. retrograda, palmulas in fronte gerente, axem habet, ac pro diverſo aquæ impetu pluribus vel paucioribus dentibus inſtruitur, ut motus cotium ſit ſatis celer.

5. Denique cum cotes continuo madidæ eſſe debeant; ad rotam molarem applicanda ſunt duo hauſtra, quæ aquam in canalem ST effundunt per declive ex V & Z in rotas delabentem.

SCHOLION.

686. *Solent quoque molæ unice ad poliendum conſtrui, tumque orbes axi GE infixi aptantur ad primarium DC, ipſi vero GE alii minores inſeruntur.*

COROLLARIUM.

687. Si tam aquæ copia, quam declivitas ſufficiens fuerit; cotes axi rotæ molaris NY infigere licet.

PROBLEMA 100.

688. *Molam frumentariam ab aqua agitandam conſtruere.* Tab. X. Fig. 112.

RESOLUTIO.

1. Conſtruatur rota molaris ſive directa, ſive retrograda, prout caſus tulerit, nunc major, nunc minor, prout major vel minor aquæ copia & declivitas fuerit. Sit e. gr. rota retrograda AB 18 pedum eaque 33 palmulis inſtructa.

2. Ejusdem axi infigatur rota DE, cujus diameter illius ſubdupla, vel etiam major, pro diverſa aquarum moventium vi, & quæ dentes, in noſtro caſu numero 48, in plano gerat.

3. Per curriculum FI 6, 7, 8, immo 9 bacillis inſtruendum, pro diverſa celeritate, qua rota molaris movetur, virga tranſeat ferrea, cujus capiti pyramidem fere truncatam figura ſua referenti incumbat *meta* (ſeu lapis molaris ſuperior) *catinum* (ſeu lapidem

dem inferiorem) fixum 4 fere digitis circumcirca ſuperans atque in medio excavatus, ut frumentum inter lapides demitti & comminutum ad circumferentiam propelli poſſit.

4. Ex ſcala ſuſpendatur infundibulum *pq* mediante axe in peritrochio *st* pro arbitrio attollendum ac deprimendum. Inde

5. bacillus propendeat in foramen metæ annulo ferreo cum unco M munitum, quo illum propellens infundibulum agitet, ut frumentum in lapidem molarem demittatur.

6. Infundibulo fere inſiſtat capſa H pyramidem truncatam referens & tam ſuperius, quam inferius aperta, cui frumentum indatur.

7. Lapides cingantur ciſta cylindrica, ſpatio inter eam & metam nonniſi duorum digitorum relicto.

8. Arbor farinaria NO prope contactum metæ atque catini foramine pertundatur, ut per id frumentum contritum in ſacculum tremulum ex peculiari linteo (noſtrates Beuteltuch appellant) confectum devolvatur & farina furfure ſeparetur.

9. Sacci, cujus latera loris aſſuta, extremis vero P & Q annuli ferrei inſuti ſunt, longitudo in tres partes æquales dividatur & in fine partis tertiæ aſſuantur annuli coriacei *a* & *b*, qui infigantur bacillis ad cylindrum *cd* circa axem mobilem affixis.

10. Eidem cylindro *cd* affigatur forcipula *ef*, intra quam ope clavi lignei firmetur regula *hf* alteri *ik* cylindrulo *lm* circa axem ſuum verſatili infixæ in *i* incumbens.

11. Curriculo FI ſub angulo obliquo infigantur tres bacilli æqualiter a ſe invicem diſtantes, qui regulam *ki* impellentes alteram *hf* protrudunt & ſic ſaccum attollunt, mox iterum relapſurum, regula *ik* in ſitum priſtinum recidente.

12. Quodſi aquæ impetus tantus fuerit, ut molam duplicem circumagere posſit; axi rotæ molaris infigitur rota ſtellata LM, quæ duas rotas radiatas NO ab utroque latere adjacentes impellit: reliqua omnia ſunt ut ante. Ratio diametri rotæ LM ad diametrum rotæ molaris AB ſit ut 1 ad 2, ad diametrum vero radiatæ ut 3 ad 2: quamvis eidem ſtricte inhærendum non ſit, ſi aliæ circumſtantiæ aliam ſuadeant. Tab. XI. Fig. 113.

SCHOLION I.

689. *Rotarum dimenſiones dentiumque numeri variant pro varietate impetus aquæ in rotam molarem impingentis, quæ partim ab ejus ſectione, partim a declivitate, per quam ad*

ad illam delabitur, pendet. Conſtat vero ex ſuperioribus (§.508), *rotas fieri debere majores, ubi minor fuerit aquæ vis; minores vero, ubi hæc major.* Boecklerus (r) *diametrum rotæ vel ſolo impetu fluminis ſine declivitate in præcipitium mutata, vel ab exigua copia aquæ per declive delapſa agitandæ fieri præcipit* 48 *pedum, numerum palmularum* 86; *diametrum rotæ ſtellatæ* LM 18 *pedum, numerum dentium* 180, *numerum bacillorum in rota D E*
Tab. 60. Caſatus (s) *annotat, in Pado communi-*
X. *ter longitudinem rotæ molaris AB eſſe cubito-*
Fig. *rum* 10, *diametrum totam cubitorum* 6, *inte-*
112. *riorem rotam DE diametrum habere cubitorum* $5\frac{1}{2}$, *dentes* 108 *plano infixos & curriculum FI in fuſos* 9 *diſtingui; lapidem molarem in craſſitudine numerare uncias* 6 *aut* 7, *in diametro cubitos* $2\frac{1}{2}$. Franciſcus Philippus Florinus (t) *rotæ retrogradæ ab aqua rivuli* 4 *vel* 5 *pedum declivitatis agitandæ diametrum conſtituit* 18 *pedum, numerum palmularum* 30 *vel* 36, *latitudinem palmularum* 12 *vel* 14 *digitorum, altitudinem unius pedis. Rotæ dentatæ DE dentes aſſignat* 72, *curriculo bacillos* 6, 8 *vel* 9, *prout rota externa vel tardius, vel celerius movetur. In fluvio urbem noſtram alluente rotarum retrogradarum molam duplicem circumagentium altitudo non excedit* 16 *pedes.*

COROLLARIUM.

Tab. 690. Quodſi ſitus rotæ verticalis LM
XI. mutetur in horizontalem & dentes in
Fig. plano infigantur; rotæ vero molari
113. ſubſtituatur vectis veluti in ergata, reliquis omnibus manentibus ut ante; molendinum habebimus manuarium, a duobus hominibus in loco ſuperiore de ambulantibus commode agitandum. Eſt vero longitudo vectis ex una parte 8 pedum, ex altera totidem pedum, rotæ dentatæ LM diameter $8\frac{1}{2}$ pedum, alterius DE 10 pedum & 2 digitorum, numerus dentium in priore 72, in poſteriore 40, numerus bacillorum in curriculo 6.

SCHOLION 2.

691. *Multis adhuc modis aliis molæ manuariæ conſtrui poſſunt. Eminet vero inter eas quoddam genus, quod vi exigua moveri poteſt, ſuperinceſſu rotarum penitus ſublato. Id igitur ut deſcribatur, e re noſtra judicamus.*

PROBLEMA 101.

692. *Molam manuariam conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Conſtruantur duæ rotæ AB & CD, quarum diameter 5 vel 6 pedum, & inferius ad conſervandum impetum plumbo infuſo oneretur. T X Fi 1
2. Per centrum utriusque defigatur axis incurvatus HG per vectes IK & IL convertendus, ut ſupra docuimus (§.597).
3. In rotæ ſuperioris AB ambitu canaliculus excavatur, ut funis cera-

r) In der Hauß- und Feld-Schule part. 3. Claſſ. 6. p. 500 & 501.
s) Mechan. lib. 5. c. 7. p. 560.
t) Im klugen Hauß-Vater lib. 2. c. 42 f. 308 & ſeqq.

ceratus commode circumduci queat: qui idem.

4. Circumducendus circa peripheriam alterius rotulæ minoris MN infixi virgæ ferreæ PQ, cui eidem

5. infigatur crux ex brachiis ferreis conſtans RSTV, quibus ſingulis affixum eſt pondus plumbeum, ad impetum conſervandum.

6. Reliqua fiant, ut in problemate præcedente (§. 688).

SCHOLION.

693. *Axiculi rotarum ferrei ſuſtentaculo concavo orichalceo incumbere debent, quod & affrictum minuit, & ad durabilitatem conducit. In omni autem molarum genere ſuſtentaculum virgæ ferreæ, cui lapis molaris incumbit, ita conſtruendum, ut ad arbitrium attolli ac deprimi posſit, prout uſus poſtulaverit. Major enim lapidum diſtantia requiritur, ſi grana integra conterenda, quam ſi jam contrita in farinam convertenda.*

PROBLEMA 102.

Tab. VII. Fig. 32. 694. *Molam jumentariam conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Erigatur cylindrus verticalis DN cujus diameter 14 digitorum cum temone GH quatuor virgis ferreis ad rotam firmando. Immo temo geminari poteſt.

2. Circa eundem cylindrum conſtruatur rota ſtellata IK, cujus diameter $14\frac{1}{2}$ pedum, 16 lignis transverſis (quale IL) quorum latitudo 7, crasſities 2 digitorum, connectenda, & adhuc aliis 16 (quale IO) quorum longitudo 7 pedum, latitudo 4 & craſſities $8\frac{1}{2}$ digitorum firmanda.

3. Dentes ex ligno quercino probe ſicco parati ita infigendi, ut axes eorundem diſtent $4\frac{1}{2}$ digitis.

4. Curriculi P diameter 22 digitorum & numerus fuſorum ſeu bacillorum 11, quorum longitudo 18, diameter duorum digitorum.

5. Reliqua fiant ut in probl. 100 (§. 688).

Aliter.

Quodſi rota adeo ingens non commoda viſa fuerit, conſtruere licet minorem, cujus diameter nonniſi 7 pedum, $1\frac{1}{3}$ digitorum, dentes 64 in plano gerentem. Hæc rota ut ſuperius (§. 688) circumagit aliam rotam radiatam NO, cujus diameter $21\frac{1}{3}$ digitorum, numerus babillorum 16. Cum eodem eidem axi infigitur rota DE, cujus diameter 6 pedum, dentes 72 in plano gerens & curriculum FE 6 fuſis inſtructum circumagens. In rota priore crasſities dentis 2, in poſteriore $1\frac{1}{2}$ digitorum. Longitudo temonis 5 pedum. Tab. XI. Fig. 113.

PROBLEMA 103.

695. *Molam alatam conſtruere.*

RESOLVTIO.

Structuram externam docuimus ſupra (§. 642). Interna conſtat ex rota dentes in plano habente atque curriculo, ut in molis frumentariis, quæ ab aqua moventur (§. 688). Numerus dentium in rota dentata eſt 72, vel 80: numerus fuſorum in curriculo 9 vel 8. Quælibet ala eſt, pedum 30 vel 32.

PROBLEMA 104.

696. *Molam oleariam conſtruere.*

RESOLUTIO.

Mola olearia ita conſtruenda, ut tum materiam contundere, tum ex contuſis atque toſtis oleum exprimere valeat. Utrumque igitur ut præſtetur,

Tab. XI. Fig. 115.

1. Axi rotæ molaris infigatur rota ſtellata AB, quæ circumagat
2. rotam radiatam A E axi EF inſertam, cui hinc inde pinnulæ G infiguntur piſtilla HI attollentes.
3. Piſtillorum baſes itemque fundi vaſorum K in trunco L M excavatorum lamina ferrea obducantur, ut ſemina lini, rapicia, amygdala vel nuces, vel quæcunque detur materia, probe contundantur, piſtillis proprio pondere relabentibus.
4. In parallelepipedo LM excaventur duo minora, quorum baſis inferior ſit perforata, ut oleum expreſſum inde in vaſa ſubjecta deſtillare poſſit. Intra ea reponitur materia contuſa & in aheno ſuper igne toſta, panno ex pilis contexto involuta atque inter duas tabulas P & Q, in quarum una hemiſphærium cavum, in altera convexum, comprehenſa. A parte poſtica intruditur cuneus acie ſua prominens in H & ab antica infigitur alius N.
5. Ut cuneus alter N vi adigi ſicque oleum exprimi poſſit, malleus P cum vecte PQ cylindro RL circa axem ſuum mobili affigatur, mediante ligno transverſo TV ad cuneum dirigendus.
6. Ad eundem cylindrum RS in oppoſito latere aptetur forceps *ab*, intra quem continetur contus *bd* cum pinnula *ef*, quæ a pinnula cylindro EF infixa deprimitur & malleum PM attollit proprio pondere cum impetu in cuneum M mox relabentem.

COROLLARIUM I.

697. Quoniam rota radiata A E cum ſtellata AB ideo adhibentur, ut cylindrus EF celerius circumagatur; ſi aquæ ſufficiens copia atque declivitas,

tas, vel numerus piſtillorum exiguus fuerit; ipſi cylindro EF rota molaris ab aqua agitanda infigi poteſt. Et tales ſunt molæ metallicæ, quæ malleis ferreis 57 librarum piſtillis 12 pedum affixis materiam metallicam crudam comminuunt.

COROLLARIUM 2.

698. Si vis aquæ ſufficiens adfuerit, duo cylindri pinnulis ſuis piſtilla elevantes a rota ſtellata circumagi ſolent.

COROLLARIUM 3.

699. Et quia perinde eſt, quæcunque materia contundatur; eadem manet ſtructura, ſi mola conſtruatur, ad materiam pulveris pyrii contundendam. Sint e. gr. piſtilla 16 in duas ſeries diſtributa: rotæ molaris ab aqua convertendæ altitudo erit 18 pedum, numerus palmularum, quarum latitudo 2 pedum, altitudo unius, 48; diameter rotæ AB 7′3″, numerus dentium 60; longitudo cylindri EF 15′ 10″, diameter 14″; diameter rotæ radiatæ 3′ 2″, numerus fuſorum 24; integra piſtilli altitudo 9′ 2″, craſſities & latitudo 4″. Sed ſi rota externa calcando movetur (§. 598), diameter ejus eſſe poteſt 16 pedum, rotæ ſtellatæ AB $5\frac{1}{2}'$, numerus dentium 60, numerus fuſorum in rota radiata 20; longitudo cylindri EF 16 pedum, numerus piſtillorum 9.

SCHOLION 1.

700. *Structura molarum chartariarum eadem eſt, quam in corollario primo (§. 697) expoſuimus, niſi quod tudiculæ AB ferro obductæ in B vecti homodromo DC circa baculum EF mobilem ad angulos rectos infigantur, a pinnulis axi rotæ molaris infixis in C impellendo, & per canalem vel ope antliæ, vel ope hauſtrorum ad rotam molarem applicatorum aqua continuo in linamenta contundenda deduci debeat.* Tab. XI. Fig. 116.

SCHOLION 2.

701. *Cum ſtructura molæ oleariæ prorſus convenit ſtructura trituratoriæ, quæ anno 1700 Erzæ in ditione Electorali Brunſvvicenſi inventa & cum inſigni fructu ad frumenta ſtraminibus ejicienda adhibetur, niſi quod peculiari artificio opus ſit ad flagella dextre applicanda & rota verticularis addatur. Deſcribitur in Miſcellaneis Berolinenſibus* (u).

PROBLEMA 105.

702. *Machinam conſtruere, quæ materiam pulveris pyrii ſine piſtillis conterat.*

RESOLUTIO.

1. Rota dentata AB communem axem cum aquaria habens impellat radiatam CD, ad cujus axem. Tab. XI. Fig. 117.
2. Aptentur duo cylindri plumbei lamina orichalcea obducti aut (quod melius judicatur) marmorei: quorum diameter 6, 7 vel 8 pedum, craſſities 6 digitorum.
3. Cylindri, axe HI circumacto, vel in vaſe cylindrico orichalceo, ſi plumbei fuerint; vel ſuper

(u) p. 325.

per ſaxo marmoreo ad profunditatem duorum digitorum excavato, ſi marmorei fuerint, incedant.

SCHOLION 1.

703. *Ideo ex orichalco aut potius e marmore machina conſtruitur, quia ex hac materia per frictionem nullæ ſcintillulæ eliciuntur, unde non ſine ingenti damno in aliis molendinis materia pulveris pyrii ignem concipere ſolet.*

SCHOLION 2.

704. *Cæterum cylindris verticaliter erectis utuntur etiam ad materias alias conterendas.*

PROBLEMA 106.

705. *Molam ſerrariam conſtruere.*

RESOLUTIO.

Tab. XII. Fig. 118. In molis ſerrariis duplex motus conſiderandus, quorum altero ſerra reciprocatur, altero vero lignum ad ſerram continuo promovetur. Ad motum ſerrarum producendum

1. Axi rotæ aquariæ, cujus diameter 17 vel 18 pedum, infigatur rota ſtellata A B, cujus diameter ſine dentibus 8 pedum, numerus dentium 72. Hæc
2. Incedat ſuper rota radiata C D 12 vel 8 (pro diverſa vi aquarum) bacillis inſtructa & communem axem habente cum rota verticulari EF, cujus diameter 4 vel 5 pedum.
3. Alteri hujus axis extremo infigatur axis ferreus curvatus G, eique mediante bacillo GH jungatur tendicula lignea IK cum ſerra HL, intra duas pilas ita conſtricta, ut nonniſi ſurſum protrudi ac deorſum trahi poſſit.
4. Ad motum ligni efficiendum conſtruendus eſt currus *a b c d*, cujus longitudo longitudini ligni ſecandi proportionata, e. gr. 18 pedibus major, latus vero alterum dentibus inſtructum.
5. Ut ergo lignum uncis ferreis ad currum firmatum ad ſerram continuo promoveatur, axi *gh* infigatur baculus *ik*, cujus alterum extremum *k* inditum eſt annulo ad tendiculam IL firmato: & prope alterum extremum forceps *m* contineat furcam *ml* usque ad dentes rotæ ſerratæ *ln* extenſam, cujus diameter duorum pedum.
6. Porro axi rotæ ſerratæ ferreæ infigenda eſt alia radiata *pq* 6 bacillis inſtructa, qua circumagitur rota ſtellata *rſ* dentes 36 & axem communem cum alia radiata *tv* habens, quæ 6 bacillis inſtructa currum propellit.

SCHOLION.

706. *Dantur & adhuc alii modi currum propel.*

propellendi, quos repræſentat Bœcklerus (x). *Nos eum deſcripſimus, quo ordinarie utuntur. Ceterum idem* Bœcklerus (y) *molam ſerrariam manuariam accurate delineat.*

PROBLEMA 107.

h. 707. *Horologium oſcillatorium*
I. *Hugenianum conſtruere.*
g.
9. *RESOLUTIO.*

1. Fiant laminæ AA & BB ſemipedali longitudine, pollices duos & ſemis latæ, quibus rotarum præcipuarum axes inſerantur.
2. Rota infima CC 80 dentib9 incidatur in convexo & eidem axi affigatur orbiculus aculeatus DD, ex quo pondera ſuſpendantur.
3. Rota CC impellat tympanum E dentium octo & una rotam ſtellatam F dentium 48.
4. Rota F circumagat tympanum G dentium 8 & una rotam coronariam H dentes 48 in plano habentem.
5. Hæc agitet tympanum I dentium 24 & rotam ſerratam K dentium 15.
6. Supra eam collocetur axis pinnatus LL eique affigatur clavula S, ima ſui parte reflexa ac foramine oblongo penduli intra duas laminas cycloidicas duplici filo ſuſpenſi virgam ferream cum appenſo pondere plumbeo X complexa.
7. A lamina AA quarta digiti parte diſtet alia YY, in qua deſcribantur circuli horarii ex centro axis rotæ infimæ CC. Interior in 12 horas, exterior in 60 ſcrupula prima dividatur.
8. Axi rotæ C aptetur rota *bb* tubulo ultra laminam YY continuato cohærens, ita ut una cum axe circumagatur, ſine eodem tamen converti poſſit, ubi e re fuerit.
9. In tubuli prædicti extremo *e* applicetur index horæ ſpatio circuitum abſoluturus atque ita minuta horaria indicaturus.
10. Rota *bb* impellat aliam *gg* 30 itidem dentium, cujus axi cohæreat tympanum ſex dentium *d*; quod tandem
11. Convertat rotam *gg* dentium 72 indicem horarium minutario breviorem circumferentem.
12. Axi rotæ H affigatur orbis *ll* & in eo circulus in 60 partes æquales diviſus deſcribatur, qui per inciſum in lamina YY foramen minuta ſecunda monſtret.
13. Longitudinem penduli, ut jam ſupra notatum eſt, *Hugenius* (z) inventor experimentis factis deprehendit eſſe partium trium, qua-

x) in theatro Machinarum f. 60 & ſeqq.
y) in der Haus und Feld-Schule Tom. I. claſ. 6. p. 512 & 513.
z) in horologio oſcillatorio f. 7.

quarum una eſt ad pedem Pariſinum ut 864 ad 881 (§. 324).

14. Pondus perpendiculi X trilibre eſſe debet & ne occurſu aëris motus impediatur, optima ejus forma eſt lenticularis. Ponderis *b*, quo horologium movetur, magnitudo certo definiri nequit, ſed per experientiam determinanda. *Hugenius* pondere 6 librarum uſus eſt, diametro orbiculi D unius digiti exiſtente, longitudine autem penduli ea, quam diximus.

15. Cæterum ne motus horologii interrumpatur, dum pondus ſurſum trahitur; peculiari hoc artificio ſuſpendendum, quod a laudato *Hugenio* repertum. Funis ſcilicet in ſe rediens orbiculum D amplectatur & inde deſcendens altera ſui parte trochleam *c* ſubeat, cui pondus *b* appenſum. Hinc ſuper orbiculum D extrinſecus horologio affixum aſcendit iterumque ad trochleam alteram F deſcendit, cui pondus G appenſum majus *b* retinens, ne aliter quam orbiculo D revoluto deſcendat. Hic autem ſerratis dentibus ita aptatur, ut tracto fune E volvatur, in partem vero contrariam revolvi nequeat.

Tab. XII. Fig. 120.

SCHOLION 1.

708. *Horologia hæc oſcillatoria Hugeniana adeo accurate conſtrui poſſunt, ut tempus æquale accuratius dimetiantur quam motus ſolis diurnus inæqualis, ceu in chronologicis oſtendetur. Unde in Aſtronomia, ubi accurata temporis menſura requiritur, ingens ejus eſt uſus. Sane Vir* Cl. Philippus de la Hire (a) *teſtatur, ſe ſæpius expertum eſſe, quod intra octiduum a medio ſolis motu vel minuto ſecundo non aberrent.*

SCHOLION 2.

709. *Cum pleræque machinæ ex ligno conſtrui ſoleant, non incongruum videtur epilogi loco rotarum dentatarum lignearum conſtructionem edocere.*

PROBLEMA 108.

710. *Rotas dentatas & radiatas ligneas conſtruere.*

Tab. XII. Fig. 120. n. 1. 2. 3.

RESOLUTIO.

1. Orbes rotarum, quibus dentes infiguntur, ex diverſis partibus componuntur. Si dentes in plano infiguntur, aliæ partes ſunt ſegmenta circuli A, aliæ ſegmenta annulorum circularium B. Poſteriores ita ſuperimponuntur prioribus, ut juncturæ D partium A medio partium B & contra juncturæ C partium B medio partium A reſpondeant. Foraminibus perforatæ clavis ligneis junguntur. Quot vero partes in uno plano habu-

(a) in epiſtola dedicatoria Tabulis Aſtronomicis præmiſſa.

habuerit orbis, tot lignis transverſis FF firmantur. Quodſi dentes in convexo infigendi; partes in utroque plano ſunt ſegmenta annularia B.

2. Peripheria circuli, in qua centra dentium infigendorum exiſtunt, in tot partes æquales diviſa, quot dentes rota habere debet, intervallum unum dividitur in 16 partes æquales, quarum 7 tribuuntur denti, 9 vero interſtitio inter binos relinquuntur. Vel idem dividitur in in 7 partes æquales, quarum 3 ſpiſſitudini dentis IK, $3\frac{2}{3}$ ſpiſſitudini ſeu diametero bacilli tribuuntur.

3. Idem intervallum dividitur in 3 partes æquales & 2 tribuuntur altitudini dentis HG. Sunt & qui HG fere $\frac{3}{4}$ faciunt. Tab. XII. Fig. 121.

4. Foramina, quibus dentes infiguntur, eſſe debent quadrata & axiculi ferrei in centris rotarum exacte conſtituendi, eo meliores, quo minores, quia minorum minor eſt frictio, eadem de cauſa imponendi concavo orichalceo aut ſaltem ligneo, nequaquam ferreo.

5. Rotæ radiatæ duplicem plerumque habent orbem, niſi bacilli exiguæ fuerint longitudinis, & ſi numerus bacillorum exiguus & reſiſtentia ingens, cylindro ligneo inciduntur: id quod in molis ferrariis fieri conſuevit.

FINIS Mechanicæ.

Errata ſic corrigenda.

Pag.	Lin.	Errata	Corrigenda
553	24	EF	CF
564	11	GK	FK
	12	a diſtantia centri	a centro
569	23	deſcendit	deſcendente deſcribuntur
573	15	$\frac{1}{3}$ unius lineæ	3 linearum
584	5	CD	EB
601	11	poſt vocem *ſumtas* adde	& quadratum numeri oſcillationum dati, qui erit
609	27	ARB	RAB
640	3	tempora	temporum quadrata
661	1	H	A
667	4	tangentem	cotangentem.

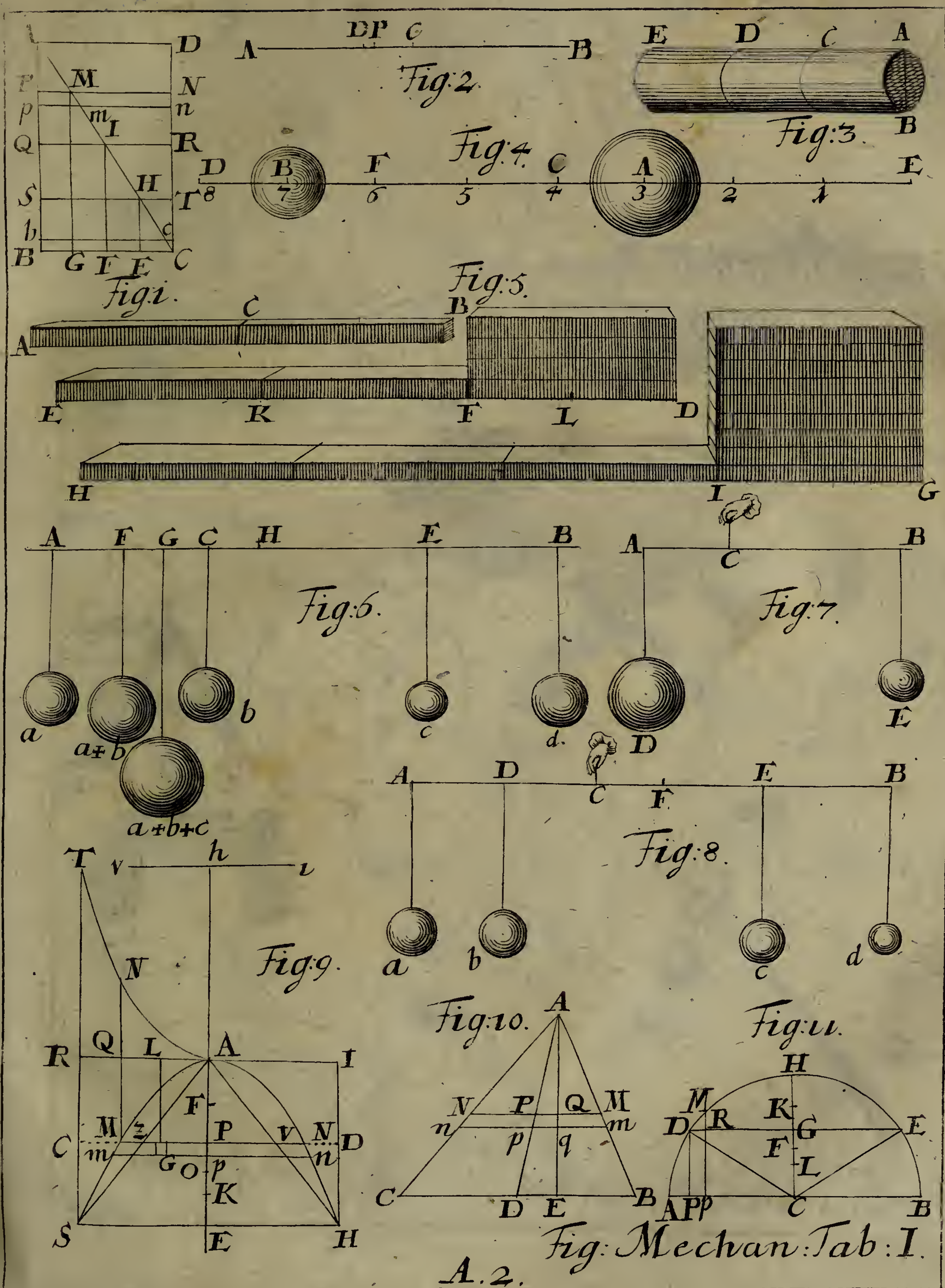


Fig: Mechan: Tab: I.

A. 2.

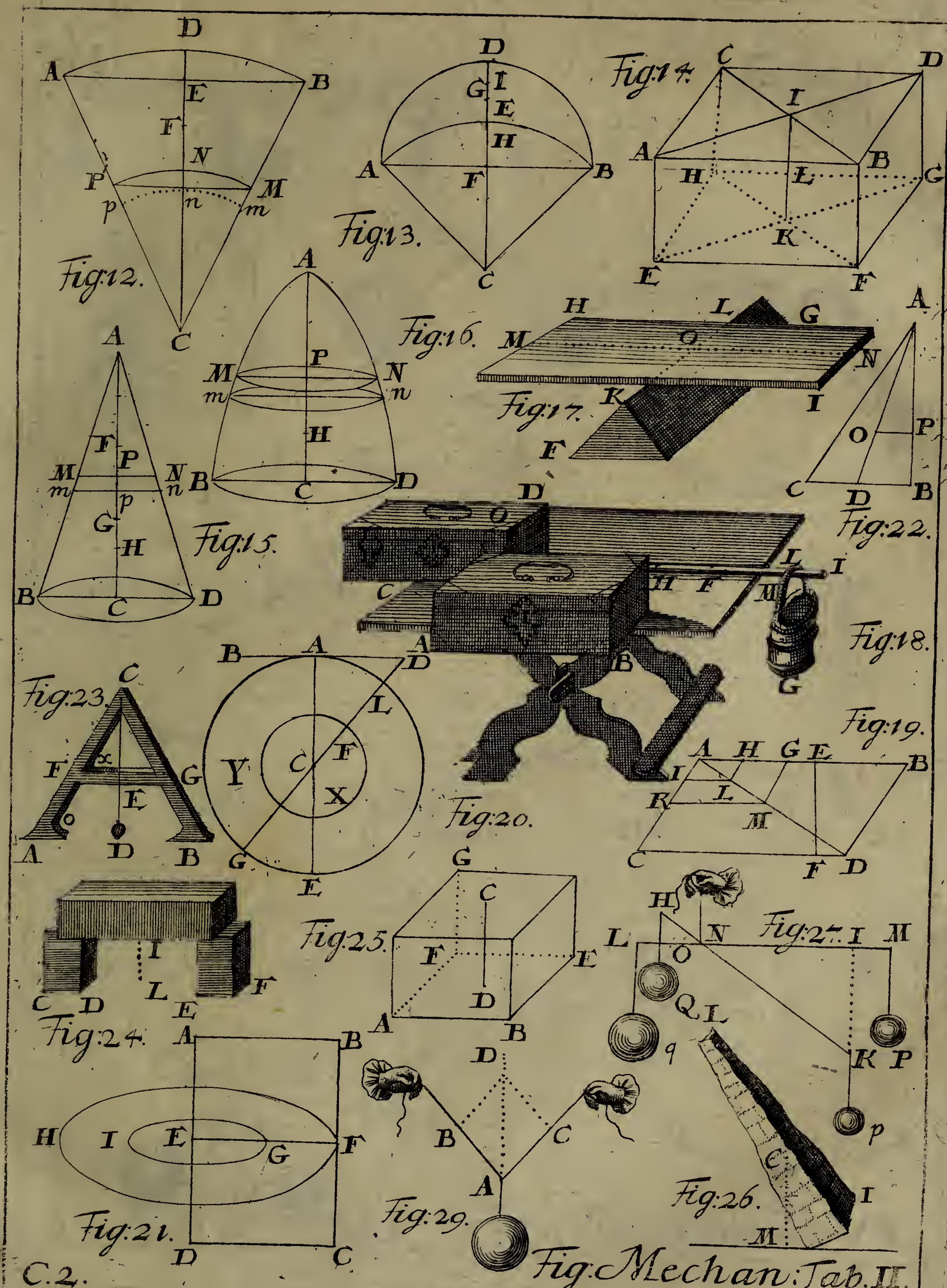
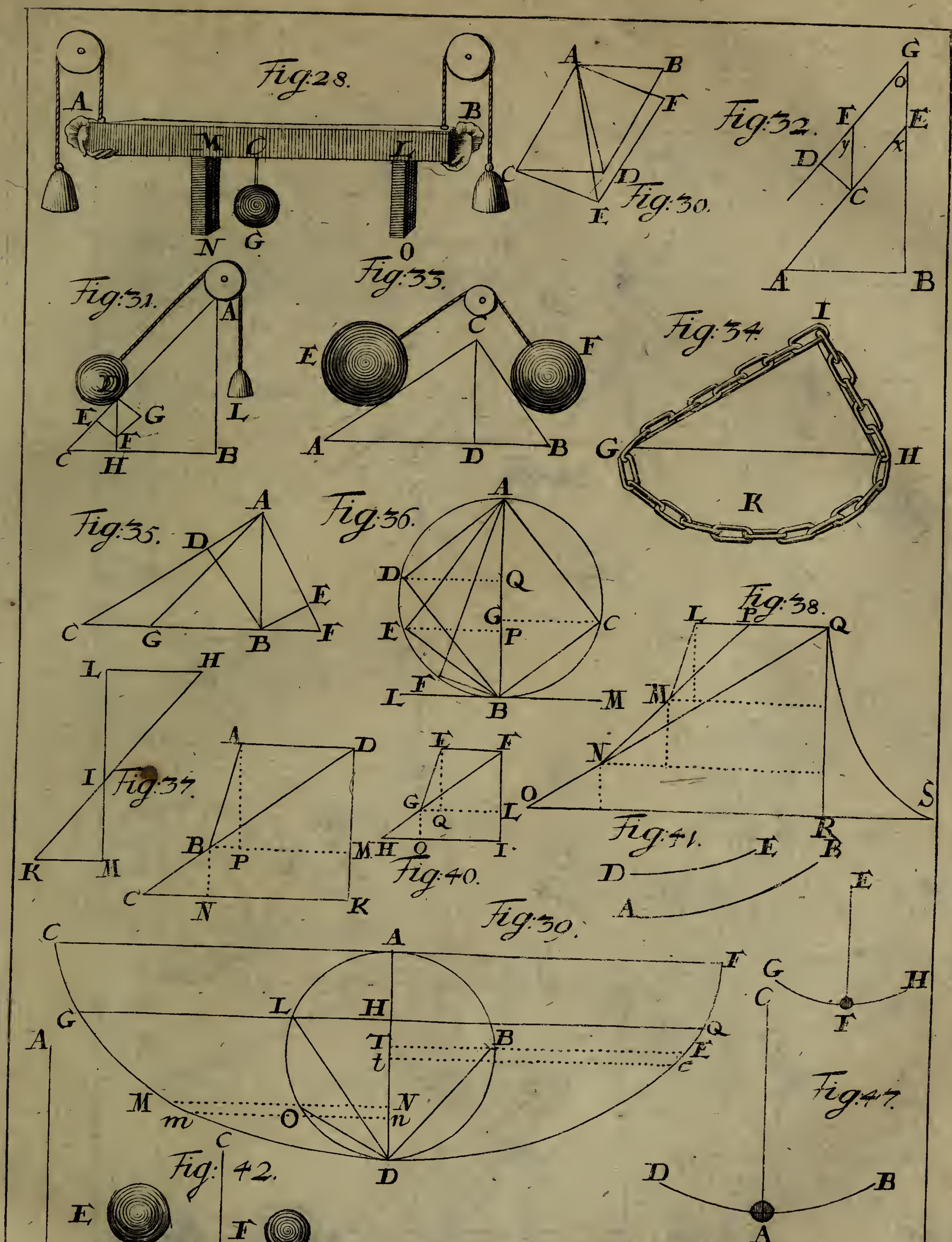
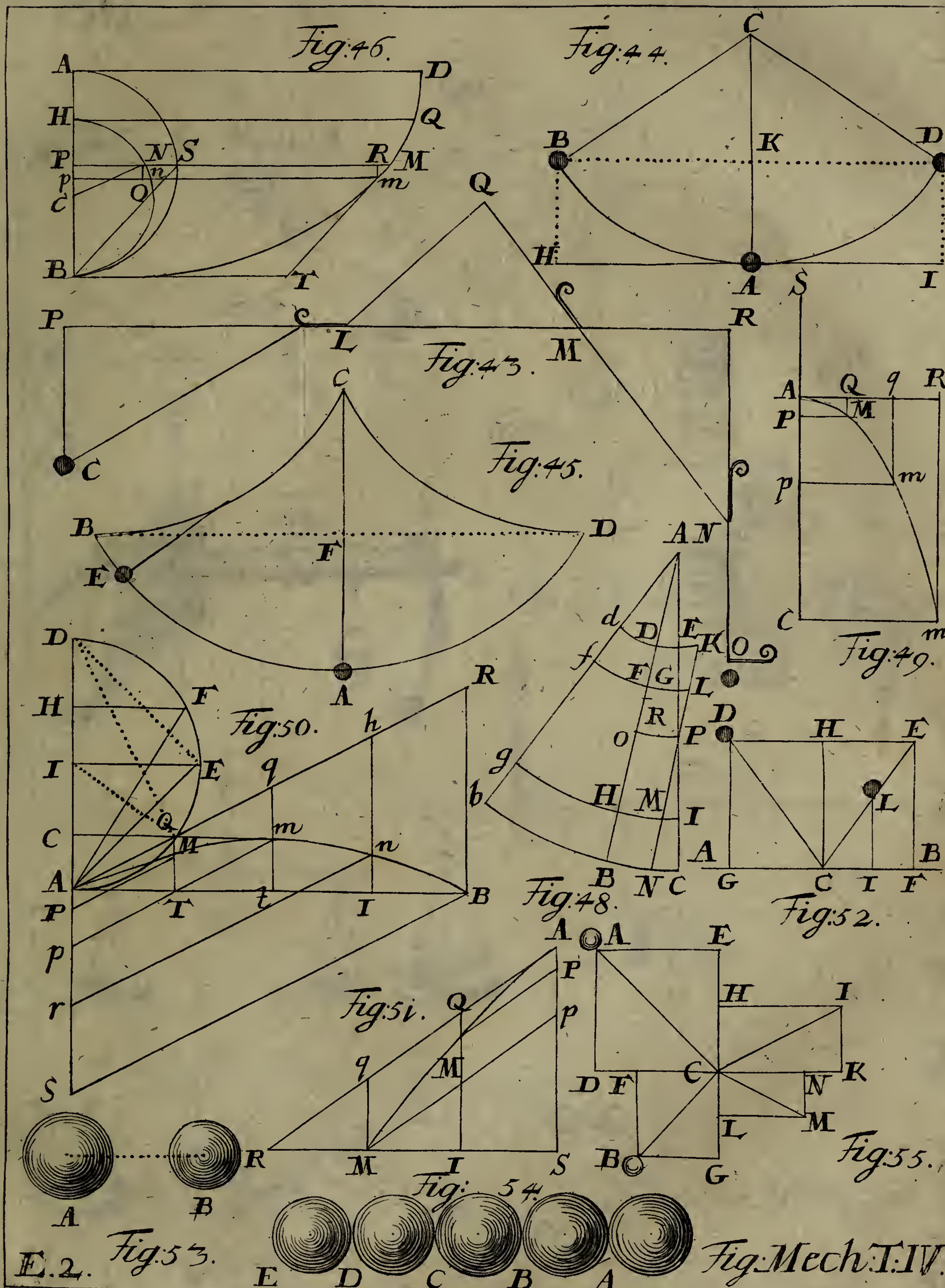


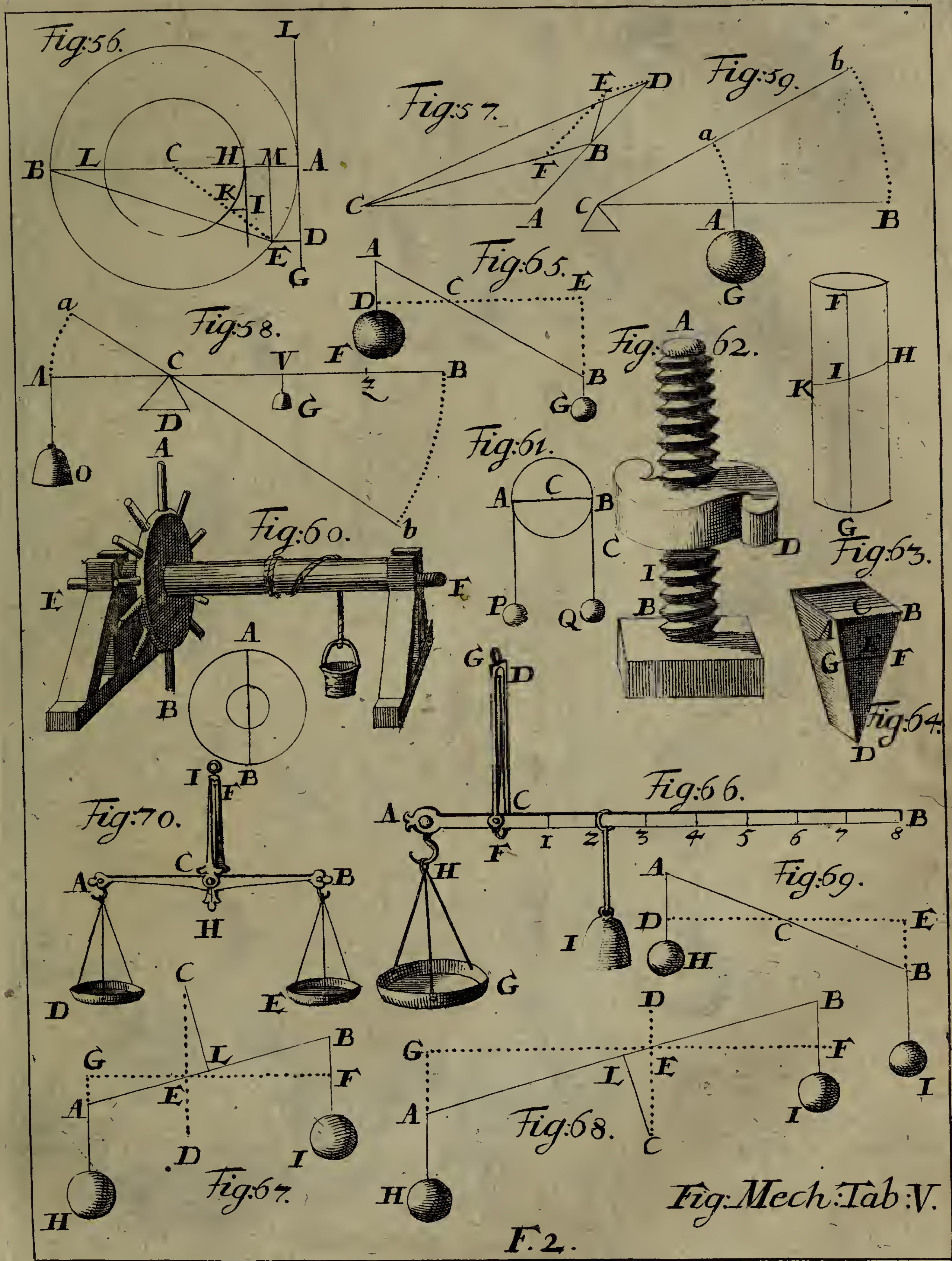
Fig: Mechan: Tab. II.

C.2.



D.2. Fig: Mechan: Tab: III.


Fig:46.
Fig:44.
Fig:43.
Fig:45.
Fig:49.
Fig:50.
Fig:48.
Fig:52.
Fig:51.
Fig:55.
Fig:53.
Fig: 54.
E.2.
Fig:Mech:T:IV.


Fig:56.
Fig:57.
Fig:58.
Fig:59.
Fig:60.
Fig:61.
Fig:62.
Fig:63.
Fig:64.
Fig:65.
Fig:66.
Fig:67.
Fig:68.
Fig:69.
Fig:70.
Fig: Mech: Tab: V.
F. 2.

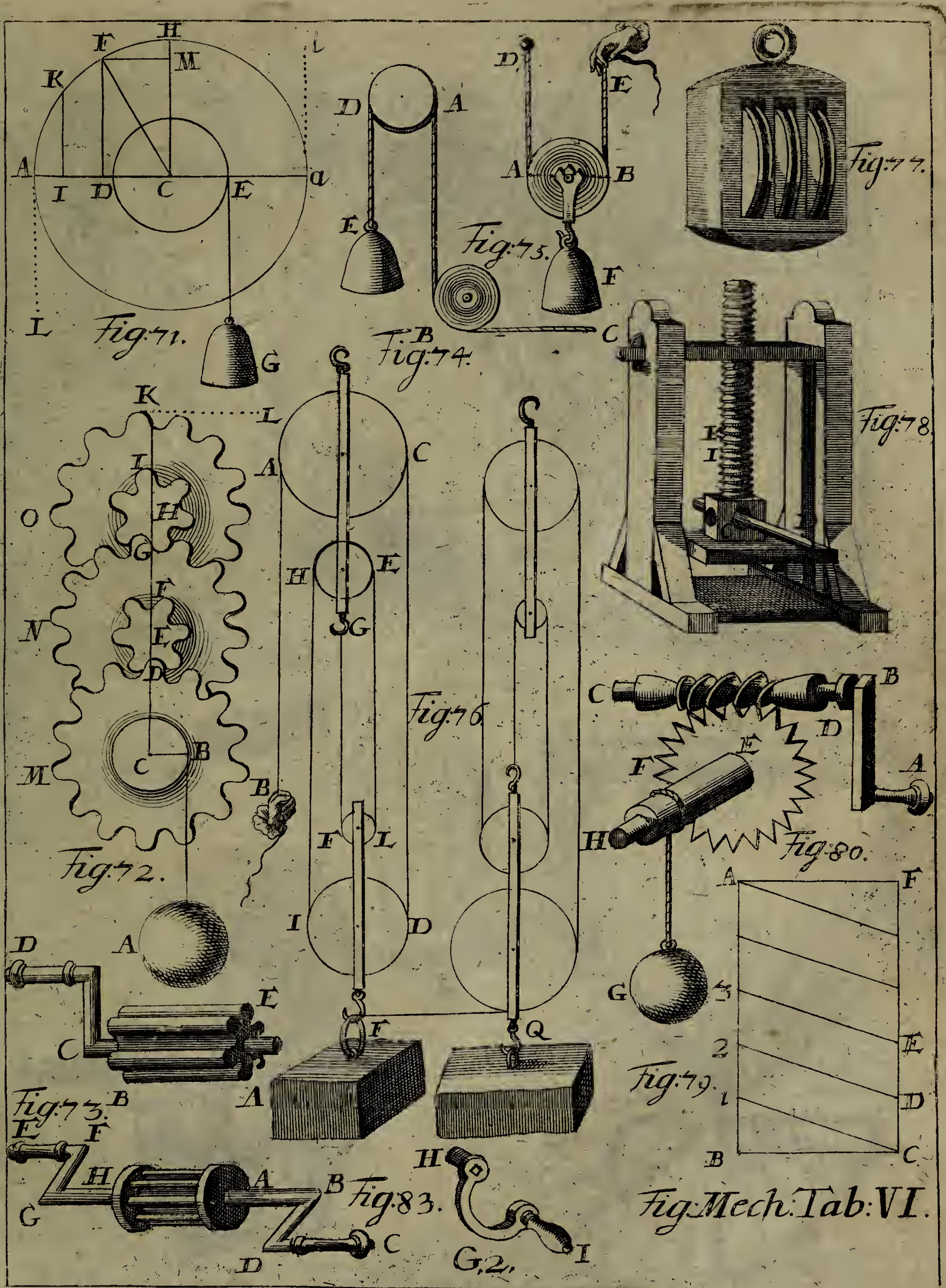
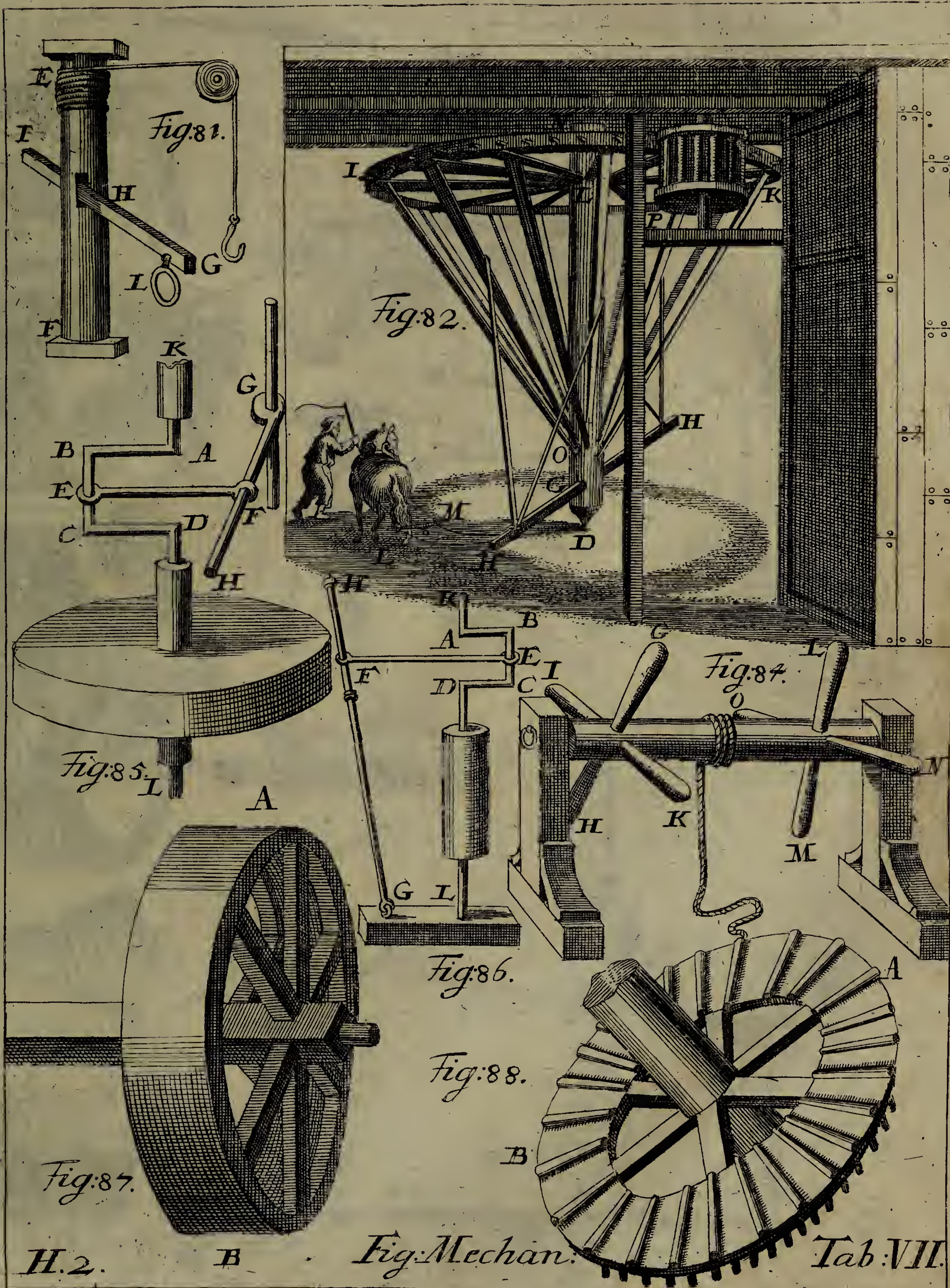
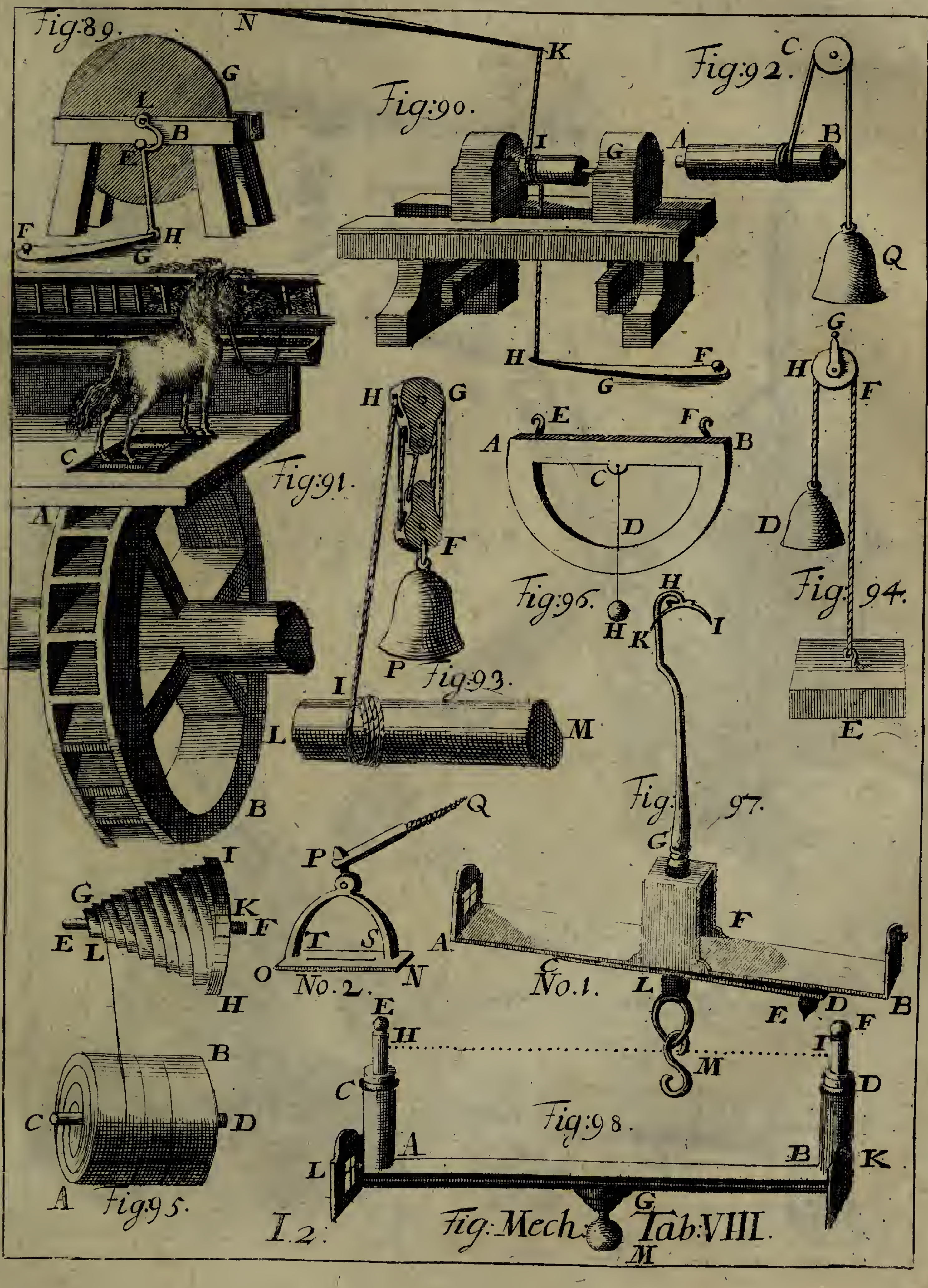
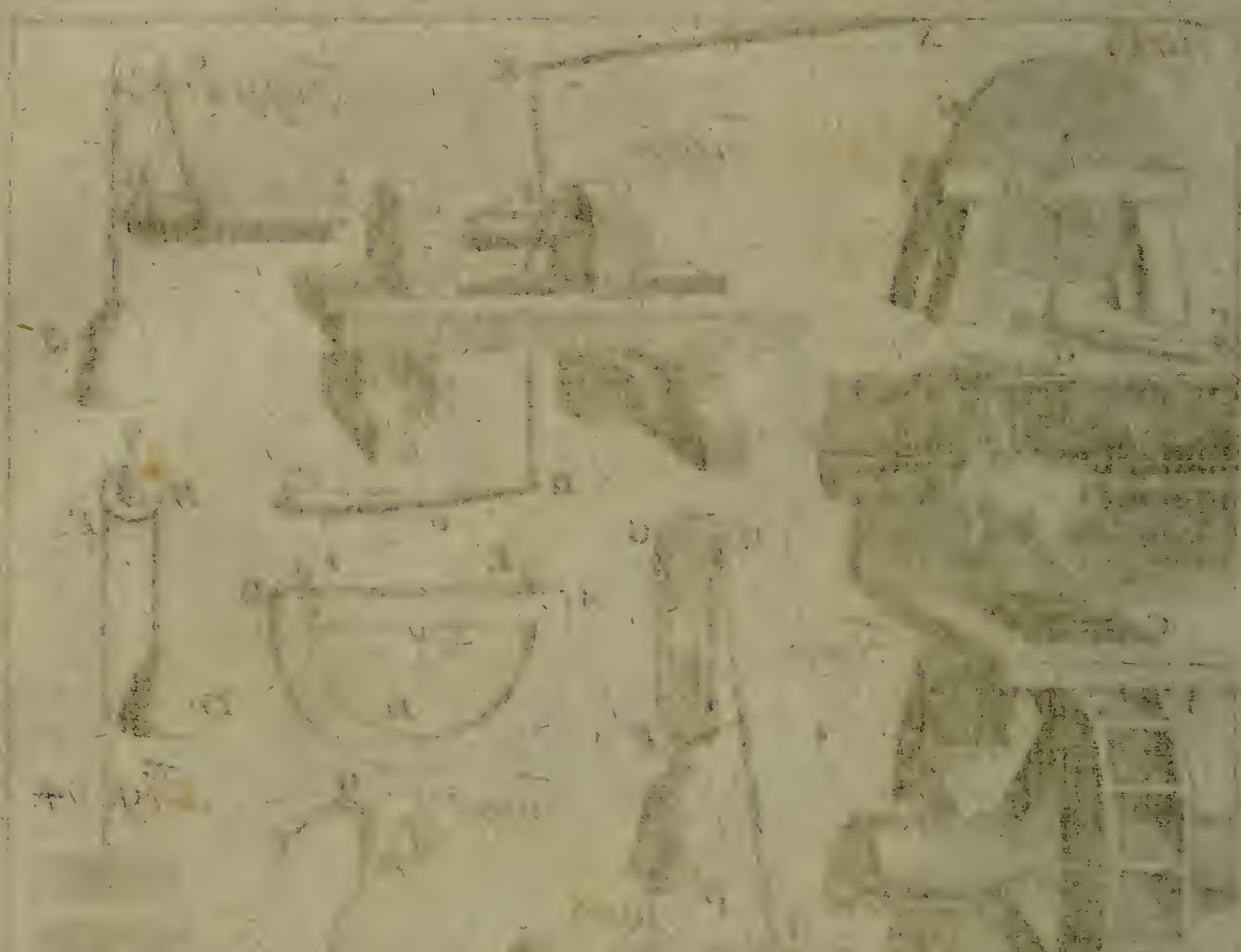


Fig:Mech:Tab:VI.


Fig:81.
Fig:82.
Fig:84.
Fig:85
Fig:86.
Fig:87.
Fig:88.
H.2.
Fig: Mechan:
Tab: VII.



I.2. Fig: Mech: Tab: VIII



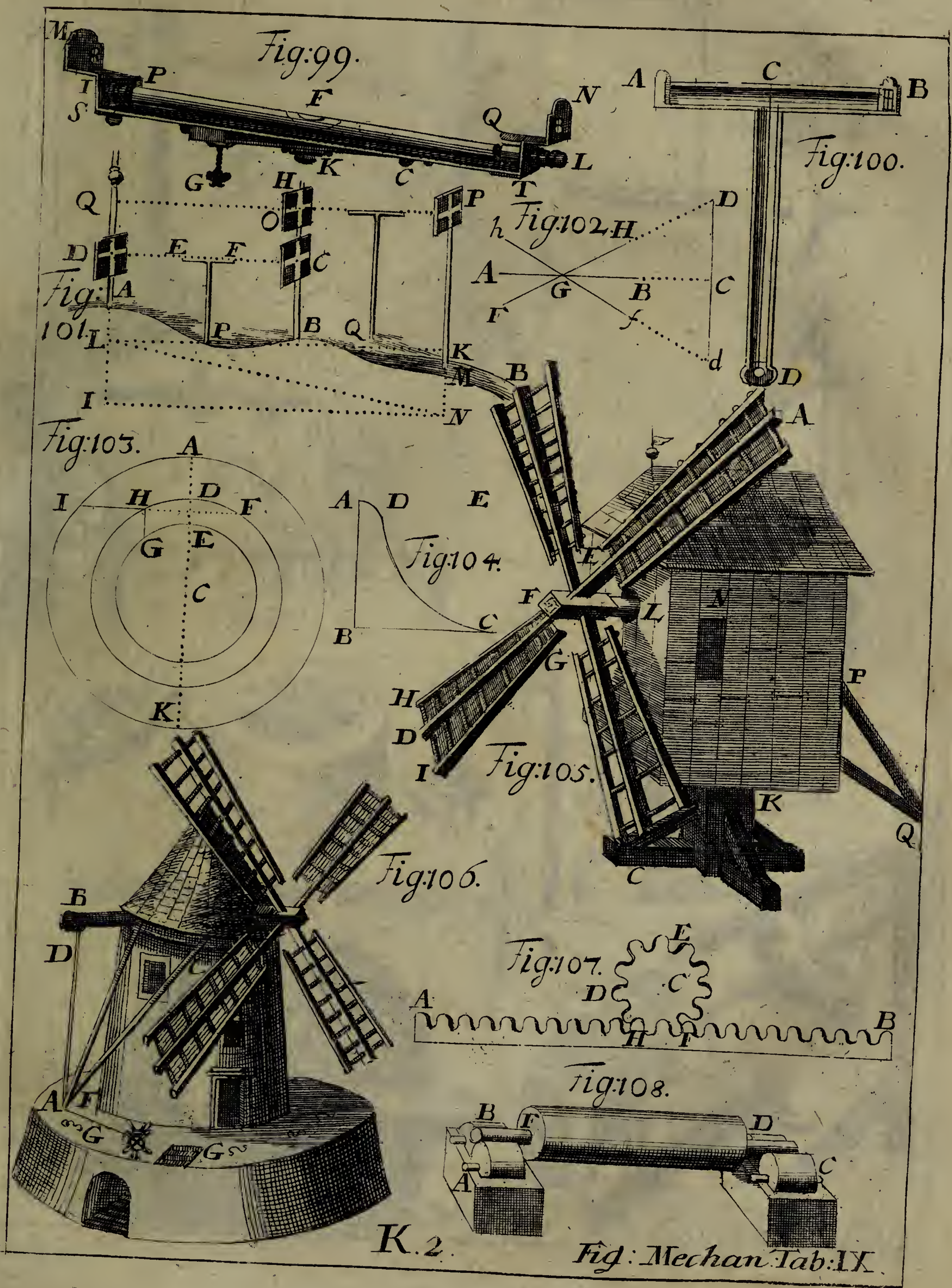


Fig: Mechan: Tab: IX.

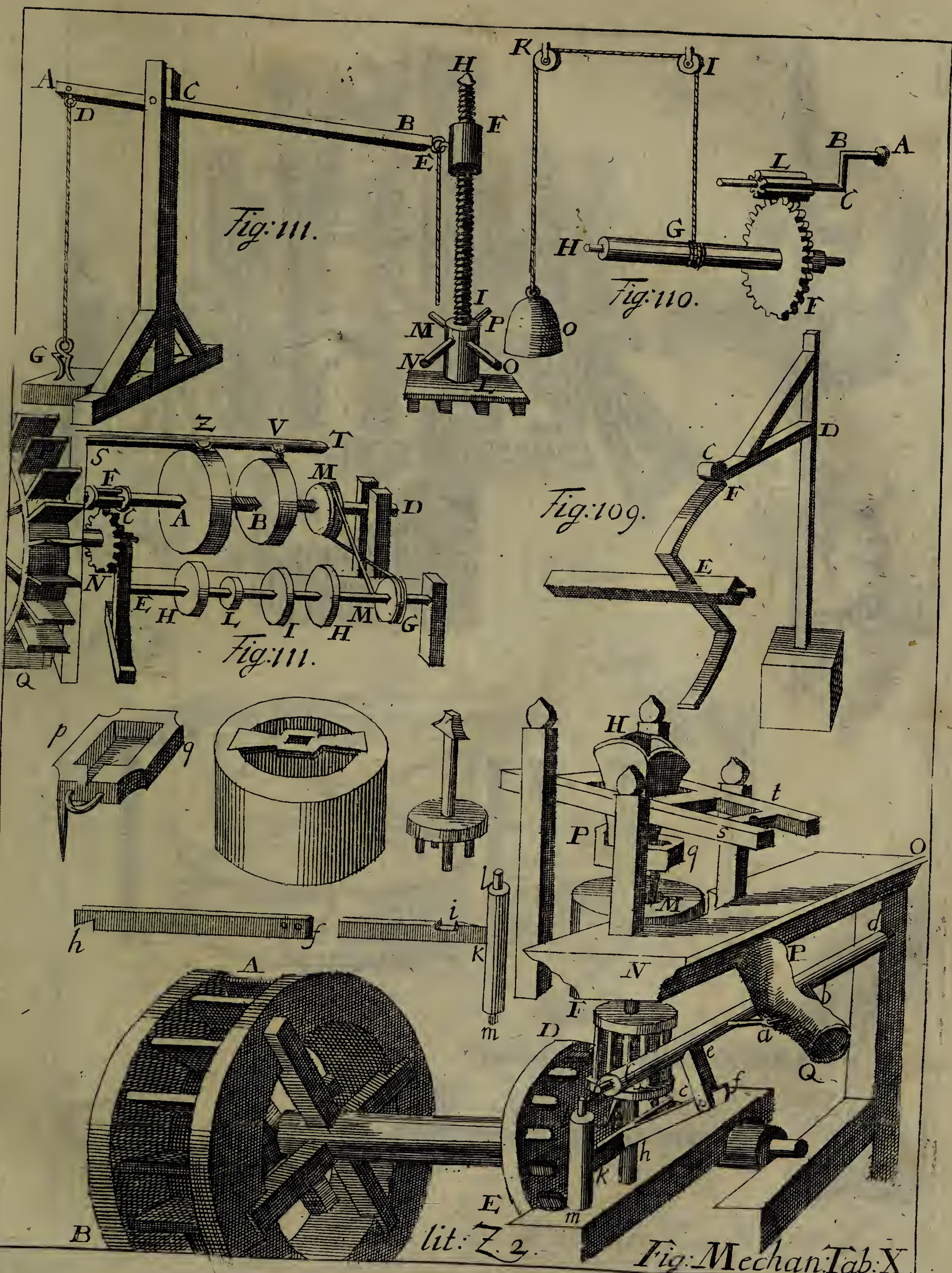
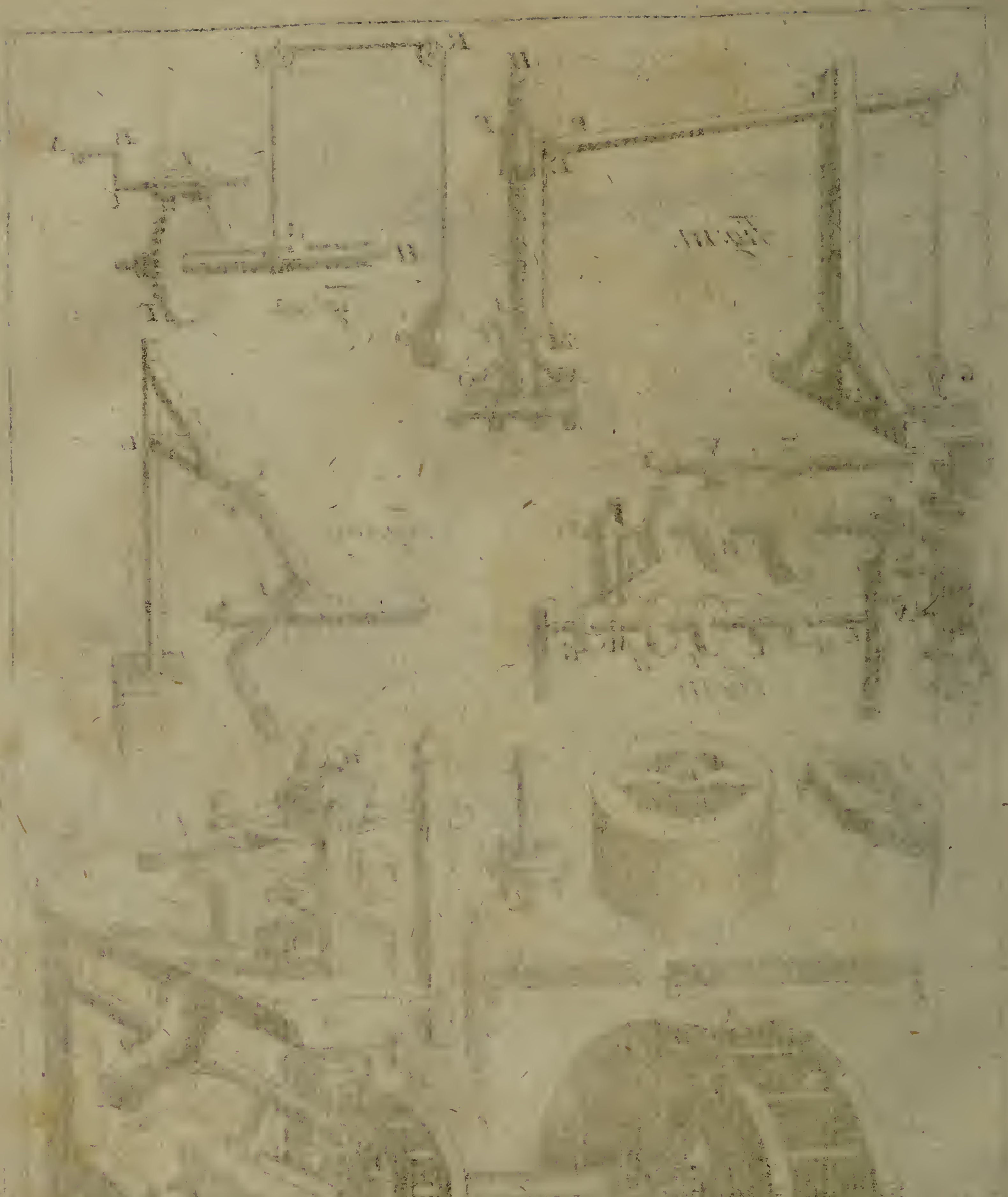


Fig: Mechan: Tab: X.



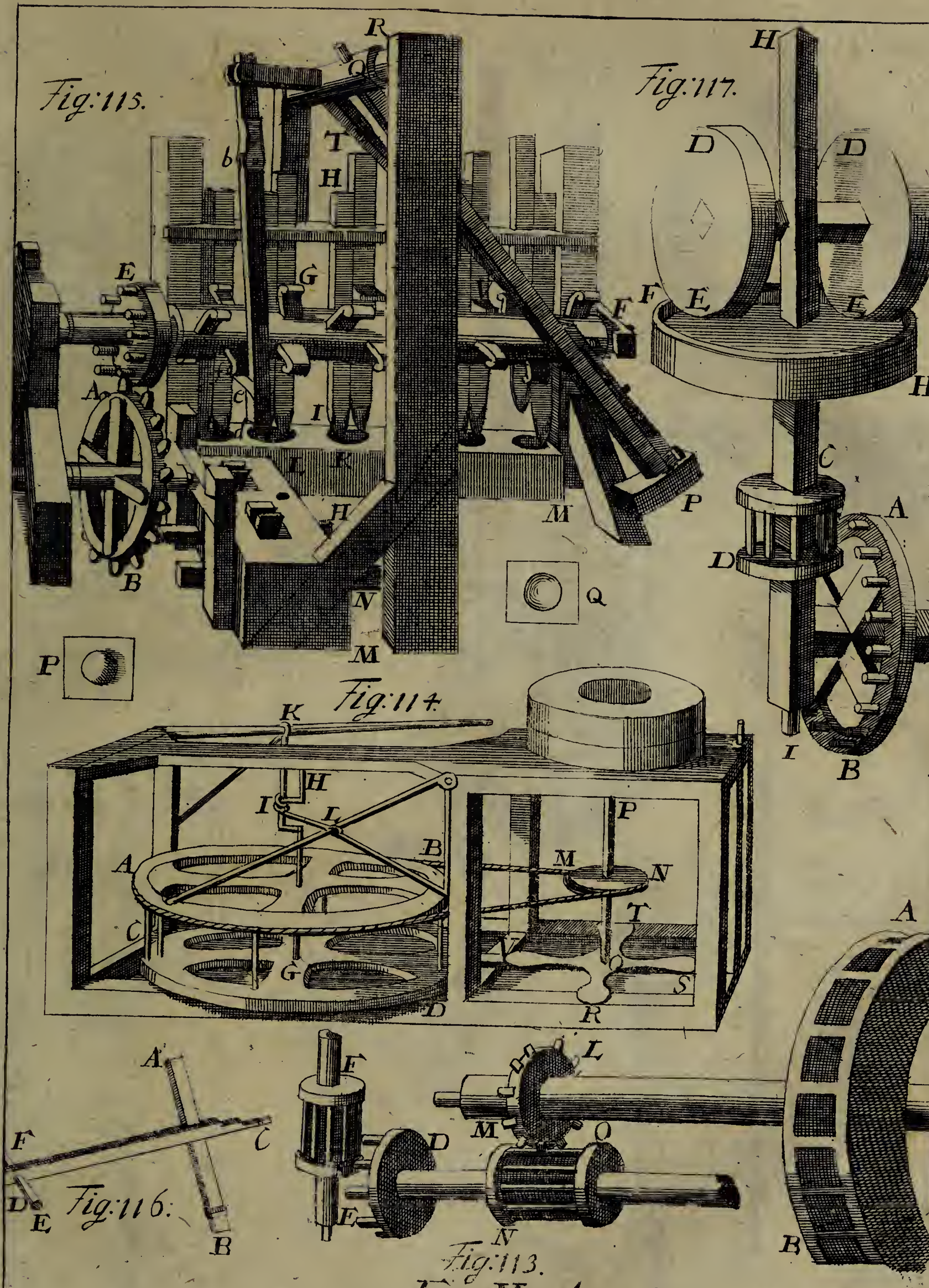
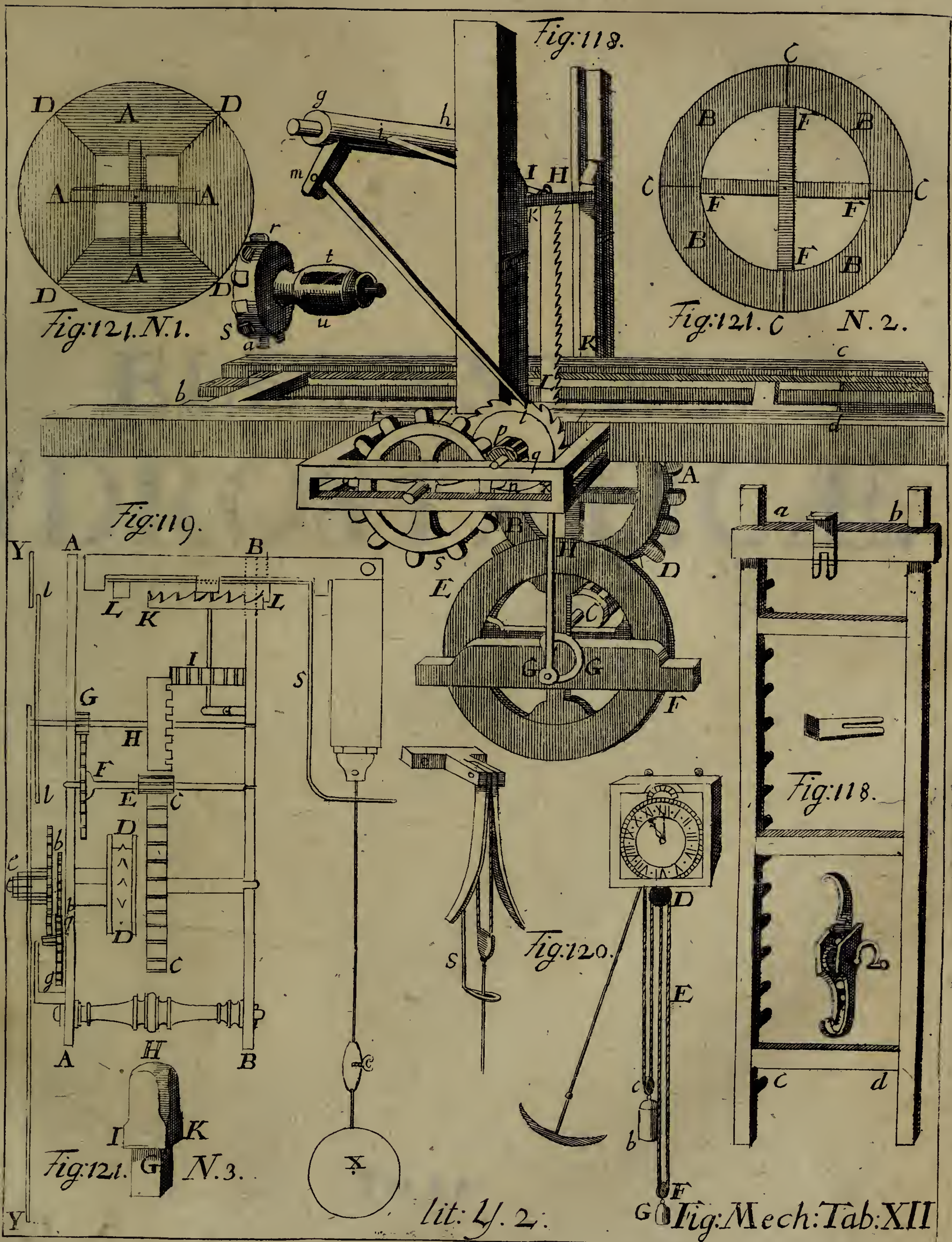


Fig: Mechan: Tab: XI. lit: X. 2.


Fig:118.
Fig:121. N.1.
Fig:121. C N.2.
Fig:119.
Fig:120.
Fig:118.
Fig:121. N.3.
lit: Ly. 2.
Fig:Mech:Tab:XII

ELEMENTA
HYDROSTATICÆ.

PRÆFATIO.

NOn dubito fore multos, quibus leges hydroſtaticæ paradoxæ videbuntur. Cum enim gravitatem ſibi imaginentur tanquam vim in materia perſiſtentem, quæ mutari nequeat, corpore immutato; fluida vero, quamdiu intra eosdem terminos concluſa quieſcunt, omnis actionis in corpora alia prorſus expertia judicent; rationem ſane non capiunt, cur partem gravitatis corpori demerſo veluti adimant, vel etiam totum ingenti ſæpius impetu ſurſum propellant. Enimvero quemadmodum leges hydroſtaticæ admodum evidenter demonſtrantur: ita non minus experientia ſingulæ confirmantur. Hinc diſcant velim, qui in rebus naturalibus cognoſcendis ſenſui ac imaginationi nimium tribuunt, res naturales alias plane eſſe in intellectu, quam in ſenſu: cujus veritatis plenior convictio ab Optica ſperanda. Quodſi hunc ſolum ſui uſum hydroſtatica præberet, digna pro-

fecto foret, quam meditarentur interiora Naturæ contemplaturi: verum enim vero ipſa quoque clavem continet, qua multa abdita reſerantur. Non exiguus eſt phœnomenorum numerus, quorum ratio in hydroſtatica continetur, nec ſine ea intelligi, nedum comprehendi poteſt. Hydroſtaticæ uſum in examinanda bonitate metallorum, mineralium, aliorumque corporum ſolidorum, inprimis autem fluidorum, in *Medicina hydroſtatica* oſtendit celeberrimus *Boylius.* Varios eosque præclaros in vita humana uſus in ipſa pertractatione paſſim indicavi. Sine ea nec aerometria intelligi, nec hydraulica exacte tradi poteſt. Sat ergo rationis apparet, cur hydroſtaticæ elementa inter elementa Matheſeos præcipuum quendam locum ſibi vendicent, & cur digna ſint, quæ ulterius excolantur & ad varios in vita humana uſus applicentur. Agite itaque, quotquot natura melioris ingenii ac animi dotibus ditavit, quam ut de pane lucrando ſolum cogitent, evolvite hæc Hydroſtaticæ elementa, legite, relegite, meditamini, ut genuinam Phyſicæ pertractandæ ideam animo comprehendatis.

ELE-

ELEMENTA HYDROSTATICÆ.

CAPUT I.

De CORPORUM SPECIFICA GRAVITATE ET LEVITATE.

DEFINITIO 1.

1. HYdroſtatica eſt ſcientia gravitationis in fluido.

SCHOLION.

2. *Docetur nempe in Hydroſtatica non modo ratio gravitatis fluidorum, ſed & inprimis actio eorum in ſolida demerſa.*

DEFINITIO 2.

3. *Corpus fluidum* eſt, cujus maſſulæ quantælibet ſunt inconnexæ, mutua cohæſione a cauſa quacunque impedita.

DEFINITIO 3.

4. *Corpus ſolidum* eſt, cujus maſſulæ quantælibet ſunt connexæ.

DEFINITIO 4.

5. *Corpus ſpecifice levius* eſt, quod ſub eodem volumine minus pondus continet quam alterum.

DEFINITIO 5.

6. *Corpus ſpecifice gravius* eſt, quod ſub eodem volumine majus pondus continet quam alterum.

SCHOLION.

7. *Sint duo globi æquales, quorum ſcilicet diameter unius pedis, alter plumbeus, alter ligneus. Quia plumbeus gravior ligneo; dicetur ſpecifice gravior, ligneus autem ſpecifice levior.*

DEFINITIO 6.

8. *Corpus denſius* eſt quod plus maſſæ ſub eodem volumine continet, quam alterum.

COROLLARIUM.

9. Cum maſſa ſit gravitati proportionalis (§. 100 *Mechan.*); corpus ſpecifice gravius denſius eſt ſpecifice leviori, & corpus denſius ſpecifice gravius eſt rariori (§. 5. 6).

DEFINITIO 7.

10. *Corpus rarius* eſt, quod minus maſſæ ſub eodem volumine continet, quam alterum.

COROLLARIUM.

11. Quare cum maſſa ſit gravitati proportionalis (§. 100 *Mechan.*); corpus rarius eſt ſpecifice levius denſiori & ſpecifice levius rarius ſpecifice graviori (§. 5. 6).

AXIO-

AXIOMA. 1.

12. *Corpora ejusdem denſitatis ſub eodem volumine æqualem maſſam continent.*

COROLLARIUM.

13. Quare ſi volumina eorundem æqualia fuerint, ejusdem quoque ponderis erunt ſeu gravitatem eandem habebunt (§. 100 *Mechan.*).

AXIOMA 2.

14. *Si duorum corporum volumina fuerint æqualia, denſitates ſunt ut maſſæ.*

SCHOLION.

15. *Nempe vi defin.* (§. 8) *corpus dicendum eſt duplo denſius, ſi duplum maſſæ ſub eodem volumine continet; triplo denſius, ſi triplum, & ita porro.*

COROLLARIUM.

16. Sunt igitur denſitates corporum æqualium ut pondera ſeu ut gravitates (§. 100 *Mechan.*).

THEOREMA 1.

17. *Si duo corpora eandem denſitatem habuerint, maſſæ ſunt ut volumina.*

DEMONSTRATIO.

Sub eodem enim volumine æqualem maſſam continent (§. 12), adeoque in volumine duplo continetur maſſa dupla, in triplo tripla, in quadruplo quadrupla & ita porro. Sunt igitur maſſæ ut volumina. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

18. Corporum ejusdem denſitatis gravitates ſunt in ratione voluminum (§. 100 *Mechan.*).

COROLLARIUM 2.

19. Ergo corpora ejusdem denſitatis ſunt etiam ejusdem gravitatis ſpecificæ & contra (§. 6).

COROLLARIUM 3.

20. Quare corpora diverſæ denſitatis ſunt diverſæ gravitatis ſpecificæ & contra.

THEOREMA 2.

21. *Maſſæ duorum corporum ſunt in ratione compoſita denſitatum atque voluminum.*

DEMONSTRATIO.

Sint trium corporum maſſæ a, b, c, volumina primi & ſecundi d, tertii e, denſitas primi f, ſecundi & tertii g: ſint nempe primum & ſecundum ejusdem voluminis, ſecundum & tertium ejusdem denſitatis. Quoniam

$$a : b = f : g \quad (\text{§. } 14)$$
$$b : c = d : e \quad (\text{§. } 17)$$

erit $ab : bc = fd : ge$ (§. 197 *Arithm.*) conſequenter $a : c = fd : ge$ (§. 174 *Arithm.*). *Q. e. d.*

CO-

COROLLARIUM 1.

22. Ergo gravitates etiam ſunt in ratione compoſita denſitatum & voluminum (§. 100 *Mechan.*).

COROLLARIUM 2.

23. Si $a = c$, erit $fd = ge$, conſequenter $f : g = e : d$ (§ 269 *Arithm.*), hoc eſt, ſi duorum corporum maſſæ vel gravitates fuerint æquales, denſitates ſunt reciproce ut volumina.

THEOREMA 3.

24. *Duorum corporum quorumcunque denſitates ſunt in ratione compoſita ex directa maſſarum & voluminum reciproca.*

DEMONSTRATIO.

Sint omnia ut in demonſtratione theorematis præcedentis: erit

$a : c = fd : ge$ (§. 20).

Erge $age = cfd$ (§. 267 *Arithm.*).

conſequenter $f : g = ae : cd$ (§. 269 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

25. Denſitates corporum ſunt in ratione compoſita ex directa gravitatum & reciproca voluminum.

AXIOMA 3.

26. *Si duorum corporum volumina fuerint æqualia, gravitates ſpecificæ ſunt ut gravitates abſolutæ.*

SCHOLION.

27. *Corpus enim duplo gravius ſpecifice dicitur altero, ſi duplam gravitatem ſub eodem volumine continet; triplo dicitur gravius, ſi triplam &c.* (§. 6).

COROLLARIUM.

28. Corporum æqualium gravitates ſpecificæ ſunt ut maſſæ (§. 100 *Mech.*).

THEOREMA 4.

29. *Corporum ejusdem ponderis gravitates ſpecificæ ſunt in ratione voluminum reciproca.*

DEMONSTRATIO.

Sit gravitas communis $= g$, volumen corporis A $= a$, volumen alterius B $= b$. Quoniam B ſupponitur eſſe homogeneum; gravitates voluminibus proportionales ſunt (§. 93 *Mechan.*) adeoque gravitas ipſius B ſub volumine a, reperitur $ag : b$ (§. 272 *Arithm.*). Sunt igitur gravitates ſpecificæ corporum A & B ut g ad $ag : b$ (§. 27), hoc eſt, ut bg ad ag (§. 170 *Arithm.*), conſequenter ut b ad a (§. 172 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

30. Ergo etiam maſſæ duorum corporum ejusdem ponderis ſunt in ratione voluminum reciproca (§. 100 *Mech.*).

THEOREMA 5.

31. *Gravitates abſolutæ duorum corporum ſunt in ratione compoſita volu-*

voluminum & gravitatum ſpecificarum (hoc eſt, gravitatum ſub eodem volumine).

DEMONSTRATIO.

Sint corporum ejusdem voluminis c gravitates abſolutæ a & b, ſpecificæ f & g; corporum ejusdem ponderis a volumina c & d, gravitates ſpecificæ f & e. Erit

$$a:b = f:g \text{ (§.26)}$$
$$f:e = d:c \text{ (§.29).}$$

Ergo $af:be = fd:gc$ (§.197 *Arith.*).
Unde $a:b = d:\frac{gc}{e}$ (§.176 *Arithm.*).
& $a:b = ed:gc$ (§.170 *Arithm.*). *Q.e.d.*

THEOREMA 6.

32. *Gravitates ſpecificæ duorum corporum ſunt in ratione compoſita ex directa gravitatum abſolutarum & reciproca voluminum.*

DEMONSTRATIO.

Sint omnia ut in demonſtratione theorematis præcedentis; erit

$$a:b = ed:gc \text{ (§.31).}$$

Ergo $\frac{a}{d}:\frac{b}{c} = e:g$ (§.176 *Arithm.*)
conſequenter $ac:bd = e:g$ (§.170 *Arithm.*). *Q.e.d.*

COROLLARIUM.

33. Gravitates itaque ſpecificæ ſunt ut denſitates (§.25).

CAPUT II.
DE
ÆQUILIBRIO ET PRESSIONE FLUIDORUM.

THEOREMA 7.

34. *Si in tubis communicantibus fluidi homogenei eadem altitudo fuerit, fluidum in tubo uno æquiponderat fluido in altero.*

DEMONSTRATIO.

Fig. 1. I. Si tuborum AB & DC diametri æquales fuerint; columnæ fluidi BE & FD eandem baſin & altitudinem habent, adeoque æquales ſunt (§.474 *Geom.*). Quare cum etiam gravitates æquales ſint (§.93 *Mechan.*) fluidum in BE eadem vi premit fluidum in BD, qua idem urgetur a fluido in DF. Flui-

da

da ergo in utroque tubo quieſcunt & neutrum alterum movet (§. 62 *Mechan.*). *Quod erat unum.*

ig. II. Quodſi baſis tubi GI fuerit quadrupla baſis alterius NK & aqua deſcenderet ex L usque ad O, e. gr. per intervallum unius digiti, in tubo altero NK aſcenderet ex M in N per altitudinem 4 digitorum (§. 518 *Geom.*). Quare celeritas, qua moveretur fluidum in tubo HK eſt ad celeritatem, qua idem moveretur in GI, ut baſis tubi GI ad baſin alterius HK (§. 28 *Mechan.*). Sed quia eadem fluidi in utroque tubo altitudo ipſumque fluidum homogeneum *per hypoth.* maſſa fluidi in tubo GI eſt ad maſſam fluidi in altero HK ut baſis tubi GI ad baſin alterius HK (§. 11 *Geom.*). Eſt ergo vis fluidi in tubo LI ad vim fluidi in tubo HK ut factum ex baſi tubi GI in baſin alterius HK ad factum ex baſi tubi HK in baſin alterius GI (§ 216 *Mech.*). Quare cum hæc facta æqualia ſint (§. 191 *Arithm.*); vires etiam æquales ſunt, adeoque neutrum fluidorum alterum movet (§. 62 *Mechan.*). *Quod erat ſecundum.*

ig. III. Si tubus unus SR fuerit ad alterum QR inclinatus, utriusque vero diameter eadem, & QR ad horizontem perpendicularis; gravitas abſoluta fluidi in tubo inclinato SR eſt ad gravitatem reſpectivam ejusdem, qua nititur juxta directionem plani TR ut longitudo plani TR ad altitudinem ejus TZ (§. 211 *Mech.*). Non alia igitur vi urget fluidum in tubo QR quam quantitas contenta in tubo perpendiculari TZ eandem baſin & altitudinem habente cum inclinato TR, conſequenter fluido in tubo QR æquiponderat, *per caſ.* 1. *Quod erat tertium.*

IV. Eodem modo oſtenditur fluida æquiponderare in tubis inclinatis AB & CD inæqualium diametrorum, ſi ad eandem altitudinem conſtituantur. *Quod erat quartum.* Fig. 4.

COROLLARIUM.

35. In tubis communicantibus fluidum homogeneum præponderat, cujus major eſt altitudo.

THEOREMA 8.

36. *In tubis communicantibus quibuscunque fluida diverſæ gravitatis ſpecificæ æquiponderant, ſi altitudines habuerint rationem gravitatum ſpecificarum reciprocam.*

DEMONSTRATIO.

E. gr. Sint tuborum AB & DC diametri æquales & in tubo AB aqua, in tubo DC argentum vivum. Et quia gravitas ſpecifica aquæ eſt ad gravitatem ſpecificam argenti vivi ut 1 ad 14; ſit reciproce altitudo aquæ in tubo AB 14 digitorum, altitudo vero Mercurii digiti unius. Fig. 1.

 Quo-

Quoniam baſes cylindrorum aquei & mercurialis æquales ſunt *per hypoth.* altitudinum rationem habent (§. 511 *Geom.*), conſequenter cum tam aqua, quam mercurius ſit fluidum homogeneum, licet inter ſe heterogenea, gravitates abſolutæ eorundem erunt in ratione compoſita ex directa tam gravitatum ſpecificarum 1 : 4 quam altitudinum EB & DH 4 : 1 (§. 31), hoc eſt æquales ſunt (§. 191 *Arithm.*). Pro mercuriali itaque cylindro ſubſtituere licet aqueum, cujus altitudo eſt altitudinis ipſius quadrupla (§. 15 *Arithm.*). Sed hic alteri aqueo in BA æquiponderat (§. 34). Ergo etiam mercurialis eidem æquiponderat.

Idem non abſimili modo oſtenditur, ſi tuborum diametri fuerint inæquales & tubi quomodocunque inclinati.

COROLLARIUM 1.

Fig. 1. 37. Inveniri adeo poteſt fluidorum duorum quorumcunque gravitas ſpecifica, ſi in tuborum communicantium unum AB infundatur fluidum unum, in alterum vero CD alterum & altitudines EB & FD, ad quas ſubſiſtunt æquilibrata, ex eadem menſura accurate æſtimentur. Eſt enim gravitas fluidi in AB ad gravitatem in DC ut DH ad BG (§. 36).

SCHOLION.

38. *Quodſi fluida facile commiſceantur, tubum horizontalem BD Mercurio replere debemus, commixtionem impediturô. Etſi autem fluida non facile commiſceri ſoleant, ſpecifice tamen gravius primo loco infundendum, ne concepto impetu ruat in alterum & fluida turbentur.*

COROLLARIUM 2.

39. Quoniam denſitates fluidorum ſunt ut gravitates ſpecificæ (§. 33); eædem erunt reciproce ut altitudines fluidorum DH & BG in tubis communicantibus æquilibratorum.

COROLLARIUM 3.

40. Eadem ergo methodo, quam *in Cor.* 1 (§. 37) expoſuimus, ratio denſitatum fluidorum determinatur.

THEOREMA 9.

41. *In vaſis perpendicularibus ABCD & EGHF æquales baſes BD & GH habentibus, fundi premuntur a fluido homogeneo in ratione altitudinum AB & EG.* Fig. 5.

DEMONSTRATIO.

Quoniam vaſa ſunt perpendicularia hoc eſt, baſes eorundem in plano horizontali collocatæ, *per hyp.* fluida adverſus fundos nituntur ſecundum lineas perpendiculares (§. 173 *Mechan.*), adeoque tota gravitate ſua, cum nihil reſiſtat. Premuntur adeo fundi in ratione gravitatum. Sed gravitates ſunt ut volumina (§. 93 *Mechan.*), volumina ſunt ut altitudines (§ 511 *Geom.*). Ergo fundi premuntur in ratione altitudinum. *Q. e. d.*

CO-

COROLLARIUM 1.

42. Quodſi ergo etiam altitudines æquales ſunt, fundi æqualiter premuntur.

COROLLARIUM 2.

43. In vaſe igitur perpendiculari æquales partes fundi a fluido homogeneo ad libellam conſiſtente æquali vi premuntur. Altitudines enim fluidi æquales ſunt ſuper parte qualibet fundi (§. 36).

COROLLARIUM 3.

44. In uno eodemque vaſe fluidum ad diverſas altitudines ſucceſſive conſtitutum fundum premit in ratione altitudinum, ad quas conſiſtit.

COROLLARIUM 4.

45. Decreſcente adeo altitudine, decreſcit preſſio, ſuntque hujus decrementa in ratione decrementorum altitudinis.

THEOREMA 10.

Fig. 46. *In vaſis perpendicularibus ABDC & EGHF, baſes BD & GH utcunque inæquales habentibus, fundi premuntur a fluido homogeneo in ratione compoſita baſium & altitudinum.*

DEMONSTRATIO.

Ex demonſtratione theorematis præcedentis (§. 41) patet, fundos premi in ratione gravitatum. Gravitates vero fluidorum ſunt ut volumina (§. 93 *Mech.*), volumina ſunt in ratione compoſita baſium & altitudinum (§. 510 *Geom.*). Ergo fundi premuntur in ratione compoſita baſium & altitudinum. *Q. e. d.*

THEOREMA 11.

47. *Si vas inclinatum ABCD eandem altitudinem & baſin habuerit cum perpendiculari BEFG, fundus utriusque æqualiter premitur.* Fig. 7.

DEMONSTRATIO.

In vaſe inclinato ABCD fundus CD premitur ſecundum directionem BD. Eſt autem vis gravitatis ſecundum BD ad gravitatem abſolutam ut BE ad BD (§. 211 *Mech.*). Ergo fundus CD eodem modo premitur, ac ſi a fluido ad altitudinem BE conſiſtente perpendiculariter premeretur. Fundus igitur vaſis perpendicularis BEFG & inclinati ABDC æqualiter premuntur (§. 42). *Q. e. d.*

THEOREMA 12.

48. *Si baſes vaſis* ABDC *inæquales fuerint, fundus eodem modo premitur, ac ſi inferior ſuperiori æqualis exiſteret.* Fig. 8.

DEMONSTRATIO.

I. Sit baſis inferior CD minor ſuperiore AB. Quoniam fluidum fundum CD, quem in plano hori-

zontali ſupponimus, ſecundum lineas perpendiculares EC premit (§. 173 *Mechan.*), nonniſi fluidum intra cylindrum ECDF comprehenſum adverſus eum nititur, reliqua maſſa contra latera vaſis nitente. Eodem ergo modo premitur, ac ſi baſis ſuperior inferiori æqualis eſſet. *Quod erat unum.*

Fig. 9. II. Sit vaſis inferior baſis CD multo major ſuperiore FG. Nempe ut demonſtratio facilior evadat, cylindro ABCD infixus intelligatur tubus FE. Quodſi ponamus fundum CD attolli in L, ut fluidum moveatur per intervallum DL: in tubo FE per altitudinem GH aſcendet, quæ eſt ad DL ut baſis CD ad baſin GF (§. 518 *Geom.*). Eſt adeo celeritas fluidi in tubo FE ad celeritatem in vaſe AD ut baſis CD ad baſin FG (§. 28 *Mechan.*). Vis ergo, qua aqua in tubo deorſum nititur, prodit ſi baſis cylindri CD ducatur in altitudinem CK (§. 222 *Mechan.*), conſequenter fundus CD eadem vi premitur, qua a cylindro HCDI premeretur (§. 480 *Geom.*). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

50. Vaſorum igitur fundi æquales eadem vi premuntur a fluido ad eandem altitudinem conſiſtente, quæcunque ſit figura vaſis.

SCHOLION 1.

51. *Hinc ratio apparet, cur tanta vi fundus ſuperior dolii AD attollatur ab aqua in tubo CD plurium pedum contenta. Ipſemet experimentum aliquoties iteravi in vaſe ligneo AB imus pice probe obducto & tubo CD ex lamina ferrea ſtanno obducta parato altitudinis 14 fere pedum, nec 800 libræ baſi ſuperiori impoſita impedire potuerunt, quo minus attolleretur.* Fig. 10.

SCHOLION 2.

52. *Ab hoc principio derivavi* ſyphonem *meum* anatomicum, *ab aliquot jam annis cum amicis communicatum. Fieri ſcilicet curavi ex lamina ferrea ſtanno obducta vas cylindricum DGEF & eidem afferruminari juſſi tubum FIH. Quodſi jam veſica, aut ventriculus, aut pellis animantium brutorum, aut alia quæcunque partes membranaceæ corporis animalis inverſæ baſi ſuperiori ſuperinducantur, eas non modo ingenti vi in hemiſphæricam figuram expandit, ſed & poros ſubintrans omnes membranas & vaſa ita dividit, ut levi inciſura facta, ſolis digitis multo accuratius ſeparentur, quam cultro anatomico. Iucundum ſane eſt ſpectaculum, dum non modo ſubſtantia membranacea mire intumeſcit, ſed & vaſorum per eam diſperſorum ramificationes & inſertiones minimas diſtincte ſpectare tunicasque, quæ vulgo pro una habentur, in plures diſcerpere licet. Probe autem notandum eſt, quod ſi interior veſicæ aut reliquarum partium corporis animalis ſuper vaſe DE expanſarum ſuperficies aquam lambat, aqua per ſubſtantiam earum penetrare nequeat. Cæterum ſi veſicæ ingens pondus imponas, ab aqua in tubo HI vix duarum librarum attollitur.* Fig. 11.

SCHOLION 3.

53. *Veritatem hujus doctrinæ de preſſione fluidorum in ratione baſis ac altitudinis exploraturus vas metallicum ACDB ita conſtrueret,* Fig. 9.

curet, ut fundus CD ſit mobilis, annulo coriaceo madefacto apprimendus, dum experimentum capitur, & baſi ſuperiori AB ſucceſſive tubi æquealti ſed diverſarum diametrorum applicari poſſint. Quodſi enim funiculi per tubum FE trajecti alterius extremum annulo K baſi mobili afferruminato, alterum vero brachio alicujus libræ alliges & in lance alteri appenſa pondus colloces idque adjectis minoribus tamdiu augeas, donec fundus CD attollatur, non modo hinc diſces, eodem ſemper pondere opus eſſe ad fundum attollendum, quæcunque ſit tubi FE amplitudo, modo aqua conſtanter ad eandem altitudinem conſiſtat, ſed & pondus æquale deprehendes gravitati cylindri aquei eandem cum vaſe baſin CD, ſed altitudinem KF habentis.

SCHOLION 4.

54. *Cum iis quæ de æquilibrio fluidorum demonſtrata ſunt, non conſentire videtur, quod in tubis capillaribus, ſeu fiſtulis gracilioribus utrinque patulis unaque ſua extremitate ſub aquam demerſis, aqua ultra libellam aſſurgat, eo quidem magis, quo minor tubuli diameter. Enimvero facile colligitur, phænomenon hoc alteri cuidam cauſæ adſcribendum eſſe, licet ſine principiis aërometricis definiri nequeat.*

CAPUT III.

De GRAVITATIONE CORPORVM SPECIFICE GRAVIORVM IN FLVIDIS LEVIORIBVS.

THEOREMA 13.

55. *Corpus ſpecifice gravius in fluido leviori eam ponderis ſui partem amittit, quantum eſt pondus fluidi ſub eodem volumine.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus e. gr. cubum pollicarem plumbeum F ſub aqua demergi. Expelletur adeo ex eo, quem occupat, loco cubus pollicaris aquæ. Sed pondus hujus aquæ a reſiſtentia ambientis ſuſtentabatur. Ergo a reſiſtentia aquæ ambientis tanta quoque ponderis cubi plumbei pars ſuſtentari debet, quantum eſt pondus aquæ expulſæ. Hac igitur parte gravitas corporis demerſi deprehendetur imminuta. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

56. Cum fluidum ſpecifice gravius ſub eodem volumine majus pondus poſſideat, quam levius (§. 6); idem corpus in fluido ſpecifice graviori majorem ponderis ſui partem amittit, quam in leviori, adeoque in leviori magis ponderat quam in graviori.

SCHO-

SCHOLION.

57. *Ita globus plumbeus minus ponderat in aqua quam in ſpiritu vini.*

COROLLARIUM 2.

58. Gravium igitur homogeneorum æqualium in aëre æquiponderantium æquilibrium tollitur, ſi unum fluido graviori, alterum leviori immergatur.

COROLLARIUM 3.

59. Cum gravitates ſpecificæ ſint ut abſolutæ ſub eodem volumine (§. 26); erit gravitas fluidi ſpecifica ad gravitatem ſolidi demerſi ut pars ponderis a ſolido amiſſa ad pondus ejus integrum.

COROLLARIUM 4.

60. Duo ſolida mole æqualia idem pondus in eodem fluido amittunt (§. 55). Sed ſpecifice gravioris pondus majus eſt, quam ſpecifice levioris (§. 6). Ergo majorem ſui ponderis partem amittit ſpecifice levius, quam gravius (§. 189 *Arithm.*).

COROLLARIUM 5.

61. Quia corporum pondere æqualium volumina ſunt reciproce ut gravitates ſpecificæ (§. 29); ſpecifice levius in eodem fluido majus pondus amittit, quam gravius (§. 55) Quare ſi in uno fluido æquiponderant, in alio non æquiponderabunt, ſed ſpecifice gravius præponderabit eo magis, quo fluidum denſius.

PROBLEMA I.

62. *Invenire pondus fluidi cujuscunque, e. gr. vini in dolio contenti.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur volumen fluidi per regulas ſtereometricas.
2. Cubus plumbeus pollicaris ex crine equino ſuſpenſus fluido immergatur & ope bilancis exactæ notetur pondus amiſſum: quod erit pondus fluidi ſub volumine unius digiti cubici (§. 55).
3. Quare cum in fluido homogeneo pondus ſit volumini proportionale (§. 93 *Mechan.*); pondus fluidi quæſitum per regulam trium (§. 272 *Arithm.*) invenietur.

E. gr. Sit capacitas dolii 88 pedum cubicorum, pes cubicus vini 68 librarum: erit gravitas vini in integro dolio 88. 68 : 1 = 5984 librarum.

COROLLARIUM.

63. Eodem ergo modo determinari poteſt pondus unius pedis cubici fluidi cujuscunque & in uſus futuros annotari.

SCHOLION.

64. *Pondus pedis cubici aquæ inveſtigarunt multi; ſed cum in diverſis fluidis ac fontibus non eadem ſit gravitas ſpecifica aquæ immo nec omni tempore eadem datur in eodem fluvio: mirum non eſt, obſervationes diverſorum Autorum inter ſe admodum diſcrepare.* Morlandus (a) *experimentis ſæpius iteratis didicit aquæ pedem cubicum eſſe 70 librarum cum duabus unciis.*

THEO-

(a) Elevation des Eaux p. 7.

THEOREMA 14.

65. *Gravitates ſpecificæ fluidorum ſunt ut pondera ab eodem ſolido in utroque amiſſa.*

DEMONSTRATIO.

Gravitates ſpecificæ ſunt ut abſolutæ ſub eodem volumine (§. 26). Sed pondera ab eodem ſolido in diverſis fluidis amiſſa ſunt gravitates abſolutæ fluidorum ſub eodem volumine (§ 55). Ergo gravitates ſpecificæ fluidorum ſunt ut pondera ab eodem ſolido in iis amiſſa. *Q. e. d.*

PROBLEMA 2.

66. *Invenire gravitatem ſpecificam fluidorum quorumcunque.*

RESOLUTIO.

1. Ex uno brachio libræ ſuſpendatur globus plumbeus & ad alterum appendatur pondus D, quod cum ipſo in aëre æquilibrium ſervet.
2. Globus ſucceſſive immittatur diverſis fluidis, quorum ſpecifica gravitas determinanda, noteturque pondus, quod in ſingulis fluidis demerſo æquiponderat.
3. Singula hæc pondera ſubducantur a pondere D: ita relinquentur partes in quolibet fluido amiſſæ & una ratio gravitatis ſpecificæ fluidorum conſtabit (§. 65).

COROLLARIUM.

67. Cum denſitates ſint ut gravitates ſpecificæ (§. 33); eodem modo invenitur ratio denſitatis fluidorum.

SCHOLION 1.

68. *Maximi uſus eſt hoc problema; per id enim gradus puritatis ac bonitatis fluidorum inveſtigantur; quod ſcire non ſolum in ſcientia naturali excolenda, ſed & in vita civili ac praxi Medica proficuum exiſtit.*

SCHOLION 2.

69. *Quodſi diverſo tempore gravitatem ſpecificam fluidorum inveſtiges; hieme majorem, quam æſtate deprehendes.* Ioan. Caſp. Eiſenſchmidius (b) *experimenta hanc in rem complura exhibet, ex quibus potiora in hanc tabulam referre libet.*

Tabula gravitatis Liquorum in pondere Pariſino.

Pollex cubicus Pariſ.	Æſtate Unc.	Groſſ.	Gran.	Hieme Unc.	Groſſ.	Gran.
Mercurii	7	1	66	7	2	14
Olei vitrioli	-	7	59	-	7	71
Spiritus vitrioli	-	5	33	-	5	38
Spiritus nitri	-	6	24	-	6	44
Spiritus ſalis	-	5	49	-	5	55
Aquæ fortis	-	6	23	-	6	35

Xxx x Aceti

(b) in Diſquiſitione Nova de ponderibus & menſuris p. 174 & 175.

Aceti	-	5	15	-	5	21
Aceti deſtillati	-	5	11	-	5	15
Vini Burgundici	-	4	67	-	4	75
Spiritus vini	-	4	32	-	4	42
Cereviſiæ albæ	-	5	1	-	5	9
Cereviſiæ fuſcæ	-	5	2	-	5	7
Lactis bubuli	-	5	20	-	5	25
Lactis caprini	-	5	24	-	5	28
Urinæ	-	5	14	-	5	19
Spiritus urinæ	-	5	45	-	5	53
Olei Tartari	-	7	27	-	7	43
Olei olivarum	-	4	53	hieme congelatur		
Olei terebinthinæ	-	4	39	-	4	46
Aquæ marinæ	-	6	12	-	6	18
Aquæ fluvialis	-	5	10	-	5	13
Aquæ putealis	-	5	11	-	5	14
Aquæ deſtillatæ	-	5	8	-	5	11

SCHOLION 3.

70. Ut accuratiſſime omnia peragantur, gravitas fili extra fluidum conſtituti ſubtrahenda eſt ponderi ſolidi in aëre, vis vero, quæ requiritur, ad filum ſub fluido demergendum, ſi ſpecifice levius, addenda eſt ponderi amiſſo. Quodſi vero filum, ex quo pendet ſolidum, fluido gravius fuerit, integrum pondus fili in aëre ſubtrahendum eſt a pondere ſolidi in aëre, & pondus, quod filum amittit, a pondere in fluido amiſſo. Enimvero quoniam filum cum ſolido immerſo idem totum conſtituit, hac cautione opus non eſt, ſi in omnibus fluidis, quorum gravitates ſpecificas inter ſe conferre volueris, eandem fili portionem una cum ſolido immergas. Quia crinis equinus eandem fere cum aqua gravitatem ſpecificam habet; experimenta hydroſtatica in aqua inſtituturi ex eodem ſolida ſuſpendunt.

PROBLEMA 3.

71. *Invenire, utrum partes fluidi inferiores comprimantur a ſuperioribus, nec ne.*

RESOLUTIO.

Exploretur *per probl.* 2 (§. 66), quamnam ponderis ſui partem amittat idem ſolidum in diverſis ejuſdem fluidi profunditatibus, ita ut ratio habeatur cautionis modo commendatæ (§. 70). Quodſi enim pondus a ſolido ſolo in diverſis profunditatibus amiſſum idem fuerit, eadem erit gravitas fluidi ſpecifica in partibus inferioribus, quæ in

in ſuperioribus (§. 55), conſequenter eadem denſitas (§. 33). Quodſi vero in profunditate majore pondus majus amittitur, quam in minore; in priore caſu gravitas ſpecifica (§. 6), conſequenter & denſitas (§. 33), major erit quam in altero. *Q. e. i. & d.*

SCHOLION.

72. *Tentavit hoc in aqua* Franciſcus Tertius de Lanis (c). *Accepto autem vaſe duorum pedum altitudine cum globum vitreum eidem immitteret, qui pondus aquæ 18 granis excedebat, eundem quoque cum æquipondio 18 granorum perfectiſſimum facere æquilibrium expertus eſt. Cum eandem ex crine equino pendulum ad infimam aquæ profunditatem deſcendere permitteret, ponderi ejus dimidium inſuper granum decedere obſervavit: quod tamen decrementum quia in crinem equinum aquæ nunc totum immerſum conjici debet, quippe extra aquam grani ſemiſſi æquiponderantem, aquæ partes inferiores a ſuperioribus nullam pati compreſſionem agnovit. Non inutile foret idem experimentum in profunditatibus majoribus inſtituere.*

PROBLEMA 4.

73. *Determinare rationem, quam habet gravitas ſpecifica fluidi ad gravitatem ſpecificam ſolidi quod fluido ſpecifice gravius exiſtit.*

RESOLUTIO.

Ponderetur maſſa quantalibet ſolidi in fluido & notetur accurate pondus in eodem amiſſum, non neglecta cautione (§. 70) commendata: erit enim gravitas ſpecifica fluidi ad gravitatem ſpecificam ſolidi in ipſo demerſi, ut pars ponderis a ſolido amiſſa ad pondus ejus integrum (§. 59). *Q. e. d.*

SCHOLION.

74. *Si fluidum ſpecifice gravius ſolido, propoſito ſatisfiet per ea, quæ in capite ſubſequente traduntur.*

THEOREMA 15.

75. *Corporum pondere æqualium gravitates ſpecificæ ſunt reciproce ut partes ponderis in eodem fluido amiſſæ.*

DEMONSTRATIO.

Gravitates ſpecificæ corporum pondere æqualium ſunt reciproce ut volumina (§. 29). Quare cum partes ponderis in eodem fluido amiſſæ voluminum rationem habeant (§. 26); gravitates corporum ſpecificæ ſunt reciproce ut partes ponderis in eodem fluido ab iis amiſſæ. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

76. Invenitur adeo ratio, quam habent gravitates ſpecificæ ſolidorum, ſi maſſæ in aëre æquiponderantes in eodem fluido ponderentur & pondera a ſingulis amiſſa notentur.

SCHOLION.

77. *Gravitatem ſpecificam plurimorum corporum ſolidorum inveſtigarunt multi. In-*

(c) In Magiſterio Naturæ & Artis Tom. 3. lib. 25 c. 1. exper. 7 f. 492.

primis prolixæ ſunt tabulæ, quæ in hanc rem exhibentur in Tranſactionibus Anglicanis (d). *Variorum quoque corporum, præſertim metallorum, gravitatem ſpecificam, jam ante dedit* Marinus Ghetaldus (e) & *ex eo* Guilielmus Oughtredus (f): *dederunt poſtea alii. Nobis ſufficerit annotaſſe metallorum & aliorum quorundam corporum gravitatem ſpecificam a* Petito *multa ſolertia inveſtigatam, prout eam exhibuit* Merſennus & *ex ipſo poſtea alii. Nempe ſi fuerit gravitas*

Auri librarum 100

erit ſub eodem volumine gravitas

Mercurii	lib. $71\frac{1}{2}$	Stanni puri	$38\frac{1}{4}$
Plumbi	$60\frac{1}{2}$	Magnetis	26
Argenti	$54\frac{1}{2}$	Marmoris	21
Cupri	$47\frac{1}{3}$	Lapidis	14
Æris cyprii	45	Sulphuris	$12\frac{1}{2}$
Ferri	42	Ceræ	5
Stanni communis	39	Aquæ	$5\frac{1}{3}$

PROBLEMA 5.

78. *Data gravitate fluidi, invenire gravitatem ſolidi mole ipſi æqualis.*

RESOLUTIO.

1. Inveſtigetur ratio gravitatis ſpecificæ fluidi ac ſolidi (§. 73)
2. Hac data per regulam trium invenietur gravitas ſolidi ſub volumine æquali.

E. gr. Quæritur gravitas plumbi ſub eodem volumine cum aqua 200 librarum. Quia gravitas ſpecifica aquæ ad gravitatem plumbi ut $5\frac{1}{3}$ ad $60\frac{1}{2}$, hoc eſt, ut 32 ad 363 (§. 77); reperietur gravitas plumbi $363 . 200 : 32 = 2268\frac{3}{4}$ librarum.

COROLLARIUM.

79. Eodem modo invenitur data gravitate ſolidi unius gravitas alterius, ſi ratio gravitatis ſpecificæ inveſtigetur (§. 76). E. gr. quæritur gravitas ſtanni cum plumbo 30 librarum ſub eodem volumine. Quia gravitas ſtanni ad gravitatem plumbi ut 39 ad $60\frac{1}{2}$ (§. 77), hoc eſt, ut 78 ad 121; reperietur gravitas ſtanni quæſita $19\frac{41}{121}$ librarum.

PROBLEMA 6.

80. *Dato corporis ſolidi volumine, invenire volumen ſolidi alterius pondere æqualis.*

RESOLUTIO.

Cum volumina corporum pondere æqualium ſint reciproce ut gravitates ſpecificæ (§. 29); problema præſens eodem modo reſolvitur, quo præcedens.

E. gr. Quæritur volumen ferri decem pedibus cubicis marmoris æquiponderantis. Quia marmor ad ferrum ut 21 ad 42, hoc eſt, ut 1 ad 2; volumen marmoris erit 20 pedum cubicorum.

PRO-

(d) n. 169 p. 926 & ſeqq. it. n. 199 p. 994. conf. Epitome Transact. Angl. Cl. Lowthorpii vol. 1. cap. 6. p. 610 & ſeqq.
(e) in Archimede promoto.
(f) in Opuſculis Mathematicis p. 61.

PROBLEMA 7.

81. *Dato pondere corporis ex duobus miſcibilibus compoſiti una cum pondere, quod in fluido aliquo amittit; invenire pondera miſcibilium ſigillatim.*

RESOLUTIO.

1. Inveſtigetur (§. 66), quantum ponderis in dato fluido maſſa quædam determinata utriusque miſcibilis amittat.

2. Hinc per regulam trium porro eruatur, quantum ponderis in eodem amittere debeat utriusque maſſa, ſi pondere æqualis fuerit mixto.

3. Decrementum minus ſubtrahatur e majori, ut conſtet exceſſus, quo pondus a ſpecifice leviori amiſſum ſuperat pondus a graviori amiſſum.

4. Porro pondus a ſpecifice graviori amiſſum ſubtrahatur a decremento ponderis corporis mixti, ut conſtet exceſſus, quo pondus a mixto amiſſum ſuperat pondus a graviori amiſſum.

5. Quodſi ad exceſſum primum, exceſſum alterum & pondus mixti quæratur numerus quartus proportionalis; erit is pondus miſcibilis ſpecifice levioris: quod

6. a pondere mixti ſubductum relinquit pondus maſſæ ſpecifice gravioris.

E. gr. Maſſa 120 librarum ex ſtanno & plumbo commixtis compoſita in aqua 14 libras amittit: quæruntur pondera ſtanni & plumbi ſigillatim. Quoniam experimentando reperitur, ſtannum 37 librarum in aqua amittere pondus 5 librarum, plumbum vero librarum 23 amittere 2; calculum ita inibis:

$$37 - 5 - 120$$
$$\frac{5}{\frac{600}{37}\text{ lib.}}$$

$$23 - 2 - 120$$
$$\frac{2}{\frac{240}{23}\text{ lib.}}$$

$$\frac{600}{37} - \frac{240}{23} = \frac{13800 - 8880}{851} = \frac{4920}{851}$$

$$14 - \frac{240}{23} = \frac{11914 - 8880}{851} = \frac{3034}{851}$$

```
4920 — 3034 — 120
  41          1  (120
   16
 40.34 ( 74 lib, Pondus ſpecif. lev.
  477  \ 120       Pondus mixti
   4     ————
          46     Pondus ſpecifice
                    gravioris.
```

DEMONSTRATIO.

Sit pondus mixti integrum $= p$, quod in fluido amittit $= a$, pondus amiſſum a ſpecifice graviori $= b$, amiſſum a ſpecifice leviori $= c$ pondus ſpecifice levioris $= x$, erit pondus ſpecifice gravioris $= p - x$, pondus a miſcibili x in fluido amiſſum $= cx : p$, amiſſum a miſcibili $p - x = (bp - bx) : p$. Ergo

$$(bp - bx + cx) : p = a$$

$$cx - bx = (a - b) p$$

$$x = (a - b) p : (c - b) \quad Q.\ e.\ d.$$

SCHOLION.

82. *Eodem modo ſolvi poteſt problema ab* Hierone *Rege Syracuſarum olim* Archimedi *propoſitum, quantum ſcilicet argenti coronæ aureæ admiſcuerit doloſus artifex* (g).

PROBLEMA 8.

83. *Determinare bonitatem maſſarum maſſasque adulteratas diſtinguere a genuinis.*

RESOLUTIO.

Præſupponendum hic eſt, bonitatem maſſæ æſtimari ex ratione ipſius ad volumen, e. gr. frumentum eo melius, quo gravitas ſpecifica major. Quare non alia re opus eſt, quam ut inveſtigetur decrementum ponderis in aqua.

Quodſi in eadem mediante gravitatis ſpecificæ maſſarum ratio ad fluidum aliquod determinetur maſſæ adulteratæ facile dignoſcuntur, ſi facta ponderatione in eodem fluido, diverſa ab hac gravitatis ſpecificæ ratio reperitur.

SCHOLION 1.

84. *Cum aqua non ſemper ejusdem ſit gravitatis ſpecificæ, diverſitas prius per ponderationem ejusdem ſolidi in eadem detegenda.*

SCHOLION 2.

85. *Notandum præterea, fieri nonnunquam poſſe, ut hydroſtaticum examen ſolum adulterationem factam non prodat.* E. gr. *Cum ſtannum argento ſit ſpecifice levius, plumbum ſpecifice gravius, duo hæc metalla (quod inferius expreſſius docetur) ita miſceri poſſunt, ut eandem cum argento gravitatem ſpecificam naſciſcantur: quæ maſſa poſtmodum cum argento permixta examen hydroſtaticum non verebitur. Unde apparet, non quantitatem trium vel plurium miſcibilium in uno mixto eodem modo determinari, quo quantitas duorum invenitur* (§. 81).

SCHOLION 3.

86. *Notandum denique, per varia experimenta addiſcendam eſſe diverſitatem, quæ in gravitate ſpecifica corporum ejusdem ſpeciei ad idem fluidum occurrere poteſt, antequam de adulteratione facta judicium feratur.*

PROBLEMA 9.

87. *Fluidum ſpecifice gravius ponderare in ſpecifice leviori.*

RESOLUTIO.

Sit e. gr. Mercurius in aqua ponderandns.

1. Aſſu-

(g) Vid. Vitruvius lib. 9 c. 3 f. 273.

Aſſumatur vas vitreum v.g. gravitatis 91, quod aqua plenum intra aquam ponderetur, noteturque pondus amiſſum 36 : quod erit pondus aquæ ejusdem cum vitro voluminis.

Idem vas argento vivo repletum in aëre ponderetur, noteturque pondus 186.

Ponderetur etiam in aqua, ut habeatur pondus amiſſum 43: quod erit æquale ponderi aquæ ejusdem cum vitro & Mercurio ſimul ſumto voluminis.

Quare ſi pondus aquæ ejusdem cum vitro voluminis 36 inde ſubtrahatur; relinquetur pondus aquæ ejusdem cum argento vivo voluminis, hoc eſt, pondus ab argento vivo in aqua amiſſum 7.

THEOREMA 16.

88. *Corpus ſpecifice gravius in fluido ſpecifice leviori ea vi deſcendit, quæ eſt exceſſui ponderis ejusdem ſupra pondus fluidi ſub eodem volumine æqualis.*

DEMONSTRATIO.

Corpus in fluido nonniſi ea vi deſcendit, quæ ipſi relinquitur, demta parte in reſiſtentiam fluidi vincendam impenſa. Quamobrem cum hæc æqualis ſit ponderi fluidi ſub eodem volumine (§. 55); nonniſi exceſſu ponderis ſui ſupra pondus fluidi ſub eodem volumine deſcendit. *Q. e d.*

COROLLARIUM 1.

89. Vis igitur, quæ corpus ſpecifice gravius in fluido ſuſtentat, æqualis eſt exceſſui gravitatis abſolutæ ſupra gravitatem fluidi ſub eodem volumine. E. gr. Cuprum librarum $47\frac{1}{3}$ in aqua amittit de pondere ſuo $5\frac{1}{3}$ libras : vis ergo 42 librarum id ſuſtentare valet.

COROLLARIUM 2.

90. Quare cum exceſſus ponderis ſolidi ſupra pondus fluidi ſpecifice gravioris minor ſit, quam ſupra pondus ſpecifice levioris ſub eodem volumine; in ſpecifice graviore vi minore deſcendit, quam in leviore, conſequenter etiam in hoc celerius, in illo tardius deſcendit.

PROBLEMA 10.

91. *Data ſolidi ſubmerſi gravitate abſoluta datoque volumine, determinare vim, qua in fluido attolli poteſt.*

RESOLUTIO.

1. Exploretur pondus unius pedis cubici aquæ (§. 63) : unde,
2. Ob datum ſolidi ſubmerſi volumen, per regulam trium inveniri poteſt pondus aquæ idem cum ipſo volumen habentis.
3. Hæc ergo ſi ſubducatur a gravitate corporis ſubmerſi data, relin-

linquetur vis, quæ ipſum in aqua ſuſtentare valet adeoque tantillo aucta attollet.

Sit pondus corporis ſubmerſi 3000 librarum, volumen 40 pedum cubicorum. Cum pes cubicus aquæ ſit 70 librarum (§. 64); erit pondus aqu idem cum ſubmerſo volumen habent 2800: quod ex 3000 ſubductum re linquit vim ſuſtentantem 200 libra rum.

CAPUT IV.

De GRAVITATIONE CORPORUM SPECIFICE LEVIORUM IN FLUIDO GRAVIORI.

THEOREMA 17.

92. *Corpus ſpecifice levius in fluido graviore mergitur, donec pondus fluidi ſub volumine partis immerſæ æquetur ponderi totius corporis.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim columnæ quantælibet, in quas fluidum concipitur diviſum, æquiponderent, (§. 34); ſi corpus ſolidum eidem imponitur, perinde eſt ac ſi columnæ uni tantum ponderis acceſſiſſet, quantum eſt fluidi ſub eodem volumine, conſequenter columna iſta præponderat (§. 35). Cedunt ergo columnæ collaterales (§. 62 *Mechan.*) corpusque ſolidum immergitur. Quam primum vero corpus ea ſui parte immerſum, ut fluidum ejectum ex ſpatio, quod occupat, pondere æquale ſit gravitati totius corporis; columna iſta nonampliu præponderat. Corpus itaque it immerſum ab aqua ſuſtentatu *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

93. Quia gravitates ſpecificæ corpo rum ejusdem ponderis ſunt reciproc ut volumina (§. 29), volumina ver fluidorum pondere æqualium ſint par tes immerſæ ejusdem ſolidi (§. 59) gravitates ſpecificæ fluidorum recipro ce ſunt ut partes immerſæ ejusdem cor poris.

COROLLARIUM 2.

94. Solidum ergo profundius mergitur in fluido leviori, quam in gravi ori.

CO

COROLLARIUM 3.

95. Quo major ratio gravitatum ſpecificarum ſolidi atque fluidi, eo profundius corpus mergitur.

COROLLARIUM 4.

96. Si ſolidum fuerit ejusdem gravitatis ſpecificæ cum fluido, corpus totum ſubmergitur & datum intra fluidum locum ſervat.

COROLLARIUM 5.

97. Si corpus ſpecifice levius in fluido graviori totum ſubmergitur, a columnis collateralibus ea vi ad aſcenſum urgetur, quæ æqualis eſt exceſſui fluidi, volumine ſolido æqualis, ſupra pondus ſolidi (§. 62 *Mechan.*).

COROLLARIUM 6.

98. Corpus adeo ſpecifice levius fundo vaſis incumbens non attollitur, niſi fluidum gravius affuſum ultra partem aſſurgat, quæ volumine æqualis eſt fluido ejusdem cum ſolido toto ponderis.

THEOREMA 18.

99. *Gravitas ſpecifica ſolidi eſt ad gravitatem ſpecificam fluidi, in quo mergitur, ut volumen partis immerſæ ad volumen integrum.*

DEMONSTRATIO.

Volumen enim fluidi ſolido toti pondere æqualis æquatur volumini partis immerſæ (§. 92). Cum adeo gravitates ſpecificæ æquiponderantium ſint reciproce ut volumina (§. 29); erit gravitas ſpecifica ſolidi ad gravitatem fluidi, in quo mergitur, ut volumen partis immerſæ ad volumen integrum. *Q. e. d.*

THEOREMA 19.

100. *Solidorum æquiponderantium partes in fluido graviori immerſæ ſunt in ratione voluminum.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim ut gravitas ſolidi A ad fluidi gravitatem, ita pars immerſa ad volumen ejus (§. 99) & ut gravitas ſolidi B ad fluidi gravitatem ita pars immerſa ad volumen ejus (§. *cit.*). Ergo pars immerſa ipſius A eſt ad volumen ejusdem, ut pars immerſa ipſius B ad hujus volumen (§. 156 *Arithm.*), conſequenter partes immerſæ ſunt in ratione voluminum (§. 164 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 20.

101. *Solidorum æqualium gravitates ſpecificæ ſunt ut partes eorundem in eodem fluido demerſæ.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim gravitas ſpecifica ſolidi A ad gravitatem fluidi ut pars immerſa ad volumen illius integrum (§. 99) & gravitas ſpecifica ſolidi B ad gravitatem ejusdem fluidi, ut pars immerſa ad volumen illius integrum (§. *cit.*). Ergo gravitates ſpeci-

ſpecificæ ſolidorum æqualium A & B ſunt ut partes immerſæ (§. 168 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 11.

101. *Data gravitate pedis cubici fluidi e. gr. aquæ, una cum volumine partis immerſæ ſolidi, invenire pondus totius corporis.*

RESOLUTIO.

Quia pondus corporis ſolidi æquale eſt ponderi fluidi quod idem cum parte immerſa volumen habet (§. 92); ad pedem cubicum, volumen partis immerſæ & gravitatem pedis cubici unius, quærendus eſt numerus quartus proportionalis, qui erit pondus totius corporis.

E. gr. Pes cubicus aquæ eſt 70 librarum, (§. 64). Si itaque fuerit volumen partis immerſæ 40 pedum cubicorum; reperietur pondus totius corporis 2800 librarum.

PROBLEMA 12.

102. *Data gravitate e. gr. unius pedis cubici aquæ & gravitate ſolidi, invenire volumen partis immergendæ.*

RESOLUTIO.

Cum ſit ut gravitas unius pedis cubici aquæ ad pond9 integrum ita pes cubicus unus ad volumen partis immergendæ (§. 91); tribus terminis in analogia datis, *per hypoth.* quartus per regulam trium invenitur.

E. gr. Sit gravitas corporis 3000 librarum; quia pes cubicus aquæ eſt librarum 70 (§. 64), reperietur volumen partis immergendæ pedum cubicorum $42\frac{6}{7}$.

PROBLEMA 13.

104. *Datis gravitate & volumine ſolidi ſpecifice levioris una cum gravitate fluidi ſpecifice gravioris, invenire vim, qua illud ſub hoc demerſum detinetur.*

RESOLUTIO.

Quoniam vis iſta æqualis eſt exceſſui ponderis fluidi ſub eodem volumine, quod habet ſolidum ſubmerſum, ſupra pondus hujus (§. 97),

1. ex datis volumine ſolidi & gravitate unius pedis cubici aquæ quæratur per regulam trium gravitas fluidi ſub æquali volumine.
2. Inde ſubtrahatur pondus ſolidi, ita nimirum vis quæſita relinquetur.

E. gr. Quæritur, qua vi opus ſit ad corpus 100 librarum, cujus volumen 8 pedum, ſub aquis detinendum. Quoniam pes cubicus aquæ eſt 70 librarum (§. 64); pondus aquæ ſub volumine 8 pedum eſt 560. Unde ſi ſubducatur pondus ſolidi 100, relinquitur vis ad detinendum ſolidum ſub aqua 460 librarum.

CO-

COROLLARIUM.

105. Quoniam corpus ſpecifice levius eadem vi aſcendit in fluido graviori, qua ad aſcenſum ejus impediendum opus eſt (§. 62 *Mechan.*); per præſens problema invenitur quoque vis, qua ſolidum ſpecifice levius in fluido graviori aſcendit.

PROBLEMA 14.

106. *Inſtrumentum conſtruere, quo explorare licet, quantum ſalis in aqua propoſita contineatur.*

RESOLUTIO.

1. Ex tenui lamina cuprea conſtruatur globus AB cum tubo BC ejus cavitatis, ne in aqua pura totus mergatur.
2. Granula plumbea globo AB indantur, donec inſtrumentum in D usque immergatur.
3. Pondus totius aquæ, in quo mergitur, dividatur per 99: quotus indicabit, quantum ſalis ſit in ea diſſolvendum, ut partem ponderis centeſimam abſolvat.
4. Poſtquam igitur tantum ſalis in aqua fuerit diſſolutum, inſtrumentum denuo in ea mergatur noteturque punctum E, quod hæret in ſuperficie aquæ ſalſæ. Ita nimirum conſtabit terminus immerſionis in aqua, quæ ſub volumine 100 librarum ſalis libram unam comprehendit.
5. Quodſi eodem modo inveniantur puncta alia F, G &c. quæ indicent terminos immerſionis in aqua, ſub volumine 100 librarum duas, tres, quatuor &c. libras ſalis continente; inſtrumento hoc explorare poteris, quantum ſalis in aqua data contineatur.

DEMONSTRATIO.

Quodſi enim inſtrumentum in aqua ſalſa mergatur, ſtatim apparebit, quot libræ ſalis in aqua ſalſa centum librarum contineantur. Quamobrem ſi pondus aquæ ſalſæ exploretur, per regulam trium invenitur quantitas ſalis in ea diſſoluti. *Q. e. d.*

SCHOLION I.

107. *Ut problema præſens rectius intelligatur, exemplo ſequente id illuſtrare libet. Sit gravitas aquæ puræ* 2000 *ſcrupulorum. Divide* 2000 *per* 99, *quotus* $20\frac{20}{99}$ *indicabit, quot ſcrupula ſalis in aqua diſſolvenda, ut ponderis centeſimam partem conſtituat. Divide ulterius* 2000 *per* 98, *quoti* $20\frac{40}{98}$ *duplum* $40\frac{80}{98}$ *indicat, quantum ſalis in aqua ſit diſſolvendum, ut ſit* $\frac{2}{100}$ *totius ponderis. Divide ſimiliter* 2000 *per* 97, *quoti* $20\frac{60}{97}$ *triplum* $61\frac{83}{97}$ *indicat, quantum ſalis in aqua diſſolvi debeat, ut ſit* $\frac{3}{100}$ *totius ponderis &c. Enimvero cum non ſine tædio ad ſingula diviſionum puncta invenienda aqua pura uti liceat; numerum ſequentem continuo ſubduc a proxime præcedente, reſiduum enim indicabit, quantum adhuc ſalis ſit addendum ad inveniendum punctum proxime ſequens.* E. gr. *ubi in aqua diſſolveris ſalis* $20\frac{20}{99}$ *pro inveni-*

endo puncto E: ut alterum F reperias, addenda ſunt inſuper ſcrupula $20\frac{2}{9}$ *fere, quæ eſt differentia inter* $20\frac{20}{99}$ & $40\frac{80}{98}$.

SCHOLION 2.

Fig. 14. 108. *Similia inſtrumenta ex vitro conſtrui ſolent, tubo BC in partes æquales diviſo & hermetice in C ſigillato, globo vero geminato, ad examinandam fluidorum gravitatem ſpecificam* (§. 101).

PROBLEMA 15.

109. *Data gravitate vaſis ex materia ſpecifice graviori parandi & gravitate fluidi ſpecifice levioris, determinare cavitatem, quam habere debet, ut fluido ſupernatet.*

RESOLVTIO.

Cum detur pondus fluidi ſub volumine unius pedis cubici, *per hypoth.* volumen fluidi vaſi pondere æqualis per regulam trium inveniri poteſt. Quodſi ergo cavitas paulo major fiat, vas ſub eodem volumine minus ponderis continebit, quam fluidum adeoque eodem ſpecifice levius erit (§. 5), conſequenter ipſi ſupernatabit (§. 92).

E. gr. Sit parandus globus ferreus aquæ ſupernatans, cujus pondus 30 librarum. Quia pondus unius pedis cubici eſt 70 librarum, reperietur volumen aquæ 30 librarum 728″571‴, adeoque cubus diametri ſphæræ 1392 174‴ (§. 491 *Geom.*): unde radix cubica extracta 1′1″1‴ eſt diameter ſphæræ aqueæ 30 librarum. Quodſi ergo diameter cavitatis fiat paulo major e. gr. $1\frac{1}{2}$ aut prorſus 2 pedum, eo minor ipſius pars mergetur, quo major fuerit diameter.

PROBLEMA 16.

110. *Invenire gravitatem fluidi idem cum corpore quodam ſpecifice leviori volumen habens, cujus pondus datur.*

RESOLUTIO.

1. Ponderetur corpus quodcunque ſolidum ſpecifice gravius in fluido dato, ut habeatur pondus fluidi ſub eodem volumine (§. 55).
2. Hoc corpus combinetur cum altero ſpecifice leviori, quam fluidum, & maſſa utriusque ſimul in eodem fluido ponderetur, ut habeatur pondus fluidi idem cum utraque maſſa volumen habentis (§. *cit.*).
3. Quodſi itaque ab hoc pondere ſubducas pondus fluidi primo inventum, relinquetur pondus fluidi idem cum corpore ſpecifice leviori volumen habentis.

E. gr. Sit in aqua ponderanda cera 15 librarum. Quoniam plumbum $60\frac{1}{2}$ librarum amittit in aqua $5\frac{1}{3}$; idem vero plumbum ceræ 15 librarum conjunctum amittit $21\frac{1}{3}$; reperietur pondus aquæ idem cum cera volumen habentis 16 librarum.

THEOREMA 21.

111. *Vis, quæ requiritur ad vas vacuum DFEG ad lineam AC in aquam immergendum, ad quam aqua* Fig. 15. *ple-*

plenum immergitur, æquatur vi tantundem aquæ in aëre ſuſtentanti.

DEMONSTRATIO.

Vis aquam in aëre ſuſtentans gravitati ejus æqualis eſt. Sed vis vas vacuum DFEG ad lineam AC in aquam immergens æquatur gravitati aquæ vas replentis, quia eadem ad eandem lineam AC vas immergit, *per hypoth.* Ergo hæc vis æquatur alteri, quæ aquam in vaſe contentam in aëre ſuſtentare valet.

THEOREMA 22.

112. *Vis, quæ impenditur in ſolidum ſpecifice levius ſub fluido graviori detinendum, itemque pondus a ſolido graviori in fluido leviori amiſſum, gravitati fluidi accreſcit & cum ea ponderat.*

DEMONSTRATIO.

Vis enim, quæ impenditur in ſolidum ſpecifice levius ſub fluido graviori detinendum, premit fluidum ſubjectum, adeoque perinde eſt, ac ſi maſſa tantundem premens eidem imponeretur. Sed hæc maſſa utpote unum grave cum fluido conſtituens una cum eodem ponderaret. Ergo & vis eidem æquivalens cum fluido ponderare debet. *Quod erat unum.*

Pars ponderis a ſolido ſpecifice graviori in fluido leviori amiſſum a fluido ſuſtentatur, ceu patet ex demonſtratione theorem. 13 (§. 55). Sed pondus, quod fluido incumbit, unum cum eodem totum conſtituit, adeoque perinde cum eo gravitare debet, ac ſi maſſa fluidi tantundem ponderans affunderetur. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM 1.

113. Hinc problema (§. 104) etiam experimentando reſolvere licet.

COROLLARIUM 2.

114. Liquet etiam, vim nullam perdi; ſed tantum aliorſum impendi in corporum gravitatione.

SCHOLION.

115. *Præſens theorema, ſi volupe fuerit, non minus ac præcedentia omnia experimentis facile comprobantur. Reſpondent experimenta in iſtiusmodi materiis probationibus Arithmeticis, uti jam innuimus in Arithmeticæ Elementis* (§. 116).

FINIS Hydroſtaticæ.

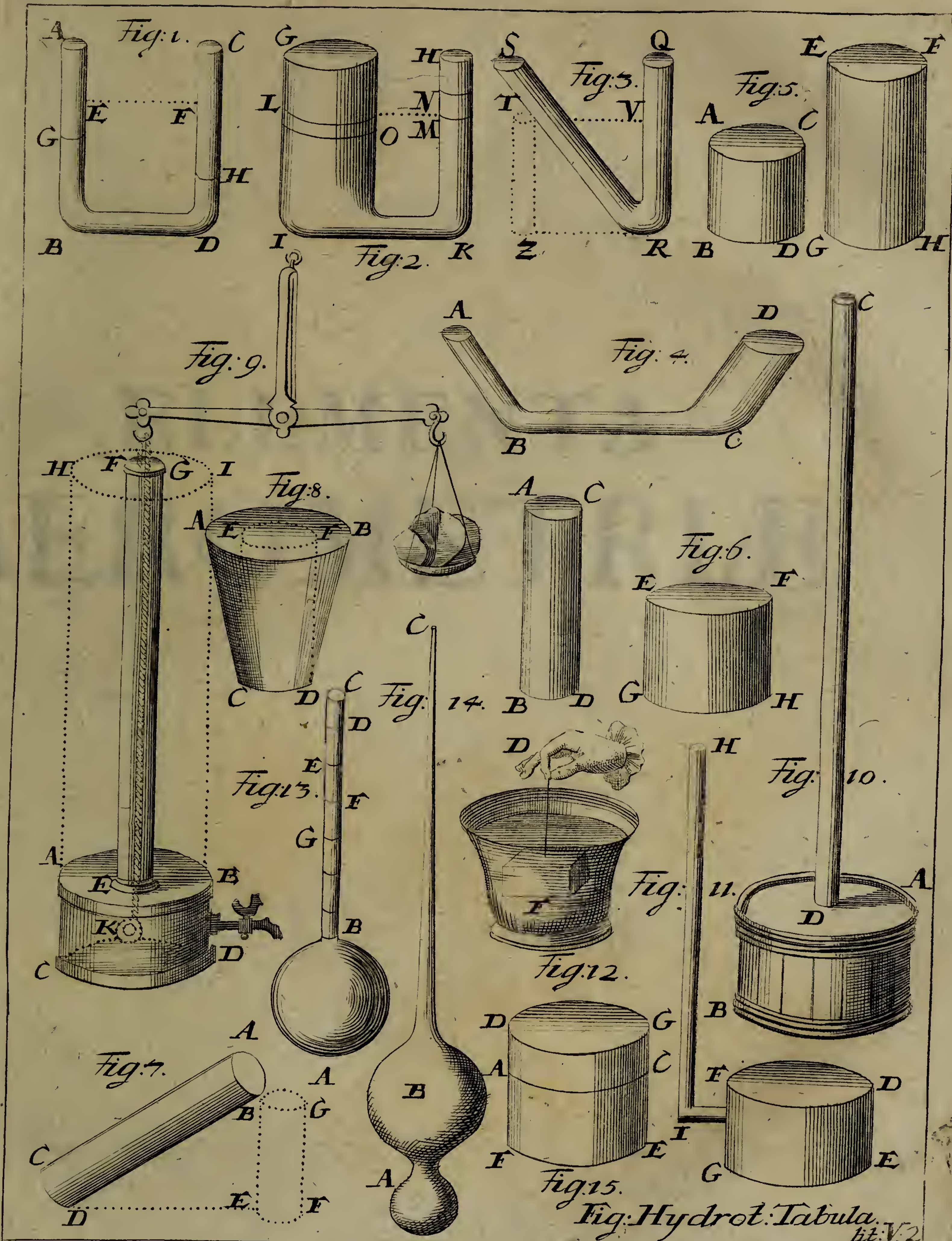


Fig: Hydrot: Tabula.

lit: V 2

ELEMENTA AEROMETRIÆ.

PRÆFATIO.

A Multo jam tempore in more poſitum, ut Phyſicæ quædam capita in numerum diſciplinarum Mathematicarum relata fuerint, poſtquam, facta ad experientias indubias Arithmeticæ, Geometriæ & Analyſeos, hoc eſt, Matheſeos puræ applicatione, formam mathematicam iis induere licuit. Non alia ſane de cauſa Hydroſtatica, Hydraulica, Optica cum Catoptrica atque Dioptrica, itemque Aſtronomia in numero iſto comparent. Quamobrem cum multa de viribus atque affectionibus aëris more Geometrarum & ex principiis Matheſeos puræ demonſtrari, demonſtrata ad varios uſus dextre applicari poſſint; anno 1709 numerum diſciplinarum Mathematicarum augere animum induxi, editis Aërometriæ Elementis, quæ anno ſequente 1710 in Tomo ſecundo Elementorum Matheſeos Germanicorum Hydroſtaticæ ſubjunxi, tanquam ejus filiam at-

que

que alumnam. Enimvero tanto majori jure locum ſemel adeptum tuetur, quod Hydraulica dudum in Matheſin recepta in multis opem ejus imploret. Quemadmodum enim Aërometriæ facem præfert Hydroſtatica; ita Aërometria Hydraulicam illuſtrat. Antequam igitur ad Aërometriam animum appellas, Hydroſtaticæ dogmatibus eundem imbuas opus eſt. Antequam ad Hydraulicam pedem promoveas, Aërometriam Tibi ſociam jungas e re tua omnino eſſe deprehendes. Jucundum vero eſt Aërometriæ ſtudium, idemque utiliſſimum, tum quod inde ratio plurimorum Naturæ phoenomenorum deſumitur, tum quod variarum machinarum ac inſtrumentorum ſtructura in ea continetur. Ut brevitati conſulatur & ſequentia antecedentibus reſpondeant; non integra exhibeo Aërometriæ elementa, quæ ante 5 fere annos a me edita eſſe modo memini, ſed quæ digniora reliquis viſa ſunt, in compendio exhibere conſtitui. Cæterum Aërometriæ Elementa, æquis harum rerum arbitris conſentientibus, iis potiſſimum commendo, quibus curæ cordique fuerit, ad experimenta applicare Matheſin. Hunc fructum cupidis polliceor, & ut eundem conſequantur ex animo apprecor.

ELE-

ELEMENTA AEROMETRIÆ.

CAPUT I. DE PRINCIPIIS AEROMETRIÆ.

DEFINITIO 1.

1. *Aerometria* eſt ſcientia metiendi aërem.

COROLLARIUM.

2. Cum metiri idem ſit ac rationem quantitatum ad aliam homogeneam datam inveſtigare (§. 21 *Geom.*); in Aërometria tradendæ ſunt leges, juxta quas omnia de aëre conceptibilia & extenſionis terminos vel intenſitatis gradus habentia accurate determinari poſſunt.

DEFINITIO 2.

3. *Aër* eſt corpus fluidum Telluri circumfuſum & ſpatia ab aliis corporibus in eadem relicta occupans, niſi impediatur.

SCHOLION.

4. *Definitionem aëris nonniſi nominalem tradere intendo. Sufficit igitur exhibuiſſe notam, aere præſente ſemper obviam, ex qua ejus præſentia certo colligi poteſt.*

DEFINITIO 3.

5. *Compreſſio* eſt coarctatio maſſæ in minus volumen per impulſum aut preſſuram alterius corporis facta.

DEFINITIO 4.

6. *Condenſatio* eſt coarctatio maſſæ in minus volumen vi frigoris facta.

DEFINITIO 5.

7. *Dilatatio* eſt expanſio maſſæ in majus volumen, quam facta compreſſione habuerat.

DEFINITIO 6.

8. *Rarefactio* eſt expanſio maſſæ in majus volumen vi caloris facta.

DEFINITIO 7.

9. *Elater aëris* eſt vis, qua vi comprimente ſublata dilatatur.

AXIOMA. 1.

10. *Quo corpus eſt gravius, eo magis premit alia ſibi ſubjecta.*

SCHOLION.

11. *Patet ex definitione gravitatis* (§. 4 Mechan.). *Corpus ſcilicet vi gravitatis nititur deorſum adeoque premit alterum deſcen-*

ſui reſiſtens. Quo majore itaque vi deorſum nititur, eo magis quoque premit alterum ſibi ſubjectum.

AXIOMA 2.

12. *Quamdiu dilatatio per elaterem facta eadem eſt, elater quoque immutatus ſit neceſſe eſt: quodſi vero elater majorem dilatationem produxerit, creviſſe; ſin minorem, decreviſſe cenſendus eſt.*

EXPERIENTIA I.

13. *Promove celeriter manum per ſpatia, quæ vacua eſſe videntur, faciem verſus; impetum quendam in eam fieri animadvertes, utut manus ipſam non contingat.*

COROLLARIUM.

14. Neceſſe eſt adeo, ut interſtitia inter corpora terreſtria, quæ vacua eſſe videntur, materia quadam repleantur, cujus partes ſint admodum ſubtiles, cum non videantur, & inconnexæ, cum motum corporum non impediant. Spatia igitur in Tellure ab aliis corporibus derelicta fluidum aliquod ſubtilisſimum occupat (§. 3 *Hydroſtat.*) hoc eſt, aër datur (§. 3).

EXPERIENTIA 2.

15. *Globo cupreo aut orichalceo ſatis capaci afferruminetur epiſtomium cum cochlea fœmina, ita ut ſyrinx mediante cochlea mari ad arbitrium ei adaptari rurſusque removeri poſſit. Quodſi ope ſyringis plus aëris in globum intrudas, eumque clauſo epiſtomio bilanci imponas, pondus ejus auctum deprehendes: ubi vero epiſtomium rurſus aperies, aërem erumpere animadvertes & globus metallicus recuperabit pondus, quod ante intruſionem aëris habuerat.*

SCHOLION.

16. *Experimentum hoc excogitavit* Gallilæus Gallilæi, *lagena vitrea uſus* (a); *ſed cum vaſa vitrea ab aere compreſſo facile nec ſine periculo adſtantium frangantur, ego metallico uti ſoleo, in gratiam curioſorum idem repetens.*

COROLLARIUM I.

17. Quoniam in globum metallicum plus aëris intrudi poteſt, quam ordinarie capit; evidens eſt, aërem in minus volumen coarctari poſſe, quam ordinarie occupat; comprimi ergo poteſt (§. 5).

COROLLARIUM 2.

18. Cum epiſtomio aperto aër rurſus egrediatur, ipſoque egreſſo pondus priſtinum recuperet globus, quod ante compreſſionem aëris in ipſa factam habuerat; certo hinc intelligitur, tantum præciſe aëris rurſus egreſſum, quantum intruſum fuerat. Aër itaque compreſſus ad priſtinam expanſionem redit, ſi vis comprimens aut expanſioni reſiſtens removeatur, adeoque elatere gaudet (§. 9).

CO-

(a) Mechan. Dialog. I. p. m. 71

COROLLARIUM 3.

19. Certum itaque compreſſionis indicium eſt, quod aër intra vas quoddam magis compreſſus ſit, quam externus, ſi; orificio ejus aperto, cæteris paribus, aëris quædam portio egredi obſervetur.

COROLLARIUM 4.

20. Denique quia pondus vaſis augetur, ſi aër intra ipſum comprimitur; maſſa aërea niſum exerceat opus eſt deorſum juxta lineas rectas ad horizontem perpendiculares (§.498 *Mechan.*). Gravis ergo exiſtit (§. 4 *Mechan.*).

COROLLARIUM 5.

21. Premit ergo corpora ſubjecta ſecundum lineas rectas ad horizontem perpendiculares (§. 173 *Mechan.*).

EXPERIENTIA 3.

22. *Quodſi veſicam aëre mediocriter repletam firmiterque conſtrictam ad ignem admoveas; ea non ſolum diſtenditur, ſed & ingenti fragore tandem diſrumpitur. Quodſi vero eum ab igne removeas, antequam diſrumpatur, ſtatim flaccida evadit.*

COROLLARIUM 1.

23. Cum intra veſicam nil niſi pauculum aëris contentum fuerit; expanſio veſicæ expanſionem aëris incluſi arguit. Aër itaque rareſit (§. 8).

COROLLARIUM 2.

24. Quia calore exſpirato veſica diſtenta rurſus flaccida fit; frigore in volumen minus rurſus coarctatur adeoque condenſatur (§.6).

EXPERIENTIA 4.

25. *Si aer in vaſe comprimatur, eius quandam portionem aperto orificio ex ipſo iterum exſpirare notabis in quacunque orificii directione.*

COROLLARIUM.

26. Elater igitur aëris nititur quaqua verſum ſecundum quamlibet directionem.

EXPERIENTIA 5.

27. *Si tubum oblongum* AB, *cujus altitudo* 32 *pedibus Rhenanis maior, in* C *epiſtomio inſtructum & verticaliter erectum aqua repleas, orificium inferius* A *in aquam immergas & aperto orificio* B *epiſtomium aperias, aqua tota cum impetu effluit: ſi vero obturato orificio* B *epiſtomium* C *recludas, aqua usque ad* D *deſcendit, ac in altitudine* 31 *pedum Rhenanorum ultra libellam aquæ in vaſe* GH *contentæ pendula hæret.* Tab. I. Fig. I.

COROLLARIUM.

28. Quoniam aqua intra tubum AB pendula aquam in vaſculo ſibi ſubjectam premit nec tamen deſcendit; neceſſe eſt, ut, ſi aqua in vaſculo contenta in iſtiusmodi columnas diviſa concipiatur, qualis eſt, quæ tubo AB ſubjacet, ſingulæ æquali vi premantur. Sed circa tubum ſuperficiei aquæ in-

cumbit aër (§. 3) eamque premit (§. 21). Columna igitur aërea a ſuperficie aquæ in vaſculo contentæ usque ad extremitatem atmoſphæræ extenſa eandem habet gravitatem cum cylindro aqueo ſuper eadem baſi, ſed altitudinis 31 pedum Rhenanorum (§.36 *Hydroſt.*).

SCHOLION.

29. *Hoc æquilibrium aëris cum aqua primus obſervavit hortulanus quidam Florentinus, aquam in antlia tractoria ultra* 18 *cubitos attolli non poſſe miratus, atque cum* Gallilæo *phænomenon inſperatum communicavit ipſe cauſam ejus ignorans* (b). *Iterarunt hoc experimentum complures, quos inter* Mariottus (c) *altitudinem aquæ in tubo pendulæ reperit* 32 *pedum Pariſienſium.* Evangeliſta Torricellius, *diſcipulus* Gallilæi, *aquæ ſubſtituit Mercurium, cujus altitudo utpote quatuordecies gravioris aqua reperitur* 28 *circiter digitorum Rhenanorum* (§. 36 Hydroſt.).

CAPUT II.

De ELATERE ET GRAVITATE AERIS.

THEOREMA I.

30. *Elater aëris inferioris æquatur ponderi totius ſuperioris ipſi incumbentis.*

DEMONSTRATIO.

Aër enim ſuperior premit inferiorem (§. 21). Elater vero æquatur ponderi prementi (§. 397 *Mechan.*). Ergo elater aëris inferioris æquatur ponderi totius ſuperioris ipſi incumbentis. *Q.e.d.*

COROLLARIUM I.

31. Quoniam pondus aëris ſuperioris inferiori incumbentis æquatur ponderi columnæ aqueæ, cujus eadem cum volumine aëris baſis, ſed altitudo 31 pedum (§. 28), vel etiam columnæ Mercuriali, cujus altitudo 28 digitorum (§. 29); elater aëris inferioris eidem columnæ aqueæ & mercuriali æquatur.

SCHOLION.

32. *Pondus hujus columnæ aqueæ vel mercurialis dicemus inpoſterum brevitatis gratia* pondus atmoſphæricum.

COROLLARIUM 2.

33. Elater aëris incluſi, ſi cætera cum ambiente externo paria ſint, æquatur

(b) Mechan. Dial. I. p. m. 15. 16.
(c) Trait. du mouvement des Eaux part. 2. diſc. I. p. 9.

tur ſimiliter ponderi totius ſuperioris incumbentis.

COROLLARIUM 3.

34. Incluſus adeo aër eadem vi premit, qua pondus atmoſphæricum.

COROLLARIUM 4.

35. Ergo etiam hic Mercurium, ad altitudinem 18 digitorum, aquam vero ad altitudinem 31 pedum in tubo vacuo ſuſpendit (§. 28. 29).

THEOREMA 2.

36. *Si vas aliquod ab aëre vacuum prope Tellurem aperiatur, aër ambiens externus extemplo in cavitatem eius ruet eamque replebit.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim aër in ſtatu compresſionis (§. 28), cumque elatere gaudeat (§. 18), ad majorem continuo expanſionem nititur (§. 9) & quidem quaquaverſum (§. 26). Quare cum intra vas vacuum niſui huic nihil reſiſtat, expanſio per cavitatem vaſis actu ſequetur (§. 62 *Mechan.*). Et quia ſi aliquod ſpatium vacuum intra cavitatem vaſis ab aëre irruente non occupatum ſupponamus, illud inſtar vaſis vacui intra aërem aperti conſiderari poteſt, aër in vas irruens etiam hoc ſpatium replere debet. Si itaque vas aliquod ab aëre vacuum prope tellurem aperiatur, aër ambiens externus extemplo in cavitatem ejus ruit eamque replet. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

36. Si ergo ſyrinx orificio alicujus vaſis firmiter inſigatur & embolus poſtea extrahatur, aër in vaſe contentus per ſiphonis cavitatem expandetur.

DEFINITIO 8.

38. *Antlia pneumatica* eſt machina, qua mediante aër ex vaſis educi poteſt.

SCHOLION.

39. *Primus antliæ pneumaticæ inventor eſt* Otto de Guericke, *Conſul Magdeburgicus, qui experimenta ſua jam ſub finem comitiorum imperialium anno* 1654 *Ratisbonæ celebratorum in præſentia Imperatoris, Electorum ac Principum quorundam iteravit* (d). *Utut vero inter exteros non deſint, qui laudem inventionis* Roberto Boylio, *experimentatori celeberrimo, tribuunt, quos inter ex Anglis* Robertus Hookius, *recenſente* Cl. Wallero (e) *& ex Gallis*, Iohannes Baptiſta du Hamel, *variis ſcriptis celebris* (f); *ipſe tamen* Boylius *pro eo, qui decet virum doctum, candore* (g) *agnoſcit, quod* Otto de Guericke *ipſum prævenerit, quodque ipſe ab iis, quæ* Caſparus Schottus *in Mechanica Hydraulico-pneumatica A.* 1657 *edita de vaſis vitreis a* Guerickio *ab aëre evacuatis publicaverat, ad ſua experimenta & antliæ pneumaticæ conſtructionem incitatus fuerit: Structuram immutavit ipſe* Guerickius (h): *alIud artificium embolum ex tra-*

(d) Vid. Præfatio ad Experimenta nova Magdeburgica.
(e) in Vita Hookii operibus ejus poſthumis præmiſſa f. 3
(f) in Philoſ. Vet. & Nov. Tom. 4. Phyſ. gener. Tract. 2. diſſert 3. c. 10. p. m. 234
(g) in præf. ad Nova Experim. Phyſ. Mech. de vi aëris elaſtica p. m. 3. (h) l. c. f.

trahendi applicuit Boylius, *quo nunc ordinarie utuntur.*

PROBLEMA I.

Tab. I. Fig. 2. 40. *Antliam pneumaticam conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Paretur cylindrus AB ex orichalco, intus cavus & ſatis capax, cujus interior ſuperficies optime polita, ut embolus DE arctiſſime ipſam undiquaque contingat, ne ulli moleculæ aëreæ inter eam & embolum locus relinquatur.

2. Embolus conſtare debet ex orbibus coriaceis firmiter ſibi mutuo appreſſis mediante cochlea orbi orichalceo E afferruminata. Corium optimum eſt bubulum, ex quo ſuccingula militum parari ſolent. Probe autem notandum eſt, corium imbibere debere oleum olivarum tertiæ parti pinguedinis ſuillæ excoctæ permixtum, ne ſucceſſu temporis indureſcat.

3. Embolo affigatur lamella ferrea dentata DC, ut ope rotulæ dentatæ manubrio NO verſato commode extrahi ac intrudi poſſit.

4. In B afferruminetur baſi cylindri tubulus BFKL cum epiſtomio GHI ex cylindro cavo HF & operculo cylindrico ſolido compoſito.

5. Denique tubulus KL in L inſtruatur cochlea, ut vaſa, quorum orificia cochleis fœminis ſeu matricibus inſtructa, ad eundem firmari poſſint. Eodem modo adaptandus eſt, quoties uſus poſtulat, catinus orichalceus PQ, cui vitra campaniformia commode imponere liceat.

Dico ex vaſis ad hanc machinam firmatis aërem educi poſſe.

DEMONSTRATIO.

Cum enim embolus CE extrahitur epiſtomio verſus antliam AB & tubulum KL aperto, aër in vaſe contentus per tubuli LKGB & cylindri AB cavitatem expanditur (§. 36). Quodſi jam epiſtomium claudatur verſus tubulum KL, ſit tamen apertum verſus antliam AB, & remoto operculo I embolus DE rurſus intrudatur, aër per epiſtomium FH extruditur, conſequenter aëris aliqua portio ex vaſe educta. Quo pluries itaque hæc operatio repetitur, eo plus aeris ex vaſe educitur. Ope adeo machinæ conſtructæ aer ex vaſis educi poteſt. *Q. e. d.*

SCHOLION I.

41. *In uſu antliæ notandum, embolum oleo olivarum illini & fundo catini orbem coriaceum bubulum (quali ad conſtructionem emboli utendum) probe madefactum & in medio perforatum applicandum eſſe, ut embolus facile extrahatur & antliam undiquaque arctiſſime contingat, vas vero evacuandum firmiter catino apprimatur.*

SCHO-

SCHOLION 2.

42. *In evacuandis vaſis rationem habendam eſſe tantum vis elaſticæ, ad quam ſolam in demonſtratione reſpeximus, experimenta probant. Aërem enim, iteratis emboli agitationibus, continuo rariorem fieri, docet expanſio veſicæ ſub campana ſuſpenſæ, firmiter conſtricto collo & nonniſi pauculo aëris intus relicto. Enimvero dilatationem tantum fieri per elaterem, nec quicquam conferre gravitatem, in Actis Lipſienſibus* (i) *ante triennium circiter experito docui: quod hic repetere juvat. Fieri curavi tubum ex lamina orichalcea cochleæ afferruminatum, ut ad antliam firmari poſſet, atque fornicem vaſis evacuandi fere attingentem. Quantum per hunc tubum aëris facta qualibet emboli agitatione ex vaſe educeretur, maxima cum circumſpectione notavi: embolo enim intruſo, donec aër in antlia contentus eandem cum externo denſitatem haberet, numeravi dentes virgæ dentatæ extra antliam conſpiciendos. Mox tubo iſto remoto, evacuationem ejusdem vaſis denuo tentavi: quam eadem prorſus ratione ut antea contingere didici. Uſus autem ſum vaſis & majoribus & minoribus eodem ſemper ſucceſſu, eſtque diameter luminis in antlia mea 4 digitorum 6 linearum, longitudo cylindri 2 pedum Rhenanorum. Quoniam vero doctiſſimis Diarii Trevolvitienſis collectoribus,* (k) *quorum erga me humanitatem ut gratus prædicem fas eſt, hoc experimentum non ſufficere viſum eſt ad vim gravitatis ab evacuatione vaſorum excludendam; ideo* (§. 47) *mox ex natura elateris id demonſtrabimus, ut in Aërometria* A. 1709 *edita. Cæterum hæc ratio eſt, cur antliæ ſitus ad horizontem inclinatus eſſe poſſit, nec opus ſit, ut, quod poſt* Guerickium *etiam* Boylius *fecit, ut ad horizontem perpendicularis fiat.*

SCHOLION 3.

43. *Aliud antliæ genus ex duplici cylindro conſtruxit experimentator induſtrius* Franciſcus Hauksbée, *cujus deſcriptionem exhibent Actorum Eruditorum collectores* (l). *Eam pro more ſuo in multis immutavit* Leupoldus *variis inventionibus mechanicis celebris* (m). *Sed cum in comprimendo aere uſus ejus ſit nullus, qui tamen in experimentis frequens eſſe ſolet, nec vaſa tam exacte evacuari poſſe videantur, quam antlia ordinaria utendo: ideo antiquum antliæ genus huic recentiori præferendum eſſe judico.*

THEOREMA 3.

44. *Aër Telluri circumfunditur, nec uno in loco altior eſſe poteſt quam in altero.*

DEMONSTRATIO.

Aut enim aër Telluri circumfunditur, aut non. Ponamus poſterius. Dabitur ergo ſuper aliqua Telluris parte ſpatium ab aëre vacuum. Jam cum aër vacuo huic contiguus exiſtat, per ſpatium illud expandetur (§. 36). Impoſſibile igitur, ut intra aërem ſit ſpatium aliquod ab aëre vacuum. Tale vero cum neceſſarium foret ob rotunditatem Telluris, niſi aër eam undiquaque ambiret; neceſſe eſt aërem Telluri circumfundi, *Quod erat unum.*

Quodſi ponamus aërem uno in loco

(i) A. 1711 menſ. Jan. p. 14.

(k) Memoires pour l' Hiſtoire des Sciences & des beaux Arts. Aout 1711 art. 120 p. 1404. (l) Supplem. Tom. V. Sect. 9. p. 403.

(m) Acta Erudit. A. 1713. p. 95.

loco eſſe altiorem, quam in altero; aër vacuo contiguus ſtatim expandetur (§.36), adeoque non quieſcet niſi undiquaque eandem habuerit altitudinem. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM 1.

45. Quare ſi cætera ſint paria, duobus corporibus eandem baſin habentibus in æqualibus a centro Terræ diſtantiis æqualia atmoſphæræ pondera incumbunt, adeoque ab aëre incumbente æqualiter premuntur (§.42 *Hydroſt*).

COROLLARIUM 2.

46. In æqualibus itaque a centro terræ diſtantiis, ſi cætera fuerint paria, aër eandem denſitatem habet, adeoque ſub æqualibus voluminibus maſſas æquales continet (§. 8 *Hydroſt.*), conſequenter æqualia volumina ejusdem gravitatis exiſtunt.

THEOREMA 4.

47. *In eodem vaſe vel etiam in vaſis communicantibus aer ubique eandem denſitatem habet, ſi cætera paria fuerint.*

DEMONSTRATIO.

Aut enim eandem habet denſitatem, aut non. Ponamus aërem in vaſe uno eſſe rariorem, in altero denſiorem. Illius ergo denſitas per preſſuram minoris ponderis producetur, hujus per preſſuram majoris. Aſt elater aëris æquatur ponderi prementi (§.397 *Mech.*). Ergo in aëre rariore minor vis elaſtica, quam in denſiore. Quare cum aer uterque vi elateris quaquaverſum ſeſe expandere nitatur (§.26); majore vi aer denſior nititur verſus rariorem, quam rarior verſus denſiorem. Ergo rarior cedet denſiori (§. 62 *Mechan.*), comprimetur ergo ab elatere denſioris (§. 5) & denſior proprio elatere dilatabitur (§. 7), nec reddetur aeri in utroque vaſe quies, niſi niſus aeris utrinque fuerit idem (§. 62 *Mechan.*), hoc eſt, niſi eandem denſitatem habuerit, *per demonſtrata.* Si igitur aer in utroque vaſe eandem denſitatem non habuerit, cæteraque paria fuerint, ad eandem ſtatim reducetur. In vaſis igitur communicantibus, adeoque multo magis in eodem, cæteris paribus, aer ubique eandem denſitatem habet. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

48. Quare ſi embolo ex antlia extracto aër ex vaſe ad ipſam firmato in cavitatem ejus ruit (§. 36); qui cavitatem antliæ replet cum eo, qui in vaſe evacuando reſiduus, denſitatem eandem habet.

COROLLARIUM 2.

49. Eſt ergo maſſa aëris intra cavitatem antliæ contenti ad maſſam aeris

ris in vaſe evacuando reſidui ut capacitas antliæ ad capacitatem vaſis (§. 17 *Hydroſt.*).

THEOREMA 5.

50. *In vaſe, quod per antliam evacuatur, ſemper eſt aer primitivus ad aerem reſiduum, ut aggregatum ex capacitate vaſis & antliæ ad eam dignitatem elevatum, cujus exponens æquatur numero agitationum emboli, ad capacitatem vaſis ſolius ad eandem dignitatem evectam.*

DEMONSTRATIO.

Dicatur aer a prima agitatione emboli reſiduus *aer reſiduus primus*; qui a ſecunda emboli agitatione reſtat, *aer reſiduus ſecundus* & ita porro.

Quoniam aer in vaſe contentus eſt ad aerem in antlia contentum ut capacitas vaſis ad capacitatem antliæ (§. 49); erit etiam aggregatum ex aere in vaſe & ex aere in antlia contento, hoc eſt aer primitivus, ad aerem in ſolo vaſe contentum, hoc eſt reſiduum primum, ut aggregatum ex capacitate vaſis & antliæ ad capacitatem vaſis ſolius (§. 181 *Arithm.*). Similiter demonſtratur, eſſe quantitatem aeris reſidui primi ad quantitatem reſidui ſecundi ut aggregatum ex capacitate vaſis & antliæ ad capacitatem vaſis ſolius; & in eadem ratione eſſe quantitatem aeris reſidui tertii &c. Ergo factum ex aere primitivo in reſiduum primum, ſecundum, tertium, quartum &c. ad factum ex aere reſiduo primo in ſecundum, tertium, quartum, quintum &c. ut factum ex capacitate vaſis & antliæ junctim toties in ſe ducta emergens, quot numerus agitationum emboli unitates continet, ad factum ex capacitate vaſis ſolius multoties itidem in ſe ducta enaſcens (§. 197 *Arithm.*) hoc eſt, ut dignitas aggregati ex capacitate vaſis & antliæ junctim, cujus exponens eſt numerus agitationum emboli, ad capacitatem vaſis ſolius ad eandem dignitatem evectam (§. 229 *Arithm.*); conſequenter aer primitivus ad reſiduum ultimum earundem dignitatum rationem habet (§. 172 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 2.

51. *Dato numero agitationum emboli in antlia factarum una cum capacitate vaſis & capacitate antliæ, invenire rationem aeris primitivi ad reſiduum.*

RESOLUTIO.

1. Ex Canone logarithmorum excerpatur logarithmus aggregati ex capacitate vaſis & capacitate antliæ una cum logarithmo capacitatis vaſis ſolius.
2. Logarithmus poſterior e priori auferatur &
3. Differentia in numerum agitatio-

tionum emboli ducatur; erit factum logarithmus, cui in tabulis reſpondet numerus indicans, quoties aer primitivus contineat reſiduum quæſitum.

E. gr. Sit capacitas antliæ 580′, capacitas vaſis 460″; erit aggregatum ex utraque 1040″. Sit numerus agitationum emboli 6; erit logarithmus rationis, quam habet aer primitivus ad reſiduum 6 (3.0170333 - 2.6627578) = 2.1656530, cui in tabulis reſpondet numerus $146\frac{4}{10}$. Eſt igitur aer primitivus ad reſiduum ut $146\frac{4}{10}$ ad 1, hoc eſt, ut 1464 ad 10 ſeu ut 732 ad 5.

DEMONSTRATIO.

Sit capacitas vaſis = v, capacitas antliæ & vaſis ſimul = a, numerus agitationum emboli = n, aer reſiduus = 1. Quoniam aer primitivus ad reſiduum ut a^n ad v^n (§. 50), erit etiam primitivus ad reſiduum ut $a^n : v^n$ ad 1 (§. 131 *Arithm.*), conſequenter ſi reſiduus 1, logarithmus primitivi eſt $n(la - lv)$ (§. 307. 309 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 3.

52. *Data capacitate vaſis evacuandi & capacitate antliæ, invenire numerum agitationum emboli ad aerem in data ratione dilatandum requiſitum.*

RESOLUTIO.

1. Excerpantur ex Canone logarithmorum logarithmi aeris primitivi, aeris reſidui, capacitatis vaſis & aggregati ex capacitate vaſis & capacitate antliæ.
2. Logarithmus aeris reſidui ſubducatur ex logarithmo aeris primitivi, ſimiliter logarithmus capacitatis vaſis auferatur ex logarithmo aggregati ex capacitate vaſis & capacitate antliæ.
3. Differentia prior dividatur per alteram. Dico, quotum eſſe numerum agitationum emboli quæſitum.

E. gr. Sit capacitas antliæ 580″, capacitas vaſis 460″, aer primitivus ad reſiduum ut 1464 ad 10, reperietur numerus agitationum emboli (3.0656530 - 10000000) : (3.0170333-2.6627578) = 2165653O : 3542755 = 6.

DEMONSTRATIO.

Sit aer primitivus p, reſiduus r, reliqua ſint ut in demonſtratione problematis præcedentis; erit

$$p : r = a^n : v^n \quad (§. 50).$$

$$lp - lr = nla - nlv \quad (§. 307. 309 \textit{ Arithm.}).$$

$$(lp - lr) : (la - lv) = n. \quad \textit{Q. e. d.}$$

PROBLEMA 4.

53. *Data ratione aeris primitivi ad reſiduum una cum capacitate vaſis & numero agitationum emboli, invenire capacitatem antliæ.*

RESOLUTIO.

Sit aer primitivus ad reſiduum = $p : r$, capacitas vaſis = v, capacitas

citas antliæ $= x$, numerus agitationum emboli $= n$; erit

$$p : r = (v + x)^n : v^n \quad (\text{§. } 50)$$

$$lp - lr = nl(v + x) - nlv \quad (\text{§. } 307. 309 \; Arithm.)$$

$$lv + (lp - lr) : n = l(v + x)$$

Inveniri adeo poteſt logarithmus aggregati ex capacitate vaſis & antliæ, conſequenter ipſum hoc aggregatum. Quare ſi hinc auferatur capacitas vaſis, relinquetur capacitas antliæ.

E. gr. Sit $p : r = 1464 : 10$, $v = 460''$, $n = 6$; erit $l(v + x) = 2.6627578 + (3.0656530 - 10000000) : 6 = 26627578 + 3542755 = 30170333$. Ergo vi Canonis $v + x = 1040''$, conſequenter $x = 580''$.

PROBLEMA 5.

54. *Invenire pondus unius pedis cubici aërei.*

RESOLUTIO.

1. Vaſis vitrei aut metallici BC ſatis capacis, figura ſphærica, collo oblongo AB & epiſtomio D præditi pondus ad bilancem exactam exploretur, dum aëre ejusdem cum ambiente externo denſitatis repletur. Quo facto
2. educatur aër (§. 40) &
3. Globi evacuati pondus denuo ad bilancem examinetur, quod
4. a pondere priore ſubductum relinquit pondus aeris educti.
5. Inveſtigetur capacitas vaſis (§. 495 *Geom.*) & ratio aeris reſidui ad primitivum (§. 51): quibus datis, volumen aeris reſidui per regulam trium innoteſcet, a capacitate vaſis ſubducendum, ut relinquatur volumen aeris educti. Quodſi antlia accurate fuerit conſtructa & tamdiu exerceatur, quamdiu aer evacuatur; volumen aeris reſidui tantillum reperietur, ut tuto negligi ipſaque capacitas vaſis pro volumine aeris aſſumi poſſit.
6. Datis adeo pondere atque volumine aeris educti per regulam trium reperietur pondus unius pedis cubici aeris (§. 93 *Mech.*).

SCHOLION.

55. *Methodo hac primum uſus* Otto de Guericke (n) *& poſt eum* Burcherus de Volder, *qui ſequentia annotavit* (o). *Pondus vaſis ſphærici vitrei aere admiſſo erat* 7 *libr.* 1 *Unc.* 2 *dr.* 48 *gr. aere educto,* 7 *libr.* 1 *Unc.* 1 *dr.* 31 *gr. aqua admiſſa* 16 *libr.* 12 *Unc.* 7 *dr.* 14 *gr. Erat igitur pondus aeris* 1 *dr.* 12 *gr. ſeu* 77 *gr. pondus aquæ* 9 *libr.* 11 *Unc.* 5 *dr.* 43 *gr. ſeu* 74743 *gr. conſequenter ratio gravitatis ſpecificæ inter aquam & aerem* $74743 : 77 = 970\frac{53}{77} : 1$. *Jam cum* Volderus *pedem cubicum aquæ deprehendiſſet* 64 *librarum, inferendo ut* 970 *ad* 1 *ita* 64 *libræ ſeu* 1024 *unc. ad numerum quartum proportionalem, per regulam trium pondus unius pedis cubici aerei* $506\frac{78}{97}$ *ſeu* 507 *gr. fere, hoc eſt*

 1 *Unc.*

(n) Experiment de Vacuo lib. 3. c. 21. f. 101. (o) in Quæſtionibus Academicis de aeris gravitate theſ. 52 p. 35 & ſeqq.

1 *Unc.* 0 *dr.* 27 *gr. reperit. Teſtatur autem, ſe uſum eſſe bilance, quæ, etiam ſi vel* 25 *aut* 30 *libræ utrique imponerentur lanci, grano uno alterove addito demtove, in hanc illamve partem manifeſte propenderaret.*

PROBLEMA 6.

56. *Data baſi columnæ atmoſphæricæ invenire pondus ejus.*

RESOLUTIO.

1. Baſis data multiplicetur per altitudinem columnæ aqueæ ipſi æquiponderantis (§. 28), ut habeatur volumen hujus columnæ.
2. Quæratur ad volumina unius pedis cubici & columnæ illius atque pondus unius pedis cubici aquæ numerus quartus proportionalis, qui erit pondus columnæ aqueæ atmoſphæricæ æquiponderantis (§. 93 *Mechan.*), hoc eſt, pondus ipſius columnæ atmoſphæricæ quæſitum.

E. gr. Sit diameter circuli 100‴, erit area 7850‴ (§. 406 *Geom.*). Quia altitudo columnæ aqueæ 3100‴ (§. 27); erit volumen ejus 24335″, conſequenter, cum 1000″ ſint 70 fere librarum, pondus ejusdem $1703\frac{45}{100}$ ſeu $1703\frac{9}{20}$ librarum. Circulus itaque, cujus diameter unius pedis, ab aëre eadem vi premitur, ac ſi pondus 1703 librarum incumberet.

COROLLARIUM.

57. Quodſi diameter ſphæræ fuerit unius pedis, baſis columnæ atmoſphæricæ incumbentis eſt circulus, cujus diameter unius pedis. Quare cum hemiſphærium inferius ab elatere aeris urgeatur, qui ponderi ejusdem columnæ æquatur (§. 31); hemiſphæria comprimuntur vi 3407 librarum.

CAPUT III.
De
COMPRESSIONE AERIS.

PROBLEMA 7.

58. *Aerem intra vas comprimere.*

RESOLUTIO.

Tab. I. Fig. 2.

1. Epiſtomio IHG reſpectu vaſis clauſo, reſpectu antliæ vero aperto, embolus ex antlia pneumatica extrahatur: quo facto aer externus in cavitatem antliæ ruet (§. 35).
2. Converſo epiſtomio, ita ut communicatio inter vas & cylindrum detur, ſuperius vero in H obturato, embolus iterum detrudatur: aer ex antlia in vas expelletur, quod cum jam aere

alio

alio ſit plenum, novum intruſum recipere nequit, niſi facta utriusque compreſſione (§ 5). Excipiet vero hoſpitio ſuo adventantem hunc hoſpitem, cum comprimi poſſit (§. 17).

Repetita igitur hac operatione, aer continuo magis magisque comprimitur. *Q. e. f.*

THEOREMA 8.

59. *Aer primitivus eſt ad aerem in vaſe ope antliæ pneumaticæ dato agitationum emboli numero compreſſum ut capacitas vaſis ad aggregatum ex capacitate vaſis & facto capacitatis antliæ in numerum agitationum emboli.*

DEMONSTRATIO.

Sit capacitas antliæ $= a$, capacitas vaſis $= v$, numerus agitationum emboli $= n$. Erit aer primitivus in antlia ad aerem in vaſe ut a ad v (§. 17 *Hydroſt.*). Incrementum igitur maſſæ in vaſe, dato numero agitationum emboli n, eſt ut na, conſequenter aer compreſſus ut $na + v$. Unde compreſſus ad primitivum ut $na + v$ ad v. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

60. Data igitur capacitate antliæ 580″ & capacitate vaſis 290, ſeu ratione illius ad hanc ut 2 ad 1, una cum numero agitationum emboli 3; reperitur ratio aeris compreſſi ad primitivum ut $6 + 1$ ad 1 ſeu ut 7 ad 1.

PROBLEMA 8.

61. *Data ratione aeris primitivi ad compreſſum una cum ratione capacitatis antliæ ad capacitatem vaſis, invenire numerum agitationum emboli ad iſtam compreſſionem efficiendam requiſitarum.*

RESOLUTIO.

Sit ratio aeris primitivi ad compreſſum $= p:c$, ratio antliæ ad vas $= a:v$, numerus agitationum emboli $= x$, erit (§. 59)

$$p:c = v:ax + v$$

$$cv = pax + pv$$

$$(cv - pv):pa = x$$

Regula. Factum ex differentia aeris primitivi a compreſſo in capacitatem vaſis dividatur per factum ex aere primitivo in capacitatem antliæ; quotus eſt numerus agitationum emboli ad iſtam compreſſionem efficiendam requiſitarum. Sit e. gr. $p = 1$, $c = 7$, $v = 1$, $a = 2$; erit $x = 6:2 = 3$.

COROLLARIUM.

62. Quodſi fiat $p = v$, erit $x = (c - v)v:av = (c - v):a$, hoc eſt, numerus agitationum emboli invenitur, ſi differentia aeris primitivi a compreſſo per capacitatem antliæ dividatur. Ita in noſtro exemplo $x = (7 - 1):2 = 3$.

PRO-

PROBLEMA 9.

63. *Data capacitate vaſis, in quo aer comprimendus, una cum ratione, quam aer primitivus ad compreſſum habere debet, & numero agitationum emboli, quibus iſta compreſſio effici jubetur, invenire capacitatem antliæ.*

RESOLUTIO.

Sit capacitas vaſis $= v$, aer primitivus $= p$, compreſſus $= c$, numerus agitationum emboli $= n$, capacitas antliæ $= x$, erit (§. 59)

$$p : c = v : nx + v$$

$$cv = pnx + pv$$

$$(cv - pv) : pn = x$$

Quodſi fiat $p = v$; erit $x = (c - v) : n$.

Regula. Factum ex differentia aeris primitivi a compreſſo in capacitatem vaſis dividatur per factum ex aere primitivo in numerum agitationum emboli compreſſionem efficientium, quotus erit capacitas antliæ quæſita. Quodſi aer primitivus fuerit ut capacitas vaſis, ejus a compreſſo differentia tantum dividenda eſt per numerum agitationum emboli.

Sit e. gr. $v = 290$, $p : c = 1 : 7$, $n = 3$; erit $x = 6.290 : 3 = 2.290 = 580$.

COROLLARIUM.

64. Eſt ergo $pn : c - p = v : x$, hoc eſt, capacitas vaſis ad capacitatem antliæ eſt in ratione compoſita aeris primitivi ad ejus a compreſſo differentiam & numeri agitationum emboli, quibus iſta compreſſio efficitur, ad unitatem.

PROBLEMA 10.

65. *Invenire, utrum aer comprimatur in ratione ponderum, nec ne.*

RESOLUTIO.

1. Aſſumatur tubus recurvus ABC, cujus brachium minus EC ſit 12 circiter digitorum, majus AB 8 circiter pedum minori parallelum.
2. Brachium minus EC hermetice ſigilletur in C, majus in A ſit apertum: utrumque in particulas æquales dividatur.
3. Pars tubi BE Mercurio repleatur, ita ut CE ſit aere primitivo plenus.
4. Hinc ulterius per orificium A ſucceſſive plus Mercurii infundatur, notenturque altitudines, ad quas in utroque brachio Mercurius ſucceſſive infuſus pertingit.

Dico, ſi ſucceſſive fuerint ſpatia in brachio minore ſuper Mercurio reciproce ut differentiæ altitudinum, ad quas in brachio majore Mercurius ſucceſſive ſubſiſtit, 28 digitis auctarum, & altitudinum, ad quas in minore Mercurius aſcen-

ſcendit, aerem comprimi in ratione ponderum. *Q. e. i.*

DEMONSTRATIO.

Etenim ab initio aer in brachio minore CE a pondere atmoſphærico comprimitur (§. 21 quod æquatur cylindro Mercuriali 28 digitos alto (§. 29). Quare cum cylindri æqualium baſium ſint ut altitudines (§. 511 *Geom.*); tum volumina aeris reducti ſunt ut altitudines ſpatiorum a Mercurio vacuorum in brachio minore EC tum volumina Mercurii in brachio majore ſunt ut altitudines, ad quas Mercurius aſcendit. In aerem vero minori brachio incluſum præter pondus atmoſphæricum volumina Mercurii gravitant, quorum altitudo eſt differentia inter altitudines, ad quas in brachio minore, & altitudines, ad quas in majore ſucceſſive pertingit (§. 34 *Hydroſt.*). Quare pondera aerem incluſum comprimentia ſunt ut differentiæ altitudinum, ad quas ſuccesſive in brachio minore Mercurius aſcendit, ab altitudinibus, ad quas in majore ſuccesſive pertingit, 28 digitis auctæ (§. 18 *Hydroſt.*). Quodſi adeo volumina aeris ſucceſſive compresſi in eadem ratione reciproca deprehendantur, aer omnino in ratione ponderum comprimitur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

66. *Mariottus* (p) notavit, Mercurium in brachio majore AB ad altitudinem 18 digitorum aſcendentem in minore ad 4 digitorum altitudinem ſubſtitiſſe. Aëris itaque volumen cum a ſolo pondere atmoſphærico præmeretur, erat 12 digitorum; aſt cum premeretur a pondere atmoſphærico & a cylindro mercuriali 14 digitorum, hoc eſt, a pondere mercuriali 42 digitorum, erat volumen aeris compreſſi 8 digitorum. Eſt vero 8 ad 12 ut 42 ad 28, nempe ut 2 ad 3. Similiter deprehendit, ſi in brachio minore Mercurius ad altitudinem 6 digitorum aſſurgat, altitudinem in majore eſſe 34. Volumen ergo aeris compreſſi eſt 6 digitorum, hoc eſt, ſubduplum ejus, quod habebat aer a ſolo pondere atmoſphærico preſſus. Aſt pondus premens eſt 28 + 28, hoc eſt, duplum ponderis atmoſphærici. Porro advertit, ſi altitudo Mercurii in brachio minore ſit 9 digitorum, altitudinem in majore eſſe 93. Eſt itaque volumen aeris compreſſi 3 digitorum hoc eſt ſubquadruplum ejus, quod habebat a ſolo pondere atmoſphærico compreſſus. Sed pondus premens tum eſt 84 + 28, hoc eſt, quadruplum ponderis atmoſphærici. Evidens ergo per experimentum *Mariotti*, volumina aeris compreſſi eſſe reciproce ut pondera comprimentia. Tab. I. Fig. 4.

(p) Eſſay de la Nature de l' Air p. 17 & ſeqq.

SCHOLION 1.

67. *Idem experimentum ſuccedit, ſi diameter brachii minoris CE multo major fuerit diametro minoris AB* (§. 34 Hydroſt.) *: curandum tamen, ut amplitudo illius ſit uniformis, cum in demonſtratione ſupponamus, partes quantaslibet tubi CE eſſe cylindros æqualium baſium.*

SCHOLION 2.

68. *Probe autem notandum eſt, præter pondera comprimentia in voluminibus aëris, quæ inter ſe comparantur, cætera omnia paria eſſe debere, cavendumque, ne eandem compreſſionis legem ad diverſa aëris volumina applicemus, in quibus præter pondera comprimentia aliorum quoque aërem alterantium datur diſparitas: quoniam hoc in caſu fieri poteſt, ut elateris in duobus voluminibus æqualibus atque ejusdem denſitatis vires ſint inæquales, adeoque & pondera compreſſionem aeris in utroque efficientia ſint inæqualia* (§. 397 Mech.), *conſequenter & duo volumina aeris æqualia ab iisdem ponderibus inæqualiter comprimantur. E. gr. Ponamus duo volumina aerea, in quibus ab initio cætera omnia paria; evidens eſt, quod paria pondera ſuſtentare debeant. Ponamus porro alterum volumen actioni caloris exponi: rarefiet igitur* (§. 23) *adeoque pondus premens propellet. Ut itaque aer ad priſtinum volumen reducatur, majus imponendum erit pondus, quam quod dilatato incumbit. Ecce tibi duo volumina aeris inter ſe æqualia, cumque ab initio eandem denſitatem habuerint,* per hypoth. *ejusdem denſitatis, quæ tamen inæqualia pondera comprimentia ſuſtinent.*

SCHOLION 3.

69. *Vana vero eſt objectio, quod admiſſa hac compreſſionis lege ſequatur, aerem eo usque comprimi poſſe, ut ſpatium occupet infin te parvum ejus reſpectu, quod ante compreſ ſionem obtinuerat, pondere ſcilicet in infin tum aucto. Nam ubi ad ſummum compreſ ſionis gradum pertingit, ponderi quantocun que prementi reſiſtit, conſequenter vi reſiſten infinitæ æquipollet. Nec ideo vis elaſtica aer in ſtatu ſummæ compreſſionis viribus infinit variis æquatur* (§. 397 Mechan.) *; ſed mini mo eorum, a quibus maxima compreſſio pro ficiſci valet. Eſt enim vis minor pars majo ris* (§. 18 Arithm.). *Quamobrem ſi vis ela ſtica aeris in ſtatu ſummæ compreſſionis & v minori, & majori æqualis eſſet; pars toti æ qualis foret: id quod abſurdum* (§. 76 A rithm.). *Cum adeo vis elaſtica in ſtatu ſum mæ compreſſionis infinita non ſit, explicandun eſt, quomodo vi reſiſtendi infinitæ æquipolleat. Scilicet ſi majus pondus aeri incumbere ſup ponamus, quam ad ſummam compreſſionen efficiendam ſufficit; exceſſus ponderis non am plius ad comprimendum aerem, ſed ad com preſſum loco pellendum impenditur. Ut igi tur non expellatur, corpora aerem compreſſum ambientia vi reſiſtendi prædita eſſe debent, qua toti ponderi incumbenti æquatur. Utut enim pondus incumbens non omnem vim, qua premit, ad aerem compreſſum expellendum adhibeat; corpora tamen motum impedientia & vi elaſtica aeris impreſſi & vi eidem impreſſa urgentur, quæ ſimul ſumtæ vim ponderis prementis adæquant.*

SCHOLION 4.

70. *Idem experimentum cum ſucceſſu repetierunt* Robertus Boyle (p) & Amonton (q), *hicque in voluminibus aeris majoribus,*

THEOREMA 9.

71. *Elater aeris compreſſi eſt ad ela-*

(q) in defenſione doctrinæ de elatere & gravitate aeris contra Linum part. 2. c. 5. p. m. 42 & ſeqq.

(r) Memoires de l' Academie Royale des Sciences A. 1705 p. m. 155 & ſeqq.

*laterem dilatati uti reciproce volu-
nen dilatati ad volumen compreſſi.*

DEMONSTRATIO.

Elater aeris magis compreſſi eſt
d elaterem minus compreſſi ut
ondus iſti incumbens ad pondus
uic impoſitum (§. 397 *Mechan.*).
nimvero in ratione horum pon-
erum eſt quoque reciproce vo-
ımen aeris minus compreſſi ad
olumen aeris magis compresſi (§.
). Ergo & elater magis com-
resſi eſt ad elaterem minus com-
resſi ſeu dilatati uti reciproce vo-
ımen dilatati ad volumen com-
resſi (§. 156 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

72. Elater igitur aeris magis com-
eſſi fortior eſt, quam elater minus
ompreſſi.

THEOREMA 10.

73. *Elater aeris magis compreſſi
t ad elaterem minus compreſſi, cæ-
ris paribus, ut maſſa aeris magis
mpreſſi ad maſſam aeris minus com-
eſſi ſub eodem volumine contenti.*

DEMONSTRATIO.

Si aer comprimitur in ſpatium
bduplum, ſubtriplum, ſubquadru-
um &c. erit aeris primitivi du-
us, triplus, quadruplus &c. in
atio ſimplici. Aſt in ſpatium
bduplum a duplo; in ſubtriplum
triplo; in ſubquadruplum a qua-
uplo &c. pondere comprimitur
(§. 66). Ergo in æqualibus volu-
minibus maſſæ aeris diverſimode
compresſi in ratione ponderum
comprimentium exiſtunt, conſe-
quenter cum in eadem ratione ſit
elater aeris magis & minus com-
presſi (§. 397 *Mech.*); elater aeris
magis compresſi ad elaterem mi-
nus compresſi eſt ut maſſa illius ad
maſſam hujus ſub æquali volumine
(§. 156 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA II.

74. *Data ratione voluminis, quod
replet aer a ſolo pondere atmoſphæ-
rico preſſus, ad ſpatium, in quod re-
digitur ulterius compreſſus, deter-
minare vim elaſticam compresſi.*

RESOLUTIO.

Cum elater aeris a ſolo pondere
atmoſphærico preſſus æquetur
ponderi columnæ mercurialis ean-
dem cum volumine aeris baſin, ſed
altitudinem 28 digitorum habentis
(§. 29); ſi ad volumen compresſi,
volumen nondum compres ſi &
pondus iſtius columnæ mercuria-
lis quæratur numerus quartus pro-
portionalis, deſignabit is quantita-
tem vis elaſticæ in aere compreſ-
ſo (§. 71).

COROLLARIUM.

75. Quodſi pondus columnæ mer-
curialis iſtius a quantitate vis elaſticæ
inventa ſubducatur; relinquitur vis e-

lateris, qua reſiſtentiam ponderis atmoſphærici ſuperat.

PROBLEMA 12.

76. *Dato effectu, quem producit aër a ſolo pondere atmoſphærico preſſus, aut in certo compreſſionis gradu, invenire effectum, quem producturus eſt in alio quocunque compresſionis gradu.*

RESOLUTIO.

Cum effectus ſint viribus productricibus proportionales (§. 24 *Mechan.*), vires vero productrices in noſtro caſu ſint reciproce ut volumina in diverſis compreſſionis gradibus (§. 71); ſi effectus, quem elater aëris in certo compreſſionis gradu producit, detur, effectus in alio quocunque producendus invenietur inferendo: ut volumen aëris magis compresſi ad volumen minus compresſi ita effectus ab hoc producendus ad effectum illius.

SCHOLION.

77. *Idem problema quoque ſolvitur per analogiam theor.* 6. (§. 73).

PROBLEMA 13.

78. *Dato effectu, quem producit aër a ſolo pondere atmoſphærico preſſus, determinare alium compreſſionis gradum, in quo idem producat intra atmoſphæram effectum quemcunque maiorem datum.*

RESOLUTIO.

Sit effectus minor $= a$, major $= b$, volumen aëris minus compreſſi $= c$, volumen magis compresſi $= x$. Cum alter effectus intra atmoſphæram reſiſtentem ſit producendus & integer tamen deſideretur, quærenda erit compreſſio, quæ in vacuo effectum produceret æqualem aggregato ex effectu deſiderato & effectu, quem aër a ſolo pondere atmoſphærico preſſus in vacuo produceret. Erit adeo effectus ab aëre compreſſo producendus $= a + b$, conſequenter $a + b : a = c : x$, hoc eſt, ut aggregatum ex effectu aeris a ſolo pondere atmoſphærico presſi & effectu ab aere in quæſito compreſſionis gradu intra atmoſphæram producendo ad effectum aeris a ſolo pondere atmoſphærico preſſi, ita volumen aeris a ſolo pondere atmoſphærico presſi ad volumen aeris in quæſito compresſionis gradu: quod adeo per regulam trium invenitur.

SCHOLION.

79. *Eodem modo problema reſolvitur ope theorematis ſexti* (§. 73).

CA-

CAPUT IV.

DE ÆQUILIBRIO AERIS CUM ALIIS FLUIDIS SPECIFICE GRAVIORIBUS.

DEFINITIO 9.

80. Per *Tubum Torricellianum* intelligo tubum vitreum AB Mercurio repletum, cujus oſculum ſuperius A hermetice ſigillatum, inferius B ſtagnanti in vaſculo CD Mercurio immerſum.

SCHOLION.

81. *Vocatur iſtiusmodi tubus* Torricellianus *ab inventore* Torricellio (§. 29).

DEFINITIO 10.

82. *Barometrum* eſt inſtrumentum, quo gravitatem aeris metiri licet. *Baroſcopium* vero eſt inſtrumentum, quod variationes gravitatis aeris confuſe indicat.

SCHOLION.

83. *Vulgo pro ſynonymis habent has voces; ſed mihi e re eſſe videtur eas diſtinguere, cum aliud utique ſit ſaltem cognoſcere, aerem hoc tempore eſſe graviorem, quam altero; aliud vero ſcire, quoties gravitas atmoſphæræ hac die ſuperet gravitatem illius anteriorem; poſterius vero conſtare debet, ſi gravitatem aeris metiaris* (§. 21 Geom.).

THEOREMA 11.

84. *In tubo Torricelliano major columna Mercurii ſuſpenditur in locis profundioribus, quam in altioribus.*

DEMONSTRATIO.

Columna Mercurii ſuſpenſa æquatur columnæ aereæ, cujus eadem cum iſta baſis, ſed altitudo a ſuperficie Mercurii in vaſculo ſtagnantis usque ad extremitatem atmoſphæræ exporrigitur (§. 36 *Hydroſt.*). In locis vero altioribus columnæ aereæ altitudo minor, quam in profundioribus, adeoque & ipſa columna in his gravior, quam in iſtis, conſequenter minor columna Mercurii columnæ aereæ in locis altioribus æquiponderat, quam in profundioribus. *Q. e. d.*

SCHOLION.

85. *Veritatem hujus theorematis experientia confirmarunt plurimi. Primus de eo cogitavit* Paſcalius, *qui phænomena tubi Torricelliani maxima cum ſolertia ſcrutatus eſt in Tractatu de æquilibrio liquorum.*

THEOREMA 12.

86. *Si in tubo Torricelliano aeris quædam quantitas ſuper Mercurio, & in genere in vaſe quocunque, cujus orificium apertum fluido immer-*

ſum ſuper fluido relinquatur; Mercurius vel fluidum quodcunque alterum ad minorem altitudinem ſuſpendetur, quam ſi vacuus fuerit, & pondus fluidi ſuſpenſi æquatur differentiæ elateris aeris incluſi a pondere atmoſphærico.

DEMONSTRATIO.

Cum ab initio aeris incluſi elater ſolus ponderi atmoſphærico æquetur (§. 33); Mercurius vi gravitatis propriæ deſcendere incipit. Aſt dum deſcendit, aer incluſus dilatatur (§. 36) adeoque elater ejus minori, quam ponderi atmoſphærico æquilibratur (§. 71). Tantum igitur Mercurii aut fluidi cujuscunque alterius in tubo vel vaſe remanere debet, quantum differentiæ elateris aeris incluſi a pondere atmoſphærico æquilibratur, conſequenter Mercurius ad minorem altitudinem ſuſpenditur, quam ſi tubus ab aere vacuus extitiſſet. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

87. Aer igitur in tubo Torricelliano incluſus rarior ambiente externo & ejus elater æquatur differentiæ ponderis Mercurii ſuſpenſi a pondere atmoſphærico.

COROLLARIUM 2.

88. Hinc liquet, ſi vas exiguo orificio inſtructum, nec aqua aut alterius generis liquore prorſus plenum, digito ad orificium applicato, ita invertatur, ut centrum orificii ſit in plano verticali, cur remoto digito ab initio quædam liquoris gutta effluat, reliquus vero intus remaneat: item cur idem eveniat in vaſe quocunque alio quantumvis amplo, ſi orificio folium chartaceum imponas, dum illud invertis.

PROBLEMA 14.

89. *Data ratione altitudinis fluidi in tubo ab omni aere prorſus vacuo ad altitudinem, qua gaudet, ſi tubi aliqua pars aere repleatur, una cum volumine aeris dilatati, invenire volumen aeris primitivi.*

RESOLUTIO.

Cum elater aeris primitivi æquetur ponderi fluidi in tubo vacuo ſuſpenſi (§. 33) adeoque elater dilatati differentiæ ponderis fluidi ſuſpenſi a pondere atmoſphærico (§. 87), pondera vero fluidi ſint ut volumina (§. 93 *Mechan.*), volumina ut altitudines (§. 511 *Geom.*); erit ut altitudo fluidi in tubo vacuo ad differentiam altitudinis in tubo non vacuo a priore, ita volumen aeris dilatati ad volumen primitivi (§. 71): quod adeo per regulam trium invenitur. *Q. e. d.*

E. gr. Sit altitudo fluidi in tubo vacuo 28, in tubo non vacuo 14, volumen aeris dilatati 25, erit volumen primitivi $(28 - 14)\ 25 : 28 = 350 : 28 = 12\frac{1}{2}$.

$= 12\frac{1}{2}$. Quæ prorſus conſona ſunt experimento *Mariotti* (s).

PROBLEMA 15.

90. *Data altitudine fluidi in tubo vacuo & ratione voluminis aeris primitivi ad volumen dilatati, invenire altitudinem ejusdem fluidi in tubo non vacuo.*

RESOLUTIO.

Sit altitudo fluidi in tubo vacuo $= a$, altitudo in non vacuo $= x$, volumen aeris primitivi $= b$, dilatati $= c$, erit (§. 89)

$$a : a - x = c : b$$

$$x : a = c - b : c \text{ (§.183 } Arithm.\text{)}$$

Inveniri adeo debet numerus quartus proportionalis ad volumen aeris dilatati, differentiam voluminis compreſſi a volumine dilatati & altitudinem in tubo vacuo.

Sit e. gr. $a = 28$, $b = 12\frac{1}{2}$, $c = 25$; erit $x = (25 - 12\frac{1}{2})\, 28 : 25 = 350 : 25 = 14$.

PROBLEMA 16.

91. *Datis altitudine fluidi in tubo vacuo & volumine aeris primitivi, invenire volumen dilatati & altitudinem fluidi in tubo non vacuo datæ altitudinis.*

RESOLUTIO.

Sit altitudo fluidi in tubo vacuo $= m$, altitudo tubi ultra libellam fluidi in vaſe ſtagnantis $= a$, altitudo voluminis aëris primitivi $= b$, dilatati $= x$, erit altitudo fluidi in tubo non vacuo $= a - x$, conſequenter

$$m : m - a + x = x : b \text{ (§.89).}$$

$$bm = mx - ax + x^2$$

hoc eſt, ſi fiat $a - m = d$

$$bm = x^2 - dx$$

$$\frac{1}{4}d^2 \quad \frac{1}{4}d^2$$

$$\frac{1}{4}d^2 + bm = x^2 - dx + \frac{1}{4}d^2$$

Ergo $\frac{1}{2}d + \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + bm)} = x$.

Regula. 1. Quadrato ſemidifferentiæ altitudinis fluidi in tubo vacuo ab altitudine tubi ultra libellam fluidi in vaſe ſtagnantis addatur factum ex eadem altitudine fluidi in altitudinem voluminis aeris primitivi. 2. Ex facto extrahatur radix quadrata, & 3. huic addatur ſemidifferentia paulo ante memorata. Erit aggregatum altitudo voluminis aeris dilatati. E. gr. ſit $a = 39$, $m = 28$, erit $d = 11$, $\frac{1}{2}d = 5\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}dd = \frac{121}{4}$. Sit $b = 12\frac{1}{2}$, erit $bm = 350$, adeoque $\frac{1}{4}dd + bm = \frac{121}{4} + 350 = \frac{1521}{4}$, conſequenter $\sqrt{(\frac{1}{4}dd + bm)} = \frac{39}{2} = 19\frac{1}{2}$: unde $x = 5\frac{1}{2} + 19\frac{1}{2} = 25$.

PROBLEMA 17.

92. *Data altitudine fluidi in tubo vacuo, altitudine tubi ultra libellam fluidi in vaſculo ſtagnantis & altitudine*

(s) Eſſay de la nature de l'air p. 23 & ſeqq.

tudine fluidi in tubo non vacuo, invenire altitudinem voluminis aëris primitivi.

RESOLUTIO.

Sit altitudo fluidi in tubo vacuo $= m$, in tubo non vacuo $= n$, altitudo tubi $= a$, altitudo aëris primitivi $= x$, erit altitudo dilatati $= a - n$, conſequenter (§. 89)

$$m : m - n = a - n : x$$

Invenietur adeo x, quærendo ad altitudinem fluidi in tubo vacuo, differentiam altitudinis in non vacuo a priore & differentiam altitudinis fluidi in tubo non vacuo ab integra altitudine tubi numerum quartum proportionalem.

Sit e. gr. $m = 28$, $n = 14$, $a = 39$; erit $x = (39 - 14)(28 - 14) : 28 = (25 . 14) : 28 = 350 : 28 = 12\frac{1}{2}$.

PROBLEMA 18.

93. *Determinare quantitatem liquoris effluentis, ſi vas exigui orificii non plenum invertatur.*

RESOLUTIO.

1. Inveniatur altitudo, ad quem liquor datus in vaſe vacuo ab aëre ſuſtentatur (§. 36 *Hydroſt.*).
2. Quoniam porro datur altitudo fluidi in vaſe atque altitudo totius vaſis, *per hypoth.* reperietur volumen aëris dilatati (§. 91). Unde ſi
3. Subducatur volumen aëris primitivi, relinquetur quantitas liquoris expellendi, ſi vas invertatur (§. 88).

THEOREMA 11.

94. *Si vaſis ab aëre prorſus evacuati, cujus altitudo non excedit altitudinem columnæ liquoris atmoſphæræ æquiponderantis, orificium intra aquam aut alterius generis fluidum demergatur, demerſumque aperiatur, liquor aſcendens totum replebit: (aſt ſi non prorſus evacuatum fuerit, minus ſpatium liquor aſcendens occupabit, quam aëris primitivi educti quantitas repleverat.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim liquor undiquaque circa orificium vaſis demerſum a pondere atmoſphæræ prematur (§. 21); ſub orificio autem vaſis aperto nulla ſit aëris preſſura, quia ab aëre prorſus vacuum ſupponitur; tantum liquoris intra vas aſcendere debet, quantum ſufficit ad preſſuram ei æqualem efficiendam, quæ a pondere atmoſphærico efficitur (§. 62 *Mechan.*). Sed vaſis altitudo liquoris atmoſphæræ æquiponderantis altitudinem non excedit, *per hypoth.* Ergo preſſura æqualis preſſuræ ponderis atmoſphærici a liquore intra vas contento effici nequit, niſi totum repleatur. Totum ergo replebitur. *Quod erat unum.*

Quod-

Quodſi quædam aëris portio reſidua fuerit, ea ſuper liquore ingrediente conſtituta rarior ſit neceſſe eſt quam aër primitivus (§. 87). Majus ergo ſpatium occupat, quam cum primitivo adhuc jungeretur (§. 10 *Hydroſt.*). Quoniam adeo nonniſi ſpatium reliquum a liquore occupatur, evidens eſt, liquorem aſcendentem minus ſpatium vaſis replere, quam aëris primitivi educti quantitas repleverat. *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

95. Schottus *autor eſt* (t), *cum Herbipoli experimentum ſæpius iteraretur, rem nunquam eo adduci potuiſſe, ut etiam minore vaſe adhibito omnem excluderent aerem. Equidem cum aqua in vas irrumpens ſpumeſcat, ipſe id indicium irruentis aëris pronunciat, ignarus unde adveniat aut oriatur ; alii rectius ab expanſione aëris intra aquam latentis idem phænomenon deducunt, atque hinc aëris ſuper liquore conſtituti originem derivant. Enimvero quemadmodum forte negari nequit, quod hac ratione aer in vaſe reſiduus aliquod capiat incrementum, ita rationi conſentaneum videtur, non omnem aerem ope antliæ ex vaſis educi, quia aer ad ſummum expanſionis gradum perductus non amplius evacuatur, moleculis paucis diſperſis æther i ſubtiliori & leviori innatantibus, quemadmodum maſſulæ metallicæ in fluidis ſpecifice levioribus natare ſolent, ut taceam maſſulas aeeas, quæ ab eminentiolis in ſuperficie vitri non ſecus ac aliorum fluidorum guttulæ fulciuntur. Sæpius tamen diverſo tempore diverſis quoque vaſis repetito experimento didici, perexiguum eſſe aeris, quod ſuper liquore conſtitutum deprehenditur, vaſe ſumma cum diligentia evacuato.*

PROBLEMA 19.

96. *Data altitudine vaſis evacuati & altitudine liquoris in ipſum ingreſſi, invenire volumen aëris primitivi educti.*

RESOLUTIO.

1. Inveniatur altitudo, ad quam liquor datus in vaſe vacuo ab aëre ſuſtentatur (§. 36 *Hydroſt.*).
2. Quoniam porro datur altitudo vaſis evacuati & altitudo liquoris ipſum ingreſſi, invenietur volumen aeris primitivi (§. 92).

COROLLARIUM.

97. Quodſi quantitas aëris educti quæratur per probl. præſ. eademque adhuc alia ratione inveniatur (§. 51), atque eadem utrobique reperiatur ; certum id erit indicium, nihil aëris ex aqua irruente in ſummitatem vaſis aſcendiſſe.

SCHOLION.

98. *Dubito tamen, num hæ ſubtilitates in praxi ſatis diſcerni queant.*

PROBLEMA 20.

99. *Si vas quoddam* ABCD *aperto orificio* CD *ſub aqua aut alio liquore perpendiculariter demergatur, quo profundius mergitur, eo magis aër in eodem comprimitur.* Tab. I. Fig. 6.

Ccc cc *DE-*

(t) in Techn. curioſa lib. I. c. 3. p. 14.

DEMONSTRATIO.

Cum enim aër aqua aliisque fluidis levior exiſtat (§. 55), ſi vas AB CD perpendiculariter demergitur, ex eodem egredi nequit, quia in aqua deſcendere deberet, quod fieri nequit (§. 98 *Hydroſt.*). Jam elater aëris incluſi aquam ſubjectam eadem vi premit, qua pondus atmoſphæricum (§. 33), aqua vero in eadem libella circa orificium vaſis præter pondus atmoſphæricum etiam aqua ſuper ea in vaſe ſtagnante premitur. Magis ergo premitur circa orificium vaſis CD, quam ſub eodem, conſequenter cum aër intra vas adhuc compreſſibilis exiſtat (§. 17) & in ratione ponderum compreſſionem patiatur (§. 66); aliqua liquoris quantitas intra vas aſcendere debet, eoque major quo profundius mergitur. *Q. e. d.*

SCHOLION.

100. *Veritatem theorematis experientia confirmat. Inprimis huc pertinent phænomena campanæ urinatoriæ a* Sturmio (u) *enarrata & experimento illuſtrata.*

THEOREMA 12.

Tab. I. Fig. 6. 101. *Iisdem poſitis, quæ in propoſitione præcedente, elater aëris in vaſe* ABCD *compreſſi, una cum pondere liquoris in ipſum ingreſſi æquatur aggregato ex pondere atmoſphæræ & pondere columnæ ejusdem fluidi, quæ eandem cum fluido ultra libellam orificii* CD *in vaſe* FG *ſtagnante altitudinem habet.*

DEMONSTRATIO.

Aër in vaſe ABCD adhuc compresſibilis exiſtit (§. 17): tamdiu itaque vi prementi cedit donec eadem in fluidum ſub orificio CD preſſura efficitur, quam circumcirca efficit aggregatum ex pondere atmoſphærico & columna fluidi eandem cum vaſe baſin eandemque cum fluido ultra libellam orificii vaſis CD in vaſe FG ſtagnante altitudinem habente (§. 93 *Mech.*). Sed preſſura in aquam ſub orificio CD fit ab elatere aëris in vaſe AB CD compreſſi & pondere fluidi intrantis (§. 34 & 10). Quare elater aëris in vaſe ABCD compresſi una cum pondere fluidi intrantis æquatur &c. *Q. e. d.*

PROBLEMA 21.

102. *Data gravitate fluidi ultra libellam orificii vaſis CD conſiſtentis una cum volumine ejus & volumine aëris primitivi cavitatem vaſis* AB CD *implentis, invenire volumen aëris compresſi & fluidi in vas intrantis.*

RESOLUTIO.

Sit gravitas fluidi $= g$, ejus volumen $= c$, pondus atmoſphæricum

(u) Colleg. Curioſ. part. I. Tent. I. & ſeqq.

cum $=a$, volumen aeris primitivi $= b$, volumen fluidi in vas aſcendentis $= x$, erit volumen compreſsi $= b - x$. Jam cum elater aeris primitivi æquetur ponderi atmoſphærico (§. 33), reperietur elater aeris compreſsi $= ab:(b-x)$ (§. 71). Et quoniam gravitates corporum homogeneorum ſunt ut volumina (§. 93 *Mechan.*); reperietur gravitas fluidi in vas aſcendentis $= gx:c$. Habemus ergo

$$ab:(b-x)+gx:c = g+a \text{ (§. 101).}$$

$$abc+bgx-gx^2 = bgc+abc-gcx-acx$$

$$x^2-bx-cx-acx:g = -bc$$

hoc eſt; ſi fiat $b+c+ac:g = d$

$$x^2-dx = -bc$$

$$\tfrac{1}{4}dd \quad \tfrac{1}{4}dd$$

$$x^2-dx+\tfrac{1}{4}dd = \tfrac{1}{4}dd-bc$$

$$\tfrac{1}{2}d-x = \sqrt{(\tfrac{1}{4}dd-bc)}$$

$$x = \tfrac{1}{2}d-\sqrt{(\tfrac{1}{4}dd-bc)}$$

Regula. 1. Aggregato ex volumine aëris primitivi & volumine fluidi ſuper libellam orificii vaſis ſtagnantis addatur numerus quartus proportionalis ad gravitatem hujus fluidi, pondus atmoſphæricum & volumen ejusdem fluidi. 2. Ab hujus novæ ſemiſummæ quadrato ſubtrahatur factum ex volumine aeris primitivi in volumen fluidi ultra libellam orificii vaſis ſtagnantis. 3. Ex reſiduo extrahatur radix quadrata, quæ ſi 4. a ſemiſumma ſupra inventa ſubtrahatur, relinquetur volumen fluidi in vas aſcendentis.

COROLLARIUM 1.

103. Cum pondus liquoris vas intrantis ſit $gx:c$; idem ſubſtituto valore ipſius x, reperitur $=[\tfrac{1}{2}d-\sqrt{(\tfrac{1}{4}dd-bc)}]g:c$.

COROLLARIUM 2.

104. Et quia elater aëris in vaſe compreſſi eſt $ab:(b-x)$, idem ſubſtituto valore ipſius x, reperitur $= ab:[b-\tfrac{1}{2}d+\sqrt{(\tfrac{1}{4}dd-bc)}]$.

PROBLEMA 22.

105. *Data profunditate vaſis ſeu altitudine aeris primitivi in ejus cavitate contenti, invenire profunditatem, ad quam intra fluidum datæ gravitatis orificium* CD *deprimendum, ut volumen aeris compreſſi habeat ad volumen aeris primitivi rationem datam.* Tab. I. Fig. 6.

RESOLUTIO.

Sit altitudo voluminis aeris primitivi $=b$, pondus atmoſphæricum $=a$, gravitas fluidi $= g$, ejus altitudo ſuper libella orificii $= x$, altitudo aeris compreſsi $=c$, erit altitudo liquoris vas intrantis $= b-c$. Cum elater aeris primitivi æquetur ponderi atmoſphærico (§. 33); reperietur elater compreſſi $= ab : c$ (§. 71). Et quoniam

 gra-

gravitates corporum homogeneorum ſunt ut volumina (§. 93 *Mechan.*), erit gravitas fluidi in vas aſcendentis $= (bg - gc) : x$. Ergo

$$ab : c + (bg - gc) : x = a + g$$

$$abx + bgc - gc^2 = acx + gcx$$

$$bgc - gc^2 = acx + gcx - abx$$

$$(bgc - gc^2) : (ac + gc - ab) = x$$

Theorema. Ut differentia facti ex pondere atmoſphærico in altitudinem aëris primitivi a facto ex aggregato ponderis atmoſphærici & gravitatis fluidi in altitudinem aeris compreſſi ad gravitatem fluidi, ita differentia quadrati altitudinis aëris compreſſi a facto ex eadem in altitudinem primitivi ad profunditatem orificii CD vaſis ſub fluido demerſi.

SCHOLION.

106. *Hactenus ſuppoſuimus, aerem, dum comprimitur, cum ambiente externo cætera paria habere. Enimvero quando aqua frigidior aere ambiente, aer in vaſe condenſatur (§. 24). Diſpiciendum itaque, quamnam mutationem frigus inducat.*

PROBLEMA 23.

107. *Datis capacitate vaſis, hoc eſt volumine aeris primitivi, volumine fluidi demerſum ingreſſi & volumine fluidi ſupra orificii vaſis libellam ſtagnantis, una cum pondere atmoſphærico, invenire rationem voluminis aeris compreſſi tantum ad volumen compreſſi & condenſati ſimul.*

RESOLUTIO.

Ex datis inveniri poteſt volumen aeris compreſſi (§. 102) &, ſi volumen fluidi vas ingreſſi a volumine aeris primitivi ſubducitur, manifeſtum eſt, relinqui volumen aeris compreſſi & condenſati ſimul. Cum igitur in numeris habeatur tam volumen aeris compreſſi tantum, quam volumen aeris & compreſſi & condenſati, illius ad hoc ratio latere nequit. Q. e. d.

COROLLARIUM 1.

108. Quodſi volumen aëris compreſſi & condenſati ſubtrahatur ex volumine aëris compreſſi tantum, relinquetur pars voluminis, quæ condenſationem metitur.

COROLLARIUM 2.

109. Quodſi contingat, hanc differentiam eſſe nullam; vel aër ambiens non erit calidior aqua, vel aër compreſſus ab iſto frigoris gradu nullam patiatur neceſſe eſt condenſationem.

COROLLARIUM 3.

110. Quodſi differentia aliqua prodeat, evidens eſt, aërem compreſſum adhuc condenſatum & ſpatium a compreſſo in condenſatione derelictum a fluido aſcendente repletum fuiſſe. Elater igitur aëris compreſſi facta condenſatio,

blem.
ſtrata,
poſſe, ſi
biens, dem.

TH.

113. *Si pondus* ... *tur, Mercurius in* ... *deſcendere; ſi illud a* ... *ſcendere debet.*

DEMONSTRATIO.

Etenim columna Mercurialis intra tubum Torricellianum ſuſpenſa æquatur ponderi atmoſphærico (§. 29). Quare ſi pondus atmoſphæræ minuitur, Mercurius fortius deorſum nititur, quam pondus atmoſphæræ reſiſtit. Tanta igitur ejus portio ex tubo effluere debet, quanta differentiæ ponderis columnæ Mercurialis & ponderis atmoſphærici æquatur (§. 62 *Mechan.*). Quare ſi volumen Mercurii minuitur, in tubo utique deſcendere debet. *Quod erat unum.*

nes a...
ncrem altitu...
Tota igitur variationis ſcala ... *gitos pedis Londinenſis, qui cum deficiat à Pariſino* $\frac{9}{144}$ (§. 24); *obſervationes noſtræ cum Pariſinis ſatis conſpirant.*

SCHOLION 2.

116. *Equidem celeberrimus* Hallejus (x) *cum globum vitreum collo tenui inſtructum & Mercurio plenum aqua ad ignem ebullienti immitteret, volumen ejus* $\frac{1}{74}$ *ſui creſcere obſervavit, atque adeo hinc conſtat, Mercurium rareſieri iterumque condenſari* (§. 6.8). *Quoniam tamen incrementa & decrementa Mercurii calori atque frigori proportionalia non*

 ſunt

(x) Philoſ. Transact. n. 197 p. 650.

ibi-
a line-
ubo per
pter hoc
r lineam par-
tava mulctatam
(§. 115) : quæ diffe-
tabilis.

...ntere
... ad D, ſitque HD = 26″. Aucta atmoſphæræ gravitate, Mercurius aſcendat ex D in F (§. 113): tum ex E deſcendet in G, eritque ſuppoſitis tuborum CB & BA diametris æqualibus EG = DF. Ponamus eſſe EG = 1″, erit IF = 28″. Quare ſi in tubo Torricelliano Mercurius aſcendit per 2, in tubo recurvo nonniſi ex D in F, hoc eſt per 1″, aſcendit. Eſt ergo variatio altitudinis Mercurii ob mutatum pondus atmoſphæricum in iſtiusmodi tubo re-

COROLLARIUM 2.

119. Cum ſcala integra, per quam Mercurius in tubo Torricelliano vaſculo ſatis amplo aſcendere ac deſcendere ſolet, vix 24 lineas adæquet (§. 115); in tubo recurvo eadem erit non niſi 12 linearum ſeu digiti unius.

PROBLEMA 24.

120. *Data integra ſcala, per quam aſcendit & deſcendit Mercurius in tubo Torricelliano, una cum diametro tubi, invenire diametrum vaſculi, in quo ſi tubus contineatur, Mercurius ex eo delapſus non impediat, quo minus mutationes ſatis notabiles exiſtant.*

RE-

RESOLUTIO.

Totum negotium huc redit, ut impediatur, quo minus Mercurius ex tubo delapſus Mercurii in vaſculo ſtagnantis altitudinem augeat, cum tantum altitudini in tubo decedat, quantum accedit altitudini Mercurii in vaſculo, ex demonſtratione theorematis 14 (§. 117). Id autem obtinetur, ſi ea ſit vaſculi amplitudo, ut Mercurius per integram ſcalam delapſus altitudinem in vaſculo ſtagnantis non niſi dimidia lineola augeat (§. 118).

Sit itaque ſcala Mercurialis in tubo Torricelliano $= a$, diameter tubi $= b$, erit ſuppoſita ratione diametri ad peripheriam $= d : p$, cylindrus Mercurialis intra ſcalam continendus $= pb^2 a : 4d$ (§. 480 *Geom.*). Sit porro diameter vaſculi $= x$, cum altitudo cylindri, in quem in id delapſus Mercurius abire debet, ſit dimidiæ lineolæ $= m$; erit ſoliditas ejusdem $= mpx^2 : d$ (*§. cit.*), conſequenter

$$mpx^2 : 4d = pb^2 a : 4d$$

$$mx^2 = ab^2$$

$$x^2 : b^2 = a : m \text{ ſeu } x : b = \sqrt{a} : \sqrt{m}$$

Theorema. Diameter vaſculi eſt ad diametrum tubi in ratione ſubduplicata ſcalæ Mercurialis in tubo ad altitudinem ejus delapſi in vaſculo, hoc eſt $\sqrt{8}$ ad 1 (§. 118), ſeu $2\sqrt{2}$ ad 1.

COROLLARIUM.

121. Si $b = m$; erit $x = \sqrt{ab}$, hoc eſt, diameter vaſculi eſt media proportionalis inter altitudinem ſcalæ & diametrum tubi, ſi Mercurius ex integra ſcala delapſus in vaſculo aſcendere debet ad altitudinem diametro tubi æqualem.

PROBLEMA 25.

122. *Datis diametris tubi & vaſculi, una cum altitudine intervalli, per quod Mercurius in tubo deſcendit, invenire altitudinem intervalli, per quod aſcendit in vaſculo & contra.*

RESOLUTIO.

Sit diameter tubi $= a$, diameter vaſculi $= b$, altitudo deſcenſus, $= c$, altitudinis Mercurii in vaſculo incrementum $= x$, erit (§. 120)

$$a^2 pc : 4d = b^2 px : 4d$$

$$a^2 c = b^2 x$$

$$x : c = a^2 : b^2$$

Theorema. Incrementum altitudinis Mercurii in vaſculo eſt ad intervallum deſcenſus in tubo, uti reciproce quadratum diametri tubi ad quadratum diametri vaſculi.

COROLLARIUM.

123. Ergo ſi Mercurius deſcendit per quodcunque intervallum c, erit verum deſcenſus intervallum $= c + a^2 c^2 : b^2$.

PRO-

PROBLEMA 26.

124. *Baroſcopium conſtruere.*

RESOLUTIO.

Tab. II. Fig. 8. 1. Tubus vitreus AB, cujus diameter unius circiter lineæ, hermetice ſigillatus in A & 30 digitis Rhenanis non brevior, Mercurio ita repleatur, ut nihil aëris ſuper eo relinquatur, nec ulli veſiculæ inter parietem vitri & Mercurium locus concedatur, id quod optime ſuccedit ope infundibuli vitrei tubulo capillari inſtructi.

2. Orificium tubi ita repleti, ut Mercurius ex eo redundet, digito fortiſſime appreſſo, ne intra eum & Mercurium aëris quidpiam remaneat, Mercurio in vaſculo ligneo, cujus diameter per probl. 24 (§.120) determinanda, ita immergatur, ut fundum non attingat.

3. Intervallo a ſuperficie Mercurii in vaſculo ſtagnantis 26 digitorum Rhenanorum affigantur ab utroque tubi latere lamellæ CE & DF in duos digitos diviſæ, qui rurſus in 12 lineas aut particulas quotcunque æquales alias ſubdividendi.

4. Tubus denique, ne facile frangatur, canaliculo in tabula LM exciſo indatur & ſuperius alio tegatur, ut ex conſpectu figuræ haud difficulter apparet.

Quoniam tubus hic idem eſt cum Torricelliano (§. 80); baraſcopium utique erit hac ratione conſtructum (§. 82, 113).

SCHOLION I.

125. *Non opus eſſe, ut vaſculum ligneum, in quo Mercurius ſtagnat, ſit apertum, & evidenti experimento* (y) *docui, & propria experientia didici. Meum enim baroſcopium non modo vaſculum habet undiquaque probe clauſum; ſed præterea thecæ alteri ligneæ includitur, vix quicquam aeris externi ad ſuperficiem vaſculi admittenti. Hoc tamen non obſtante mutationes in altitudine Mercurii conſueta ratione contingunt.*

SCHOLION 2.

126. *Non defuere, qui in eo operam ſuam collocarunt, ut mutationes ſenſibiliores efficerent.* Carteſius *primum, poſtea quoque* Hugenius, *commendarunt tubum AB vaſe cylindrico CD inſtructum & dimidium vaſis una cum quadam tubi ſuperioris parte aqua, reliquam vaſis partem ac tubum inferiorem Mercurio repleri juſſerunt. Advertit vero* Hugenius, *votis non reſpondere eventum. Etenim aer in aqua contentus vinculis ſuis ſeſe liberabat & partem tubi ſuperioris vacuam replebat: quo facto, cum aer incluſus rareſieret & condenſaretur* (§. 23. 24), *depreſſiones & elevationes Mercurii a gravitatis atmoſphæræ variationibus productæ non amplius diſcerni poterant. Cum adeo didiciſſet, conſultius eſſe, ut Mercurius locum vacuo proximum occupet, ſequentem baroſcopii compoſiti conſtructionem excogitavit. ADG eſt tubus recurvus in A hermetice ſigillatus, in G vero apertus. Vaſa* Tab. I. Fig. 9. Tab. I. Fig. 10.

cylin-

(y) in Actis Eruditorum A.

cylindrica BC & FE interſe æqualia ſunt & intervallo $27\frac{1}{2}$ digitorum diſtant, quanta ſcilicet eſt Mercurii in media aeris gravitate altitudo in baroſcopio ſimplici. Altitudo unius vaſis eſt circiter 1'' diameter quoque 1'' vel 15''', diameter tubi 1'''. Machinæ huic primum infunditur Mercurius, dum baroſcopium ſimplex mediam aeris gravitatem indicat, ita quidem ut a medietate cylindri FE ad medietatem alterius BC aſſurgat, reliquo ſpatio ad A usque vacuo non ſolum a Mercurio, ſed ipſo etiam aere craſſiore. Poſtea quoque infunditur aqua communis cum parte ſexta aquæ regiæ permixta, ne frigore in glaciem vertatur, donec in tubo GF ad altitudinem unius pedis conſtituatur. Cum jam Mercurius ultra libellam Mercurii in vaſculo FE contenti per tubum AD aſſurgens ponderi atmoſphærico & liquoris æquilibretur; aucto atmoſphæræ pondere, augeri debet columna illa Mercurialis, conſequenter liquor deſcendet: aſt imminuto atmoſphæræ pondere, columna Mercurialis quoque imminui debet, conſequenter liquor aſcendet.

SCHOLION 3.

127. *Enimvero utut baroſcopium* Hugenianum *multo minores gravitatis aereæ mutationes indicet, quam tubus* Torricellianus: *quoniam tamen aqua facile in vaporem agitur, etiamſi ad impediendam evaporationem gutta olei ex amygdalis dulcibus expreſſi, inſtilletur, liquori innatatura; tubum inſtar normæ inflexum BCD vaſculo AB cohærentem Mercurioque repletum adhibere præſtat, ſi mutationes in crure horizontali CD indicandas quantumvis ſenſibiles deſideres.*

PROBLEMA 27.

128. *Data diametro tubi CD invenire diametrum vaſculi* AB, *ita ut ſcala deſcenſus Mercurii in tubo DC habeat ad ſcalam aſcenſus in vaſculo* AB *rationem datam.*

RESOLUTIO.

Sit diameter tubi $= a$, ratio ſcalarum $b:c$, diameter vaſculi $= x$. Tab. I. Fig. II.
Cum tantum Mercurii in vaſculum aſcendat, quantum per aëris gravitatem in tubo DC deprimitur, poſitaque ratione diametri ad peripheriam $= d:p$, quantitas Mercurii in tubo recedentis ſit $a^2pb : 4d$ & quantitas vaſculum ingreſſi $= x^2pc : 4d$ (§. 480 *Geom.*); erit

$$a^2pb : 4d = x^2pc : 4d$$

$$a^2b = x^2c$$

$$x^2 : a^2 = b : c$$

$$x : a = \sqrt{b} : \sqrt{c}$$

Theorema. Diameter vaſculi eſt ad diametrum tubi in ratione ſubduplicata reciproca ſcalarum.

COROLLARIUM.

129. Datis ergo diametro tubi CD & diametro vaſculi AB una cum ſcala Mercurii in vaſculo, invenitur ſcala in tubo, inferendo: ut quadratum diametri tubi ad quadratum diametri vaſculi ita reciproce ſcala Mercurii in vaſculo ad ſcalam Mercurii in tubo.

PROBLEMA 28.

130. *Datis diametris tuborum & vaſculorum una cum altitudinibus intervallorum, per quæ Mercurius deſcendit, invenire utrum baroſcopia concordent, nec ne.*

RESOLUTIO.

Quærantur vera deſcenſus intervalla in eadem menſura (§. 123): quæ ſi utrinque æqualia reperiantur, evidens eſt, barometra inter ſe concordare; ſin minus, diſcordare.

SCHOLION.

131. *Apparet adeo ad judicandam duorum vel plurium barometrorum concordiam, aut veram intervallorum aſcenſus differentiam non ſufficere, ut utrique eadem graduatio applicetur, niſi utriusque vaſculi* (§.120) *ea fiat amplitudo, ut Mercurius ex tubo delapſus gravitate atmoſphæræ imminuta altitudinem in vaſculo ſtagnantis ſenſibiliter non variet.*

THEOREMA 15.

Tab. I. Fig. 12. 132. *Si tubus Torricellianus* AB *inclinatur, erit cylindrus Mercurialis atmoſphæræ æquiponderans ad cylindrum Mercurialem eidem in ſitu tubi verticali æquiponderantem ut longitudo tubi* AB *ad altitudinem* BC.

DEMONSTRATIO.

Si loco ponderis atmoſphærici egreſſum Mercurii ex tubo AB per oſculum A impedientis concipiatur cylindrus Mercurialis iſti æquiponderans in tubo verticali ad A reſiſtere; erit ejus gravitas ad gravitatem Mercurii in tubo inclinato ut longitudo AB ad altitudinem BC (§. 34 *Hydroſt.*). Cum itaque cylindro Mercurii verticali pondus atmoſphæræ æquale ſit; erit etiam gravitas Mercurii in tubo inclinato ad hoc ut longitudo tubi AB ad altitudinem BC. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

133. Si altitudo BC fiat longitudinis tubi vel ſubtripla, vel ſubquadrupla &c. mutationes baroſcopii duplo, vel triplo &c. ſenſibiliores evadunt.

COROLLARIUM 2.

134. Si AB ſumatur pro ſinu toto, erit CB ſinus anguli inclinationis BAC. Eſt ergo gravitas Mercurii in tubo inclinato ponderi atmoſphærico æquiponderantis ad pondus atmoſphæricum ut ſinus totus ad ſinum anguli inclinationis.

COROLLARIUM. 3.

135. Ergo & ſcala integra, & ſingula intervalla aſcenſus deſcenſusque Mercurii reciproci in tubo inclinato AB ob variationes ponderis atmoſphærici ad ſcalam integram & ſingula ejus intervalla in tubo verticali ſunt ut ſinus totus ad ſinum anguli inclinationis. Ductis enim DF ipſi BC & FE ipſi CA parallelis, erit $o = x$ & $v = y$ (§. 222 *Geom.*), conſequenter DE : DF = BA : BC (§. 252 *Geom.*).

PROBLEMA 29.

136. *Data longitudine ſcalæ, per quam Mercurius nunc aſcendit, nunc deſcendit, in tubo verticaliter erecto, invenire angulum inclinationis tubi inclinandi, ut ſcala, per quam Mercurius*

curius in ipſo nunc aſcendit, nunc deſcendit, habeat ad ſcalam tubi verticalis rationem datam.

RESOLUTIO.

Sit longitudo ſcalæ in tubo verticali $= a$, quia datur ratio ſcalæ in inclinato ad ſcalam in verticali, datur etiam ſcala ipſa in inclinato, quæ ſit $= b$. Sit porro ſinus totus $= t$, ſinus anguli inclinationis $= x$; erit utendo logarithmis $lx = la + lt - lb$ (§. 135).

CAPUT V.

De RAREFACTIONE ET CONDENSATIONE, DENSITATE ITEM ET RATITATE AERIS.

THEOREMA 16.

137. *Calor elaterem aëris intendit.*

DEMONSTRATIO.

Aer veſicæ incluſus eadem vi premit, qua aër ambiens, ante caloris actionem (§. 34). Sed ubi calor in eum agit, veſicam diſtendit (§. 22). Tum itaque magis premit, quam ambiens externus (§. 62 *Mechan.*). Enimvero vis illa, qua veſicam diſtendit, eſt elater ejus (§. 26). Calor adeo elaterem aëris intendit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

138. Quia aër rarefactus iterum condenſatur (§. 24); frigus elaterem ejus minuit.

THEOREMA 17.

139. *Vis elaſtica aëris, qua rareſiens expanditur, eſt ad elaterem aëris condenſati uti volumen rarefacti ad volumen condenſati.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus aërem rarefactum ea lege comprimi debere, ut idem recuperet volumen, quod condenſatus obtinuerat: evidens eſt, tantum ponderis imponi debere, quod vi elaſticæ æquatur, qua expanſus fuit (§. 62 *Mechan.*). Erit igitur elater aëris, qua rareſiens expanditur, ad elaterem condenſati, ut pondus illud ad pondus alterum, quo condenſatus premebatur (§. 397 *Mechan.*). Eſt vero pondus

rarefacto incumbens idem, quod condenſato incumbebat *per hypoth.* Ergo elater aëris, qua rarefiens expanditur, eſt ad elaterem condenſati ut pondus, quod ſuſtentat a rarefactione ad priſtinum condenſationis volumen reductus, ad pondus, quo rarefactus premitur, conſequenter ut volumen rarefacti ad volumen condenſati (§. 66). *Q. e. d.*

PROBLEMA 30.

140. *Aquam vel liquorem alium in vas quoddam per exiguum tubulum immittere.*

RESOLUTIO.

1. Vas igni admoveatur per aliquod temporis ſpatium.
2. Mox, ubi ab igne iterum removetur, orificium tubuli vel foramen liquori immittatur.

Dico, liquorem ſua veluti ſponte in cavitatem vaſis aſcenſurum.

DEMONSTRATIO.

Dum enim globus igni admovetur, aër rarefit (§. 23), conſequenter tanto major quantitas expelletur, quanto diutius ad ignem detinetur (§. 8). Quodſi jam orificium tubuli liquori immergatur, per eum in vas aſcendet, dum calor exſpirat. Dum enim calor exſpirat, cæteris paribus, aëris, quæ reſtat, portio rarior eſt externo ambiente, adeoque elater ejus minor quam externi (§. 73), conſequenter quam ponderis atmoſphærici (§. 30). Quare cum circa tubulum liquor a pondere atmoſphærico prematur (§. 21); aqua per tubulum in vas propelletur (§. 62 *Mechan.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

141. *Quodſi prima vice non tantum aeris expulſum fuerit, ut totus globus liquore impleri queat, eadem operatio iteranda. Nec neceſſe eſt, liquorem in priore operatione immiſſum rurſus expelli, cum ipſe potius ob propriam rarefactionem aeris adhuc reſidui expulſionem promoveat.*

THEOREMA 18.

142. *Sit globus vitreus* A B *cum annexo tubo* BC, *cujus orificium* C *aquæ immerſum; hæreat aqua pendula in tubo usque ad D: aſcendet, ſi aer ambiens frigidior, vel gravior evadit; deſcendet, ſi calidior vel levior redditur.* Tab. I. Fig. 13.

DEMONSTRATIO.

Si enim aer ambiens frigidior redditur, refrigeratur etiam incluſus adeoque condenſatur (§. 24): quo facto, elater ejus minuitur (§. 73). Cum igitur is conſtanter æqualis eſſe debeat differentiæ ponderis fluidi ſuſpenſi a pondere atmoſphærico (§. 86); ſi minuitur, pondus fluidi, conſequenter & volumen ejus (§. 17 *Hydroſt.*) augeri debet. Aqua igitur in tubo aſcendat neceſſe eſt. Similiter ſi aer gravior

vior redditur, aqua circa tubum magis premitur, quam ſub orificio tubi (§. 10). Tantum igitur aquæ aſcendere debet, quantum ſufficit ad æquilibrium cum pondere atmoſphærico conſtituendum (§. 36 *Hydroſt.*). *Quod erat unum.*

Contra ſi aer externus calefit, calefit quoque incluſus, conſequenter rarefit (§ 23) adeoque liquorem in tubo detrudit (§. 8). Fluidum deſcendere, ſi aer levior redditur, eadem ratione demonſtratur, qua oſtendimus, illud aſcendere, ſi is gravior evadit. *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

143. *Celeberrimus* Hallejus (z) *obſervavit, uti ſupra de Mercurio* (§. 116), *quod ſpiritus vini inſigniter expanſus fuerit, atque ab initio celerius, poſtea tardius in tubulo aſcenderit. Cum ſpiritus vini duodecima voluminis parte dilatatus eſſet, manus quidem aquæ calorem ferre poterat, ille tamen ebullire incipiebat. Vereor autem, ne diverſitas ſpiritus vini expanſionis gradum variet. In aqua exiguam expanſionem notavit idem* Hallejus, *in primis ſub initium, & ebulliens* $\frac{1}{26}$ *circiter ſpatii prioris augebatur, non amplius expandenda. Quamvis autem ex his experientiis manifeſtum ſit, volumen fluidi calore creſcere, frigore decreſcere debere, conſequenter liquorem aſcendere conari, dum ab elatere aeris incluſi deorſum pellitur, & contra, conſequenter rarefactionem liquoris obſtare deſcenſui ejus, condenſationem vero aſcenſui; experientia tamen conſtat, hoc obſtaculum non impedire, quo minus elateris aerei effectus ſint ſatis ſenſibiles, quia aër multo magis rareſit & condenſatur quam fluidum quodcunque aliud.*

THEOREMA 19.

144. *Denſitas aeris, cæteris paribus, creſcit in ratione ponderum comprimentium.*

DEMONSTRATIO.

Sunt enim denſitates ut gravitates ſpecificæ (§. 33 *Hydroſt.*). Gravitates ſpecificæ ſunt ut volumina reciproce (§. 29 *Hydroſt.*). Ergo denſitates ſunt ut volumina reciproce, conſequenter ut pondera comprimentia (§. 66). *Q. e. d.*

THEOREMA 20.

145. *Aer inferior denſior eſt ſuperiore.*

DEMONSTRATIO.

Aër ſuperior premit inferiorem (§. 21). Cum adeo inferiori major aeris quantitas incumbat, quam ſuperiori; inferior quoque magis premitur, quam ſuperior (§. 10). Denſitas adeo inferioris major eſt denſitate ſuperioris (§. 144). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

146. Quia corpora denſiora ſunt graviora rarioribus ſub eodem volumine (§. 16 *Hydroſt.*) & aër gravis exiſtit (§. 20); aër inferior ſpecifice gravior eſt ſuperiore.

(z) Philoſ. Transact. n. 197. p. 650 & ſeqq.

THEOREMA 21.

147. *Denſitas aeris inferioris non eſt ponderi atmoſphærico proportionalis.*

DEMONSTRATIO.

Si præter variationem ponderis atmoſphærici cætera in aere inferiore omnia eſſent paria, denſitates ejus eſſent ut pondera atmoſphærica (§.144). Sed calor aerem rarefacit, frigus condenſat (§. 23. 24), adeoque a calore & frigore denſitas diverſimode variatur, utut eodem pondere prematur: ac forte adhuc aliæ dantur cauſæ eandem ſimiliter alterantes. Cum adeo denſitas aeris inferioris mutari poſſit, pondere atmoſphærico immutato, iſta huic proportionalis non eſt. *Q. e. d.*

THEOREMA 22.

148. *Si aer redditur denſior, pondus corporum in aere minuitur; ſi rarior, augetur.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam gravitates ſpecificæ ſunt ut denſitates (§. 33 *Hydroſt.*); aer denſior ſpecifice gravior eſt rariori. Corpus igitur aere ſpecifice gravius in denſiore majorem ponderis partem amittit, quam in rariore (§. 56 *Hydroſt.*). Unde ſi aer redditur denſior, pondus minuitur; ſi rarior, augetur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

149. Si igitur denſitas aeris ſenſibiliter alteratur, corporum in aëre rariori æquilibratorum, quorum gravitates ſpecificæ notabiliter differunt, æquilibrium tolletur in denſiore, præponderabitque ſpecifice gravius (§. 61 *Hydroſt.*).

PROBLEMA 31.

150. *Invenire incrementum ponderis, quod volumen aeris unius pedis cubici ob variationem ponderis atmoſphærici acquirere valet.*

RESOLUTIO.

Si pondus atmoſphæræ cæteris paribus augetur, aer inferior magis comprimitur (§. 66), adeoque denſior evadit (§. 144), conſequenter pes cubicus aeris a compreſſione gravior (§. 9 *Hydroſt.*). Sit jam pondus atmoſphæræ minimum $= a$, maximum $= b$, pondus aeris a minimo compreſſi $= c$, preſſi a maximo $= x$. Cum denſitates corporum æqualium ſint ut pondera (§. 16 *Hydroſt.*): erit

$$a : b = c : x$$

$$x = bc : a$$

Ergo incrementum y, quod volumen aeris datum ob ponderis atmoſphærici variationem acquirere valet, eſt $bc : a - c = (bc - ac) : a$, conſequenter $a : b - a = c : y$.

Theorema. Ut pondus atmoſphæri-

cum minimum ad differentiam ejus a maximo, ita pondus aeris a minimo compreſſi ad incrementum ponderis, quod a tota variatione ponderis atmoſphærici acquirere valet volumen aeris datum.

E. gr. Pes cubicus aeris in minima atmoſphæræ gravitate ſit 507 granorum (§. 55). Quoniam $a = 26$, $b = 28$ (§. 115): erit $y = 39$ granorum. Incrementum adeo, quod pes cubicus aëris ab omni variatione ponderis atmoſphærici ſuſcipere valet, eſt fere $\frac{1}{13}$ ejus ponderis, quod ipſi a minimo pondere atmoſphærico preſſo competit.

DEFINITIO II.

151. *Manoſcopium* eſt inſtrumentum, quod alterationes denſitatis aeris indicat. *Manometrum* eſt inſtrumentum, quod eaſdem metitur.

PROBLEMA 32.

152. *Manoſcopium conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Aſſumatur bilanx tam accurate conſtructa, ut minimos æquilibrii mutationes indicet, cujus centrum motus eſt ſuper centro jugi.
2. Ex altero jugi brachio ſuſpendatur globus ex lamina metallica e. gr. cuprea aut orichalcea conſtruendus, ne pondus affrictum in libra augeat (§. 660 *Mechan.*), minimas æquilibrii mutationes eluſurum. Capacitas globi ſit minimum unius pedis cubici, & ex eo educatur aer (§. 40).
3. Trutinæ affigatur Quadrans ADC ex centro jugi B deſcriptus, ita ut ſecetur in gradu quadrageſimo quinto ab indice BD, ſi jugum fuerit in ſitu horizontali. Tab. II. Fig. 14.

Dico, Manoſcopium eſſe conſtructum.

DEMONSTRATIO.

Etenim ſi aër denſior redditur, pondus globi evacuati minuitur (§. 148). Et licet etiam (*vi §. cit.*) vis contrapondii minuatur, cum tamen ejus volumen vix ſpatium a laminæ, ex qua globus conſtructus, ſoliditate repletum occupet, niſus ejus deorſum minus minuitur, quam globi (§. 55 *Hydroſt.*) conſequenter contrapondium globo præponderat, & augmentum gravitatis ſpecificæ aëris, in quo hæret, conſequenter & denſitatis (§. 33 *Hydroſt.*) indicat. Eſt ergo machina manoſcopium (§. 151). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

153. Quoniam aëris denſitas & raritas non modo a pondere atmoſphæræ (§. 144), ſed & a caloris & frigoris actione pendet (§. 23. 24); manoſcopium hoc baroſcopium eſſe nequit.

SCHO-

SCHOLION I.

154. *Equidem* Otto de Guericke (a) *&*, *qui ipſum ſequitur*, Boylius (b) *idem inſtrumentum pro baroſcopio venditant; ſed non attenderunt, manente eodem pondere denſitatem ac raritatem aeris ſæpiſſime variari.*

SCHOLION 2.

155. *Neque vero putandum eſt, mutationes gravitatis globi adeo exiguas fore, ut in bilance notari nequeant, experientia enim contrarium abunde ſatis confirmat. Certe* Guerickius *ſe expertum ſcribit, quod globi gravitas interdum quovis, interdum ſecundo, tertio, quarto, quinto die aliquantum variata fuerit & inprimis ingraveſcere globum notavit, ſi pluat. Nec difficulter idem ratione aſſequimur. Cum enim gravitas unius pedis cubici aerei 39 granorum mutationem ob variatum pondus atmoſphæricum ſuſtineat* (§. 150); *bilanx vero unius vel alterius grani acceſſionem vel ablationem indicare poſſit, ut pondere 30 librarum (a quo multum abeſt globus cum ſuo contrapondio) oneretur* (§. 55); *ſi globus evacuatus pedem aeris cubicum capit, quin variationes denſitatis ab atmoſphæræ pondere variato pendentes manoſcopium noſtrum indicet, dubitandum non eſt. Tanto minus autem dubitare fas eſt, quod aliæ adhuc denſitatis variationes a diverſo calore ac frigore aeris factæ, nec iſtis minores accedant. Didicit nimirum* Hallejus *aerem ordinarium in Anglia a calore æſtivo expandi* $\frac{1}{13}$ *circiter ſui voluminis, a maximo autem frigore condenſari* $\frac{1}{20}$ *fere. Cum adeo pondus unius pedis cubici aerei ſit 507 granorum* (§. 55); *erit decrementum ponderis in caſu priore 39, incrementum in poſteriore 25 granorum.*

SCHOLION.

156. *Manometri conſtructionem dedit celeberrimus* Varignonius (c); *de quo alias nonnulla monuimus* (d).

CAPUT VI.

De MOTU AERIS.

DEFINITIO 12.

157. *Ventus* eſt agitatio aëris ſenſibilis.

PROBLEMA 33.

158. *Data ratione gravitatis ſpecificæ fluidi cujuscunque ad gravitatem aeris, una cum ſpatio, quod intra definitum aliquod temporis ſpatium fluidum iſtud percurrit ab aere premente impulſum, determinare ſpatium, quod ipſe aer ob æqualem preſſionem intra idem tempus emetiri debet.*

RE-

(a) in Experiment. de Vacuo lib. 3. C. 31. f. 114.
(b) in Hiſtoria frigoris tit. 17.
(c) Memoires de l' Acad. Roy. des Sciences A. 1705 p. m. 409 & ſeqq.
(d) in Element. Aërometriæ p. 284.

RESOLUTIO.

Ponatur altitudo, ad quam per datam aëris preſſionem elevari poteſt fluidum in medio non reſiſtente $= a$. Sit porro ratio gravitatis ſpecificæ fluidi ad gravitatem aeris $= b : c$. Spatium, quod fluidum ab aere premente impulſum deſcribit, dicatur s, & denique ſpatium, quod aer ob æqualem preſſionem intra idem tempus emetitur, vocetur x. Quoniam altitudines fluidorum, ad quas propter æquales preſſiones elevantur, ſunt in ratione gravitatum reciproca (§. 36 *Hydroſt.*); ſi altitudo, ad quam aer eandem cum fluido preſſionem ſuſtinens eveheretur, modo elatere careret, fiat $= y$; erit $c : b = a : y$, conſequenter $y = ab : c$. Sunt vero velocitates, quibus fluida ob eandem preſſionem elevantur, in ratione ſubduplicata altitudinum, ad quas aſcendunt (§. 73.270 *Mech.*), adeoque in caſu noſtro ut $\sqrt{a}$ ad $\sqrt{(ab : c)}$. Quare cum ob temporum ſuppoſitam æqualitatem ſpatia, quæ iſtis temporibus percurruntur, ſint ut velocitates (§. 28 *Mech.*); erit

$$\sqrt{a} : \sqrt{(ab : c)} = s : x$$

$$a : \frac{ab}{c} = s^2 : x^2 \text{ (§.239 Arithm.)}$$

$$c : b = s^2 : x^2 \text{ (§.170.172 Arithm.)}$$

Theorema. Ut gravitas ſpecifica aëris ad gravitatem fluidi alterius cujuscunque, ita reciproce quadratum ſpatii, quod fluidum hoc quacunque vi impulſum intra quodcunque temporis ſpatium percurrit, ad quadratum ſpatii, quod aer ob eandem preſſionem eodem tempore emetitur.

COROLLARIUM 1.

159. Ergo $x = \sqrt{(bs^2 : c)}$. Unde ſi ponamus, aquam data vi impulſam intra minutum temporis ſecundum percurrere ſpatium 2 pedum; erit $s = 2$, cumque gravitas ſpecifica aquæ ſit ad gravitatem ſpecificam aëris ut 970 ad 1 (§. 55), erit $b = 970$ & $c = 1$, conſequenter $x = \sqrt{970.4} = \sqrt{3880} = 62\frac{3}{}'''$ fere.

COROLLARIUM 2.

160. Eſt etiam $s = \sqrt{(cx^2 : b)}$, adeoque ſpatium, quod intra certum aliquod temporis ſpatium ob certam quandam impreſſionem fluidum quodcunque emetitur, determinatur, ſi ad duos numeros, quibus ratio gravitatis ſpecificæ fluidi ad gravitatem aëris exprimitur, atque quadratum ſpatii quod aer ob eandem preſſionem intra idem temporis ſpatium emetitur, numerus quartus proportionalis quæratur (§ 272 *Arithm.*) & ex eo radix quadrata extrahatur (§.248 *Arithm.*).

SCHOLION.

161. Mariottus (e) *notat, ventum ſatis violentum ordinarie ſpatium 24 pedum intra minutum ſecundum deſcribere. Quodſi ergo quæratur ſpatium, quod aqua ob eandem preſſionem, quam aer ſuſtinet, intra idem temporis ſpatium abſolvit, erit* c = 1, x = 24, b = 970 *&* *reperietur* $f = \sqrt{(576 : 970)} = \frac{24}{31}$.

PROBLEMA 34.

162. *Data altitudine, ad quam fluidum quodcunque a preſſura aëris elevatur, una cum altitudine, per quam corpus grave intra minutum ſecundum deſcendit, determinare ſpatium, quod fluidum iſtud intra minutum ſecundum vi impetus impreſſi motu æquabili percurrit.*

RESOLUTIO.

Sit altitudo, ad quam fluidum ab aëre premente elevatur, $= a$, minutum temporis ſecundum $= b$, ſpatium quæſitum $= x$. Quoniam corpus grave per vim cadendo acquiſitam elevatur ad altitudinem, per quam decidit (§. 270 *Mech.*); vis aëris prementis, qua fluidum ad datam altitudinem elevatur, æqualis erit vi, quam id per eandem cadendo acquirere valet. Porro vis cadendo acquiſita ejus eſt celeritatis, qua corpus motu æquabili intra idem tempus, quo decidit, deſcribere valet lineam altitudinis, ex qua decidit, duplam (§. 78 *Mech.*) Reperietur adeo ſpatium, quod fluidum intra idem tempus, quo decidit, vi cadendo acquiſita percurrere valet $= 2a$. Sit præterea ſpatium, quod corpus grave deſcendens intra minutum ſecundum deſcribit, $= c$. Quoniam tempora ſunt in ratione ſubduplicata ſpatiorum a corporibus cadentibus deſcriptorum, erit tempus, quo grave decidit per ſpatium a, $= \sqrt{(ab^2 : c)}$ (§. 73 *Mech.*). Quare ſi motus æquabilis ponatur, habebimus (§. 28 *Mech.*)

$$\sqrt{(ab^2 : c)} : 2b = 2a : x$$

$$2ab = x\sqrt{(ab^2 : c)}$$

$$4a^2b^2 = x^2ab^2 : c$$

$$4ac = x^2$$

$$2a : x = x : 2c$$

Theorema. Spatium, quod fluidum ob impetum impreſſum intra minutum ſecundum motu æquabili percurrit, eſt medium proportionale inter altitudinem duplam, ad quam idem ab aëre premente elevatur, & altitudinem duplam ejus, per quam grave intra minutum ſecundum decidit.

SCHOLION.

163. *Ponamus, Mercurium per preſſionem atmoſphæræ in tubo Torricelliano ſuſtentari ad altitudinem* 28″: *erit adeo in problemate noſtro* a = 28″. *Porro* c = 15′ 1″ *ſeu* 181″ *(pedis Pariſini)* (§. 327 Mechan.). *Ergo* x *hoc eſt ſpatium, quod ob eandem preſſionem Mer-*

(e) Trait. du mouvement des eaux p. 226.

ercurius motu æquabili tempore unius ſecun- percurreret $= 2\sqrt{181.\ 28} = 142''$ *am proxime ſeu* 11′ 10″. *Ponamus Mer- rium elevari per aeris preſſionem nonniſi* ′. *Erit in caſu problematis noſtri* $a = 2''$, $= 181''$, *adeoque* $x = 2\sqrt{181.\ 2} = 38''$ 3′ 2″.

PROBLEMA 35.

164. *Data altitudine fluidi, ad uâm propter preſſionem aëris ele- atur, invenire ſpatium, quod tem- ore unius minuti ſecundi ob eandem reſſionem percurrere debet aër in edio non reſiſtente.*

RESOLUTIO.

Quæratur, quantum ſpatium ob preſſionem aëris, qua ad datam altitudinem elevatur, tempore unius minuti ſecundi motu æquabili emetiretur fluidum da- tum (§. 162). Hinc enim porro Inveſtigari poteſt ſpatium, quod aër in medio non reſiſtente ob eandem preſſionem percurrere debet (158).

COROLLARIUM 1.

165. Per præſens igitur problema eterminari poteſt ſpatium, quod aër in is prorſus evacuatum irruens intra inutum temporis ſecundum deſcribit. enim vas prorſus evacuatum fuerit, r irruens preſſionem ſuſtinet ei æqua- m, qua aqua ad altitudinem 32 pedum ariſienſium elevatur (§. 29). Quare atium, quod aqua ob iſtam preſſio- nem tempore unius minuti ſecundi mo- tu æquabili percurreret, eſt 518″ (§. 162). Jam cum ratio gravitatis ſpecificæ a- quæ ad gravitatem aeris ſit 970 : 1, re- perietur ſpatium, quod aer in vas pror- ſus evacuatum irruens motu æquabili tempore unius minuti ſecundi percur- rere debet, 1292 pedum (§. 158).

COROLLARIUM 2.

166. Si detur differentia virium ela- ſticarum in duobus voluminibus aeris contiguis, inveniri poteſt ſpatium, quod aer ex volumine fortiori elatere inſtru- ćto irruens in volumen elatere debi- liori præditum deſcribit.

SCHOLION.

167. *Sit e. gr. differentia virium elaſtica- rum in duobus voluminibus aeris contiguis ea, qua Mercurius elevari poteſt ad altitudi- nem 2 digitorum. Reperietur ſpatium, quod ob iſtiusmodi preſſionem tempore unius minu- ti ſecundi motu æquabili Mercurius deſcribere valet* 38″ (§. 162). *Cum jam gravitas ſpe- cifica Mercurii ad gravitatem aquæ ſit ut* 14 *ad* 1 (§. 29) & *gravitas aquæ ad gravi- tatem aeris ut* 970 *ad* 1, *erit gravitas Mer- curii ad gravitatem aëris ut* 13580 *ad* 1, *adeoque reperietur ſpatium, quod ob æqualem preſſionem aer emetiri debet tempore unius minuti ſecundi fere* 368 *pedum. Irruet er- go aer ex volumine fortiori in debilius ea ce- leritate, qua tempore unius minuti ſecundi fere* 368 *pedes percurrere valet. Sit diffe- rentia virium elaſticarum nonniſi* 3‴ : *repe- rietur ſpatium, quod ob iſtiusmodi preſſionem tempore unius minuti ſecundi motu æquabili Mercurius deſcribere valet, fere* 12″, *tandem- que ſpatium, quod ob iſtiusmodi preſſionem tempore unius minuti ſecundi aer emetiri de- bet,* $116\frac{1}{2}$ *pedum* (§. 158). *Ea igitur celeri-*

tate, qua tempore unius minuti ſecundi ſpatium 116 *circiter pedum percurrere valet, aer ex volumine fortiori in debilius irruit. Quoniam* Mariottus (f) *obſervat, ventum ſatis violentum intra minutum temporis ſecundum* 24 *pedes percurrere; ejus celeritas multo minor eſt ea, qua aer irruit ex volumine fortiori in debilius, differentia virium elaſticarum nonniſi tanta exiſtente, quanta Mercurium in tubo Torricelliano ad altitudinem* 3‴ *elevare valet.*

COROLLARIUM 3.

168. Quoniam data ratione voluminum aeris primitivi atque compreſſi inveniri poteſt altitudo, ad quam aer compreſſus Mercurium in tubo Torricelliano elevare poteſt (§.76); per problema præſens determinari etiam poteſt celeritas, qua aer ceſſante compreſſione ſeu remota vi premente ſeſe expandit.

PROBLEMA 36.

169. *Dato ſpatio, quod aër intra minutum ſecundum percurrit, determinare preſſionem, quæ celeritatem iſtam producere valet.*

RESOLUTIO.

Preſſionem determinatam eſſe patet, ſi conſtet altitudo, ad quam fluidum quodcunque in tubo vacuo ab aëre elevandum, tantam preſſionem producere valente. Sit itaque hæc altitudo $= x$, ſpatium quod aër intra minutum ſecundum percurrit $= a$, ratio gravitatis ſpecificæ fluidi ad gravitatem aëris $= b:c$; altitudo denique, per quam corpus grave intra minutum ſecundum deſcendit $= d$; reperietur ſpatium a fluido tempore unius minuti ſecundi percurrendum $= \sqrt{(a^2c:b)}$ (§.160). Hinc porro elicitur (§.162) altitudo quæſita $= a^2c:4bd$. Eſt itaque

$$4bd : ac = a : x.$$

Theorema. Spatium, quod aer tempore unius minuti ſecundi percurrit, eſt ad altitudinem, ad quam fluidum in tubo vacuo elevandum, ut preſſionem efficiat celeritati, qua iſtud deſcribitur, producendæ ſufficientem, in ratione compoſita gravitatis ſpecificæ fluidi ad gravitatem aeris atque altitudinis quadruplæ, per quam corpus tempore primi minuti ſecundi deſcendit, ad ſpatium aeris prædictum. Sit e. gr. $a = 24'$, ſeu 288″ ratio Mercurii ad aërem $b:c = 13580:1$ (§.167), $d = 181''$ (§.327 *Mech.*); erit x minor unica linea ſeu duodecima digiti parte.

SCHOLION.

170. *Apparet adeo, quod exiguas mutationes in baroſcopio, ſed ſubitas, ingentes admodum procellæ ſubſequi debeant; id quod experientiæ conſentaneum theoriam noſtram confirmat.*

DEFINITIO 13.

171. *Anemometrum* eſt inſtrumentum, quo vim ventorum metimur.

PROBLEMA 37.

172. *Anemometrum conſtruere.*

RE-

(f) Traité du mouvement des eaux p. 226.

RESOLUTIO.

1. Conſtruantur alæ ABCD, quales in molis alatis adhiberi ſolent, multo tamen minores, a plano verticali ſub angulo 54 circiter graduum reclinatæ.
2. Axi, cui alæ infiguntur, aptetur etiam cochlea perpetua EF, quæ
3. Circumacta deprimat dentes rotæ ſtellatæ GH.
4. Axi per centrum tranſeunti infigatur ad angulos rectos brachium ſatis longum IK, in medio canaliculi inſtar excavandum, ut intra cavitatem pondus plumbeum L ſurſum deorſum libere moveri poſſit, ipſique (nempe brachio) ex altera axeos parte æquilibretur brachium minus *y*.
5. Brachii majoris IK longitudo in quotcunque partes æquales dividatur, quarum ſingulæ radio axis æquantur.
6. Eidem axi infigatur index MN brachio IK ad angulos rectos inſiſtens, & extra ciſtam, cui rota ſtellata cum cochlea perpetua incluſa, eminens.
7. Denique ex centro axis in pariete ciſtæ exteriore deſcribatur quadrans circuli in 90 gradus more ſolito dividendus, ab indice vel aſcendente, vel deſcendente indicandos.

Dico, Anemometrum eſſe conſtructum.

DEMONSTRATIO.

Manifeſtum enim, ſi alæ ABCD vento opponantur, cochleam perpetuam EF circumvolvi atque adeo rotam ſtellatam GH in orbem agere. Quare cum brachium IK cum rota ſtellata GH eidem axi infigatur, *per conſtruct.* ubi hæc circumagitur, illud cum pondere L elevabitur. Quoniam vero diſtantia ponderis a centro motus continuo fit major, quo altius elevatur; tanto quoque gravius fiat neceſſe eſt, quo altius attollitur (§. 512 *Mechan.*). Vis igitur venti, quæ per minorem angulum elevare poteſt pondus, non ideo idem elevare valet per angulum majorem. Quamprimum itaque ponderis gravitatio vi venti ipſum elevantis æqualis evadit, motus machinæ ſiſtatur neceſſe eſt (§. 62 *Mechan.*) & quia cochlea perpetua EF rotam quidem GH circumagere poteſt, ipſa autem a rota circumagi nequit, brachium IK cum pondere L relabi nequit. Index adeo ſemper indicat, quantus ſit angulus elevationis ponderis, ubi eidem vis venti æquilibratur: unde determinabitur vis venti (§. 509 *Mechan.*), atque adeo per machinam noſtram ratio virium ventorum determinari poteſt, hoc eſt, vires venti metiri licet (§. 21 *Geom.*). Eſt igitur anemometrum (§. 171). *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

173. *Ut hæc machina ſine ullius adjumento alas ABCD vento ſemper obvertat, ciſtæ ST plano, quod alis opponitur, ad angulos rectos affigendus eſt aſſerculus POQR figuram trapezii parallelarum baſium habens. Ventus enim incidens in aſſerculum POQR, machinam circa axem pedamenti mobilem convolvet, donec alæ vento opponantur. Alias directio ad ductum vexilli e centro machinæ erecti fieri poteſt, ut in molendinis vulgaribus alatis.*

SCHOLION 2.

174. *Brachio IK contrapondium Y additur ut inſtar lineæ gravitate carentis conſiderari poſſit, nec tædia calculi præter neceſſitatem multiplicentur.*

THEOREMA 23.

175. *Si elater aeris alicubi debilior evadit quam in locis contiguis, ventus flat per locum, in quo elater imminutus.*

DEMONSTRATIO.

Cum aer per elaterem ſuum quaquaverſum ſe expandere nitatur (§. 26); ſi elater uno in loco minor, quam in altero, niſus aeris vi elaſtica majore præditi adverſus aerem vi elaſtica minore inſtructum major erit, quam hujus adverſus iſtum. Ergo aer minus elaſticus vi minore reſiſtit, quam a magis elaſtico urgetur, conſequenter minus elaſticus loco ſuo pellitur & magis elaſticus in eum ſuccedit. Quodſi adeo exceſſus elateris in aere magis elaſtico ſuper elaterem minus elaſtici is ſit, qui exiguam in baroſcopio mutationem inducere valet; motus quoque tam aeris expulſi, quam in ipſius locum ſuccedentis ſenſibilis evadat neceſſe eſt (§. 167). Flat ergo ventus per locum, quam aer minus elaſticus replet (§. 157). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

176. Cum aucto pondere comprimente elater augeatur (§. 397 *Mech.*), aër vero compreſſus ſit denſior minus compreſſo (§. 71): ventus flat per aërem rariorem ex loco, qui denſiore repletur.

COROLLARIUM 2.

177. Quamobrem, quia aer denſior rariore ſpecifice gravior (§. 16 *Hydroſt.*); extraordinaria aeris aliquo in loco levitas cum ventis extraordinariis ſeu procellis conjungi debet.

COROLLARIUM 3.

178. Jam deſcenſus Mercurii extraordinarius in baroſcopio aeris levitatem extraordinariam indicat (§. 113). Non ergo mirum, quod procellas portendat, ſi ſubito fiat.

SCHOLION.

179. *Non tamen neceſſe eſt, ut aeris levitas ſemper cum ventis conjungatur. Sufficit enim gravitatem aeris ſubitas pati mutationes. Hinc ventum ſat valide flantem hoc ipſo temporis articulo experimur, utut in media altitudine, 29 nempe digitorum Anglicorum, Mercurius in baroſcopio conſiſtat, nec niſi*

$\frac{1}{16}$ *unius digiti depreſſior nunc factus, quam heri erat. Immo in maxima depreſſione ventus ſæpe nullus ſpirat, quia depreſſio ſucceſſive, non ſubito facta.*

COROLLARIUM 4.

180. Si aer alicubi ſubito condenſatur, elater ejus ſubito minuitur (§. 139). Quodſi ergo hæc imminutio ea fuerit, quæ in baroſcopio vix indicari poſſit (§. 167. 169); ventus per aerem condenſatum flabit.

COROLLARIUM 5.

181. Quoniam vero ſubito condenſari nequit, niſi magnam ante paſſus fuerit rarefactionem (§. 6. 8); ventus flabit per aerem, dum poſt æſtum vehementem refrigeratur.

COROLLARIUM 6.

182. Similiter ſi aer ſubito rarefiat, elater ejus ſubito intenditur (§. 139), adeoque defluet per contiguum actioni vis rarefacientis non obnoxium (§. 62 *Mechan.*). Flabit ergo ventus ex loco, in quo aer ſubito rarefit.

COROLLARIUM 7.

183. Cum vires ſolis in rarefaciendo aere notiſſimæ ſint; ſolem in ventorum geneſin influere manifeſtum eſt (§. ., 6).

PROBLEMA 38.

184. *Ventum excitare adverſus plagam deſideratam ſpirantem.*

RESOLUTIO.

1. Conſtruatur vas cylindricum ABCD ex ligno, cujus diameter AB & altitudo AC eo major eſſe debet, quo impetuoſior ventus excitandus. Tab. II. Fig. 16.
2. Vas ipſum undiquaque probe clauſum, ſolo foramine in E gaudens, cui tubus EF utrinque apertus ante immittendus.
3. Per medium cylindrum tranſeat axis mobilis HI quatuor brachiis cum alis coriaceis K, L, M, N, & curriculo O extra vas inſtructus. Habeat vero curriculus 6 vel 7 bacillos.
4. Curriculo occurrat rota dentata PQ cum axe curvato RS 30 vel 28 dentes habens.

Dum ergo axis SR curvatus ſemel convolvitur, alter erectus IH 5 vel 4 converſiones abſolvit, adeóque alæ L, M, N, K per aerem incluſum celerrime feruntur eundemque per tubum expellunt. Cum adeo tubus verſus plagam deſideratam dirigi poſſit; ventus excitabitur (§. 157) adverſus plagam deſideratam ſpirans. *Q. e. f.*

SCHOLION.

185. *Cum in molis frumentariis axis ferreus HI cum curriculo C occurrat* (§. 688 Mechan.); *hoc artificio ſub lapidibus molaribus facile excitatur ventus partes a granis frumenti abraſas a nucleo eorum ſeparaturus. Tum vero*

vero tubus IF ſacci vices ſuſtinet, & baſis GF declivis, in G vero foramen eſſe debet, ut grana graviora per hoc decidant, leviores autem partes abraſæ a vento per F ejiciantur. *Hoc artificio uti quoque liceret ad paleas a frumento poſt triturationem ſeparandas, additis addendis, quæ nunc fuſius exponere non eſt noſtri inſtituti.*

CAPUT VII.

DE CALORE AC FRIGORE, ITEMQUE HUMIDITATE AC SICCITATE AERIS.

DEFINITIO 14.

186. *Thermoſcopium* eſt inſtrumentum caloris ac frigoris in aere incrementa & decrementa indicans. *Thermometrum* vero eſt inſtrumentum, quo calorem ac frigus aeris metiri licet.

DEFINITIO 15.

187. *Hygroſcopium* eſt inſtrumentum, quod humiditatis & ſiccitatis in aere incrementa & decrementa indicat. *Hygrometrum* vero eſt inſtrumentum, quo humiditatem & ſiccitatem aeris metimur.

PROBLEMA 39.

188. *Thermoſcopium conſtruere.*

RESOLUTIO.

Tab. I. II. Fig. 17. Tubo BC, qui globo vitreo AB cohæret, immittatur aqua communis regiæ permixta & ab orichalco in hac ſoluto viredine tincta (§. 140). Opera vero danda eſt, ut tantum aeris in globo & tubo relinquatur, qui hieme maximam condenſationem paſſus globum exacte repleat & æſtate ad ſummum rarefactionis gradum perductus non omnem ex tubo BC liquorem expellat.

2. Tubus immittatur vaſculo vel alteri ejus extremo cohæreat globis CD apertus, ut aer ejici, iterumque ingredi libere posſit, & in quo ſimilis liquor contineatur, qualis in tubum immiſſus.

3. Ab utroque latere tubi applicetur ſcala EF in particulas quotcunque æquales dividenda.

DEMONSTRATIO.

Si enim aer ambiens fit calidior, liquor in tubo deſcendit: ſi is frigidior evadit, hic aſcendit (§. 142). Incre-

Incrementa, igitur caloris & frigoris indicat hoc inſtrumentum, adeoque thermoſcopium eſt (§. 185). *Q. e. d.*

Aliter.

ab. I. ig. 3.

1. Eodem artificio, quo ante, & cum eadem cautione, in tubum BC in varios gyros contortum commoditatis gratia (ne ſcilicet longior ſpatium nimis longum occupet nec facile damnum patiatur) immittatur pauculum Mercurii, piſi magnitudinem non excedens.
2. Tubulus dividatur in partes quotcunque æquales, quæ ſcalæ vicem ſuſtineant.

Acceſſus Mercurii ad globum frigoris; receſſus vero ejusdem a globo caloris incrementa indicabit.

DEMONSTRATIO.

Eadem eſt, quæ præcedens.

COROLLARIUM 1.

188. Quia liquor in thermoſcopio primo & Mercurius in altero etiam aſcendit, ſi aër gravior redditur; contra vero deſcendit, ſi levior evadit (§. 142): caloris ac frigoris incrementa non ſatis fideliter exprimit.

COROLLARIUM 2.

189. Quoniam tamen mutationes admodum ſenſibiles ſunt; ſi aliorum corporum calor examinandus, commode thermoſcopio altero utimur: exiguo enim temporis ſpatio, quo experimentum inſtituitur, gravitas atmoſphæræ ſenſibiliter non mutatur.

SCHOLION.

190. *Quodſi in thermoſcopio primo liquorem colore intenſe rubro & admodum grate tingere volueris; aquam ferventem affunde foliis florum ſimplicium atque rubidorum malvæ hortenſis arefactis, ut color extrahatur. Quodſi enim tincturæ aquam regiam affuderis, non ſine jucunditate colorem intenſe rubrum emergentem contueberis, reliquos omnes longe antecellentem, quibus huc usque uſi ſunt artifices.*

PROBLEMA 39.

191. *Thermoſcopium Florentinum conſtruere.*

RESOLUTIO.

Cum Academici Florentini perpenderent incommoda, quibus thermoſcopium paulo ante deſcriptum premitur (§. 188); menſuram caloris & frigoris quæſivere in rarefactione ſpiritus vini, utut rarefactione aëris longe minore (§. 143). Thermoſcopium vero ab ipſis repertum ita conſtruitur:

1. Fruſtulis ex radice curcumæ aut anchuſæ reſectis affundatur ſpiritus vini rectificatiſſimus, ſeu qui, dum accenſus conflagrat, pulverem pyrium accendit; a priore enim radice colore flavo, a poſteriore autem rubro tingetur.
2. Poſtea ſpiritus vini iterum ite-

rumque filtretur per chartam bibulam, ut particulæ craſſiores ex radice extractæ remaneant.

Tab. III. Fig. 19. 3. Spiritu vini tincto & filtrato impleatur globus vitreus A B cum tubo BC. Ne autem hieme ſpiritus omnis in globum deſcendat; globum immittere juvat niſi multo ſale conſperſæ aut (ſi æſtivo tempore thermoſcopium parare volueris) aquæ fontanæ frigidæ, in qua multum nitri ſolutum: ut ſpiritus condenſatus indicet terminum, quem maximo frigore attingere valet.

4 Quodſi a globo longiore intervallo adhuc diſtet, aliqua ejus portio rurſus expellenda. Ne autem tubus juſto longior fiat, globum ſpiritu plenum aquæ calidæ carbonibus candentibus impoſitæ immittatur & notetur terminus, ad quem pertingit, ubi ebullitioni proximus.

5. Hoc ergo termino ad flammam lampadis admoto, tubus hermetice ſigilletur.

6. A latere denique affigatur ut in probl. præc. ſcala EF in particulas quotcunque æquales diviſa.

DEMONSTRATIO.

Quoniam ſpiritus vini rareſit & condenſatur (§. 143); calore creſcente, in tubo aſcendet (§. 8); decreſcente, deſcendet (§. 6). Caloris igitur incrementa & decrementa inſtrumentum indicat, conſequenter thermoſcopium eſt (§. 185). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

192. Si ſpiritus vini per multos gradus ſcalæ aſcendit, calorem multum creviſſe conſtat; ſi deſcendit, idem multum decreviſſe intelligitur: quoniam tamen ratio caloris hodierni ad heſternum non indicatur, inſtrumentum calorem non metitur (§. 4 *Geom.*) adeoque thermometrum non eſt.

COROLLARIUM 2.

193. Liquor in tubo vi gravitatis ſuæ deorſum nititur (§. 4 *Mechan.*), adeoque ex globo in ipſum ulterius aſcendenti reſiſtit tanto quidem magis, quo altius jam aſcendit (§. 10). Præſtaret itaque, ſitum tubi BC eſſe horizontalem.

COROLLARIUM 3.

194. Cum neceſſario aliquid aëris ſuper liquore in parte tubi vacua exiſtat, is vi elateris deorſum nititur (§. 26) adeoque aſcenſui liquoris reſiſtit. A liquore aſcendente comprimitur (§. 17). Quare elater ipſius augetur (§. 71) ab actione caloris forte ulterius intendendus (§. 137).

COROLLARIUM 4.

195. Cum experientia conſtet, remiſſiorem caloris gradum facilius cum ſpiritu vini in globo communicari, quam vehementiorem; rarefactiones ſpiritus

vini

vini viribus productricibus proportionales non ſunt, inprimis cum & vehementior caloris gradus plus liquoris in tubulo offendat, quam remiſſior, cui tamen facilius communicari poteſt calor, quam in globo ſtagnanti. Thermoſcopium adeo Florentinum, accedente inprimis reſiſtentia inæquali, (§. 193. 194), thermometrum non eſt.

SCHOLION I.

196. Hallejus *autor eſt, ſe didiciſſe ex iis, qui ſpiritum vini diu aſſervarunt, quod is ſucceſſu temporis partem vis expanſivæ amittat* (f). *Sed meretur res accuratiori examini ſubjici, vi eorum, quæ de legibus experientiarum alibi tradidimus* (g).

SCHOLION 2.

197. *Varii variis modis gradum fixum caloris ac frigoris quæſiverunt, a quo utriusque gradus reliqui computentur, ut obſervationes eodem vel diverſo tempore in pluribus locis factas conferre inter ſe liceat. Aliqui locum notant, in quo liquor hieme hæret, dum aqua congelare incipit, iterumque alterum tempore æſtivo, dum butyrum juxta globum thermoſcopii poſitum liqueſit. Spatium intermedium in duas partes æquales dividunt, quod diviſionis punctum in ipſorum graduatione calori temperato reſpondet. Partem utramque in 10 gradus ſubdividunt, tandemque quatuor iſtiusmodi gradus infra gradum congelationis aquarum, quatuor itidem ſuper gradum liquationis butyri transferunt. Notandum vero diviſionem fieri thermoſcopio in umbra collocato, & ne obſervationes turbentur, verſus eandem conſtanter plagam inſtrumentum dirigi debere, quam reſpiciebat, cum diviſio abſolveretur. Enimvero ſupponunt, congelationi aquæ cujusvis eundem gradum frigoris & liquationi butyri cujusvis eundem gradum caloris reſpondere, ac ſingula thermoſcopia ab eodem caloris vel frigoris gradu easdem recipere impreſſiones. Poſterius autem fallere non ignorant, qui experientia edocti, thermoſcopia eidem parieti affixa non eundem conſtanter caloris gradum oſtendere, utut eadem utrique graduatio fuerit applicata. Et valde vereor, ne prius cum cura examinaturi contrarium ſimiliter experiantur. Differunt enim aquæ inter ſe, differunt inter ſe butyra: id quod vel ſola gravitatis ſpecificæ variatio monſtrat, ut alia taceamus, quæ meditantibus & experimentantibus ſe offerent.*

SCHOLION 3.

198. *Suadent alii, ut globus thermoſcopii nivi vel glaciei multo ſale conſperſæ immittatur, & gradus ad quem ſpiritus ſubſiſtit notetur. Hinc thermoſcopium in cellam profundam transferunt, quorſum aeris externi nihil pertingit, ut actionem aeris temperati recipiens gradum caloris temperati indicet. Denique ſpatium intermedium in 15 vel plures partes æquales dividunt, etiam ſupra gradum caloris temperati transferendas, ut graduatio integra abſolvatur. Sed ut non urgeam, quæ in ſcholio præcedente jam abunde dicta ſunt, quis quæſo reſpondeat quærenti: an omni nivi idem ſit frigoris gradus? An omni ſali eadem vis corrodendi lamellas nivis glaciales? Suppono enim, frigus a ſale nivi permixto produci, quatenus corrodit lamellas glaciales & abraſis ſuperficieculis earundem interiorem nucleum ſumme frigidum corporibus frigefaciendis applicari facit.*

SCHOLION 4.

199. *Celeberrimus* Hallejus *pro termino fixo*

(f) Transact. Anglic. n. 197. p. 650

(g) Act. Erud. A. 1708 p. 163 & ſeqq. conf. Tractatum noſtrum von den Kräfften des Verſtandes c. 4. §. 2. p. 55

fixo aſſumit eum caloris gradum, quo ſpiritus vini ebullire incipit. Enimvero jam ſupra monuimus, quænam ratio ſit ſuſpicandi, forte nec hunc gradum eſſe usque adeo fixum. Et licet poſt ipſum Amonton (h) *retinuerit ipſum gradum caloris, qui aqua ebullienti convenit, dum thermoſcopium Mercuriale conſtruxit, & poſtea* (i) *hujus ope thermoſcopio Florentino talem graduationem applicari docuerit, qua ab eodem caloris gradu reliquos computat: id tamen dubii remanet, cum diverſa ſit aquarum gravitas ſpecifica, quæ maſſæ ac texturæ diverſitatem arguit, num calor aquarum ebullientium omnium idem ſit: unde operæ pretium facient rerum naturalium ſcrutatores, ſi factis accuratis experimentis inquirant, quinam ſit gravitatis fluidorum ſpecificæ ad calefactionem eorundem reſpectus.*

SCHOLION 5.

200. *Nondum excipere licet, iſtiusmodi minutias in praxi non eſſe attendendas; neque enim hactenus demonſtratum, quod irregularitates a cauſis memoratis pendentes ſint minutiæ. Lis igitur adhuc pendens non niſi pluribus experimentis a pluribus præſertim pluribus in locis factis dirimenda.*

SCHOLION 6.

201. Carolus Renaldinus (k) *tradit modum integram graduationem methodo experimentali determinandi, ut habeantur gradus inæquales æqualibus gradibus caloris, dum intenditur, reſpondentes, quam collectores Actorum Eruditorum Lipſienſium* (l) *his verbis deſcribunt*: „Capiatur tubus gracilis, „longitudinis circiter quatuor palmorum, cum annexa bulla, eique infundatur ſpiritus vini tantum, ut ſphærula glacie circumdata omnino repleatur, neque tamen aliquid redundet, „orificiumque tubi ſigilletur hermetice. „Denide parentur ſex vaſa, quorum „quodlibet aquæ libram & aliquid amplius poteſt recipere, & in primum infundantur aquæ gelidæ unciæ 11, in ſecundum unciæ 10, in tertium 9 & ſic „porro. His peractis thermometrum „mergatur in vas primum eique affundatur aquæ ferventis uncia una, obſerveturque quo usque aſcendat ſpiritus in collo & locus unitate notetur. „Porro transferatur in vas ſecundum, „cui injectæ aquæ ferventis unciæ duæ „denuoque notetur locus, ad quem aſcendit ſpiritus, noteturque binario & „ſic deinceps. Quodſi cui placeat ulterius procedere, donec tota aquæ libra ſit inſumta, perfectius erit inſtrumentum elaboratum, nempe duodecim numeris aut aſteriſcis diſtinctum, „quibus caloris termini denotantur.

SCHOLION 7.

202. *Facile incautis imponere poterat* Renaldinus, *ut ſibi perſuaderent, hac ratione exactam caloris menſuram obtineri. Habes enim duodecim caloris gradus & effectus reſpondentes gradui uni, duplo, triplo, quadruplo &c. Unde viciſſim cognoſcentur gradus ſimpli, dupli, tripli, quadrupli &c. caloris. Dabitur igitur ratio caloris hujus diei ad calorem cujuscunque alterius, conſequenter calorem metiri licet* (§. 21 Geom.). *Atat! non nimis*

(h) Memoir. de l'Acad. Royal. des Scient. A. 1702 p. m. 210 & ſeqq.
(i) Memoir. de la memme Academ. A. 1703 p. m. 63 & ſeqq.
(k) in Philoſ. Nat. diſſert. 16 ſect. 12.
(l) Supplement. Tom. 2. ſect. 10. p. 453.

nimis confidenter pronunciandum. Examinemus, quæſo, ſuppoſita, ne forte aliquid eſſe ponamus, quod non eſt, ſicque erroneam concluſionem pro vera eliciamus. Supponitur, nos habere gradum caloris ſimplum, ſi 11 *unciis aquæ gelidæ affundatur una ferventis; gradum duplum, ſi* 10 *affundantur duo; triplum, ſi* 9 *tres; quadruplum, ſi* 8 *quatuor &c. affundantur. Supponitur porro calorem ſimplum vi ſimpla, duplum dupla, triplum tripla, quadruplum quadrupla &c. uniformiter agere in ſpiritum vini in globo contentum. Supponitur denique, ſi idem effectus in thermoſcopio a calore aëris ambientis producitur, qui ab aqua calida producebatur, aëri eundem competere caloris gradum, qui aquæ conveniebat. Enimvero nullum ex his ſuppoſitis verum eſt. Quod enim primum attinet, concedamus interea, calorem aquæ ferventis, ſi frigidæ affundatur, per hanc æqualiter diſtribui. Diſtribuentur adeo unus caloris gradus per partes undecim; duo per* 10; *tres per* 9; *quatuor per* 8 *&c. Si itaque aſſumamus æqualia iſtarum aquarum volumina, e. gr. ſingularum partes duodecimas, non erit calor duplus in altero, triplus in tertio, quadruplus in quarto caſu &c. Fallit ergo ſuppoſitum primum. Sed non minus fallit alterum: neque enim calor aquæ ferventis per frigidam, cui affunditur, æqualiter diffunditur; nec calor aquæ calidæ in ſpiritum vini uniformiter agit, id eſt, eadem vi per omne tempus actionis ſuæ. Prius experientiam vulgi non fugit, ut adeo id aliis experimentis & rationibus confirmari non opus ſit. Poſterius facillime oſtenditur. Notum nimirum eſt, requiri aliquod temporis ſpatium, antequam calorem ſuum cum ſpiritu vini per globum vitreum communicet aqua calida. Sed per totum illud temporis ſpatium eundem calorem aqua non retinet, cum eum continuo exhalet. Nequaquam igitur habentur effectus veri graduum caloris ſimpli, dupli, tripli, quadrupli &c. ſi vel maxime efficeretur, ut calor in aquis diverſis ſub initium immerſionis globi eſſet nunc ſimplus, nunc duplus, nunc triplus, nunc quadruplus &c. Calor denique ambientis aëris non modo in ſpiritum vini in globo, ſed & in tubo contentum agit, adeoque non iſtum modo, verum etiam hunc rarefacit. Immo nondum conſtat, num omnia fluida, in quibus idem eſt gradus caloris, eadem facilitate cum alio corpore calorem ſuum communicent: nec forte hæc diſquiſitio multum tractabilitatis promittit. Taceo alia, quæ hic urgeri poſſent. Sufficit ſatis conſtare, methodum* Renaldinianam *ſuppoſitis niti partim precariis, partim manifeſto falſis, ut adeo ratio nulla ſit, cur vulgari diviſioni in partes æquales hæc in partes inæquales diviſio mechanica præferatur.*

SCHOLION 8.

203. *Cæterum quamvis mutationes thermoſcopii Florentini admodum ſenſibiles exſtant, ita ut ſpiritus vini per notabile intervallum aſcendat, manu calida admota, iterumque deſcendat, ea remota; ubi tamen per inſigne intervallum tempore hiemali deſcendit, aſcenſus intervalla decrementis frigoris non ſatis reſpondent. E. gr. hoc ipſo anno d.* 9 *Jan. h.* 8 *mat. liquor in thermoſcopio meo deſcenderat uſque ad* 72*mum gradum ſcalæ frigoris, cum conſueta phænomena frigus intenſum loquerentur: ſed cum d.* 18 *Jan. eadem hora tempeſtate jam multo mitiore ad gradum* 80*mum ſubſiſteret, hora tertia, qua nix & glacies ad priſtinum fluiditatis ſtatum reducebantur, ſpiritus ad* 72*mum hærebat. Scilicet ad eundem ſæpius gradum depreſſus cernitur liquor, cum tamen phænomena alia diverſitatem caloris ac frigoris inſignem manifeſto prodant. Immo interdum depreſſio ſpiritus major cum effectibus frigoris remiſſioris; minor vero cum effectibus multo intenſioris conjungi ſolet. Et hæc obſervantur, etiamſi thermoſcopium collocetur in loco, ad quem aëri externo liber patet aditus. Ratio phænomeni hæc mihi videtur. Experientia conſtat, frigore invaleſcente,*

ſcente, multum aëris ex fluidis expelli: id quod teſtantur veſiculæ tum ſuperficiebus vitrorum, in quibus continentur, adhærentes. Extra dubium itaque poſitum videtur, frigore intenſo ex ſpiritu quoque vini in baroſcopio aerem ejici & per tubi vacuam partem expandi. Cum adeo aer ambiens calidior rurſus redditur, incluſi elater augetur ſpiritui-que aſcenſuro reſiſtit (§. 137). *Quoniam vero per experimentum* Mariotti (m) *determinata quædam aeris quantitas in fluido ſalis inſtar diſſolvitur; aer a frigore expulſus creſcente calore ſenſim ſenſimque ſpiritui rurſus permiſcetur: quod antequam fiat, altitudines caloris incrementa indicantes ſemper erunt juſtis minores.*

EXPERIENTIA 6.

204. *Funem cannabinum ex duplici filo contortum humectavimus & longitudinem eius notabiliter minui animadvertimus: ubi vero denuo exſiccabatur, ad priſtinam redibat dimenſionem. Multo autem brevior evadebat, ubi ſub aqua per aliquod tempus ipſum detinueramus. Huc pertinent, quæ* Schwenterum *expertum eſſe in Geometria* (n) *annotavimus. Et* Guilielmus Molyneux, *Armiger atque Societatis Dublinenſis Secretarius, iſtiusmodi funem humectatum cum appenſo pondere ſuſpendit, eumque pro ratione exſiccationis reſolvi animadvertit. Cum pelvim aqua calida plenam admoviſſet, aſcendente vapore funis denuo velociter contortus, eoque ceſſante rurſus reſolutus. Immo halitu oris octies aut decies repetito, funem contorqueri didicit celeriterque reſolvi admota prope uncum candela aut ferro ignito* (o).

COROLLARIUM.

205. Sola igitur humiditas aëris funium cannabinorum longitudinem notabiliter abbreviare, ipſosque funes arctius contorquere valet.

SCHOLION.

206. *Humor nimirum dimenſionem funis ſecundum diametrum auget. Sed cum gyri ſpirales filorum contortorum fere in circulares abeant autopſia teſte, dimenſio ſecundum longitudinem decreſcit. Abbreviationis igitur cauſa non modo ab inſinuatione humoris in poros funium, ſed & inprimis a ſpirali eorundem textura petenda.*

EXPERIENTIA 7.

207. *Idem in nervo aliquo fidium, cuius longitudo erat 14″ circiter iuxta menſuram Rhenanam, experti ſumus. Cum enim eundem duobus clavis utraque ſui extremitate alligatum iuxta feneſtram apertam extendiſſemus & ope pauculæ ceræ indiculum ligneum applicaſſemus, per complures dies non ſine voluptate nervum contorqueri advertimus, cum ſole oriente ros decideret, ita ut fere ſemicirculum intra exi-*

guum

(m) Eſſay de la Nature de l' Air p. 97 & ſeqq.

(n) §. 125. p. 108.

(o) Philoſ. Transact. A. 1685 n. 162. p. 1032. conf. Acta Erudit. A. 1686. p. 389. 390.

guum temporis intervallum indiculus deſcripſiſſe notaretur. Aſt Solis radiis illuſtratus nervus iterum reſolvebatur atque indiculum ultra terminum reducebat, in quo eum ſub ortum ſolis conſpexeramus, cum feneſtram cubiculi noctu clauſam primum aperiremus. Non tamen ſingulis diebus æquales indiculi itus reditusque notavimus. Eundem nervum ſub aqua demerſum ſenſibiliter contorqueri didicimus: ſatis enim celeres eius intra aquam convolutiones notavimus, non ſecus acſi duo manibus prehendentes eius extremitates ipſum vi contorquerent. Extracti ex aqua minorem longitudinem notavimus, quam cum eundem aquæ immitteremus, & radiis licet ſolaribus exſiccatus ad priſtinam longitudinem reducturi vires eludebat.

SCHOLION.

208. *Similia ſe expertum teſtatur* Sturmius (p). *Non ignoro, quod alii* (q) *contrarium accidere affirmant; ſed quid alii experti ſint, mihi quidem haud conſtat, cum circumſtantias ſingulares non annotent. Mihi rem enarrare libuit, prouti eandem expertus ſum.*

PROBLEMA 40.

209. *Hygroſcopium conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Funem cannabinum aut nervum fidium AB juxta parietem extende ſuper rotula B alterique ejus extremo D pondus E alliga, cui infixus ſit ſtylus FG.
2. Eidem parieti affigatur lamina metallica HI, in partes quotcunque æquales diviſa.

Dico hygroſcopium eſſe conſtructum.

DEMONSTRATIO.

Cum enim humor funium & chordarum longitudinem ſenſibiliter abbreviet, humore autem rurſus exſpirato iterum reſolvat (§. 204. 207); pondus humore aeris aucto aſcendet, imminuto deſcendet. Et quoniam index FG in lamina HI ſpatium monſtrat, per quod pondus aſcendit, vel deſcendit, intervalla vero aſcenſus & deſcenſus decrementis ac incrementis longitudinis funis aut nervi fidium ABD æqualia ſunt; inſtrumentum indicat, num dato hoc tempore aer plus alat humoris, quam alio habuit. Eſt igitur hygroſcopium (§. 186). *Q. e. d.*

Aliter.

Si hygroſcopium ſenſibilius deſideres, funem aut nervum fidium circa plures trochleas A, B, C, D, E, F & G circumvolve & reliqua fiant ut ante. Perinde vero eſt, ſive Tab. III. Fig. 21.

(p) in Colleg. Curioſ. part. I. tent. 14. phœn. 5. p. 124 & ſeqq.
(q) Traitez des barometres, thermometres & notiometres p. 94.

ſive partes funis AB, BC, CD, DE, EF, FG ſint horizonti parallelæ, ut in ſchemate expreſſimus, ſive ad eundem perpendiculares: prouti nempe quolibet in caſu commodum viſum fuerit.

DEMONSTRATIO.

Eadem eſt cum præcedente.

Aliter.

Tab. III. Fig. 22. 1. Funis cannabinus AB aut nervus fidium altera ſui extremitate unco ferreo A alligetur, altera vero B in centro tabulæ ligneæ EF horizontaliter poſitæ firmetur.

2. Prope B infigatur pondus plumbeum C unius circiter libræ cum annexa regula CG.

3. Ex centro B in tabula deſcribatur circulus in partes quotcunque æquales dividendus.

DEMONSTRATIO.

Cum enim funis cannabinus atque nervus fidium levi quodam humore aeris, qualem ſecum vehit halitus oris, imbutus velociter contorqueatur, eodem autem exhalante rurſus extemplo reſolvatur (§. 204. 207); evidens eſt, quod humore aeris aucto, index quantitatem contorſionis vel reſolutionis monſtrare, conſequenter humiditatis & ſiccitatis incrementa indicare debeat. Eſt igitur inſtrumentum hygroſcopium (§. 186). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Funis cannabinus aut nervus fidium HI altero ſui extremo ſuſpendatur ex unco H. Tab. III. Fig. 23.

2. Alteri extremitati I annectatur globus K unius circiter libræ.

3. Limbo pedamenti LM inſcribantur duæ peripheriæ circuli parallelæ & ſpatium intermedium in partes quotcunque æquales dividatur.

4. Globo infigatur ſtylus NO, cujus extremitas O limbi diviſionem fere attingit.

Dico, hunc indicem incrementa humiditatis & ſiccitatis aeris oſtenſurum.

DEMONSTRATIO.

Eadem prorſus eſt, quæ proxime præcedens.

Aliter.

1. Parentur ſubſcudes ſulcatæ AB & CD ex ligno quercino. Tab. III. Fig. 24.

2. Intra crenas oppoſitas aptentur aſſerculi abietini AEFC & GBDH, ita ut ultro citroque facillime moveri poſſint.

3. In extremitatibus ſubſcudium A, B, C, D clavis firmentur aſſerculi & inter utrumque relinquatur ſpatium EGHF, cujus latitudo EG unius circiter digiti.

4. In I firmetur lamina orichalcea dentata IK & in L rotula dentata, cujus axi in altera machinæ facie index inſeratur.

5. Tan-

5. Tandem ex centro axis in eadem facie deſcribatur circulus in partes quotcunque æquales dividendus.

DEMONSTRATIO.

Cum enim experientia teſte lignum abietinum humorem aeris facillime imbibat ac inde turgeſcat, humore autem rurſus exſpirato tabeſcat; ſi aeris humiditas augetur, aſſerculi AF & BH humore turgeſcentes propius ad ſe invicem accedunt; ſi illa rurſus minuitur, iidem aſſerculi tabeſcentes denuo a ſe invicem diſcedunt. Quoniam vero diſtantia aſſerculorum nec minui poteſt ſine rotulæ L convolutione, nec augeri; index monſtrabit incrementa humiditatis & ſiccitatis aeris. Eſt igitur machina conſtructa hygroſcopium (§. 186). *Q. e. d.*

Aliter.

ab. Manoſcopium ſuperius deſcriptum in hygroſcopium abit, ſi glo-
. bo evacuato E ſubſtituas ſpongiam,
g. aut materiam quandam aliam, quæ
4. humorem facile imbibit. Solet autem ſpongia primum aqua communi, deinde, ubi bonam partem rurſus exſiccata fuerit, aqua vel aceto, in quo aliquid ſalis Ammoniaci ſeu ſalis tartari diſſolutum fuerit, macerari atque in loco umbroſo denuo exiccari.

DEMONSTRATIO.

Si enim aer humidus evadit, ſpongia gravior reddita præponderat; ſi levior rurſus altius tollitur experientia teſte, adeoque index incrementa & decrementa humiditatis indicat. Eſt ergo hygroſcopium (§. 186). *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

210. *Omnia hygroſcopia, quæ hactenus deſcripta ſunt, ſenſim ſenſimque a perfectione ſua deficiunt, tandemque ab humiditate aeris parum aut nihil mutationis patiuntur. Uſus ultimi eſt magis diuturnus, quam cæterorum omnium.*

SCHOLION 2.

211. *In hygroſcopio ultimo* Gouldius (r) *loco ſpongiæ omnium maxime commendat oleum vitrioli, quod indies in tantum augeri obſervavit, ut intra ſpatium 57 dierum a tribus drachmis ad drachmas novem & 30 grana aſcenderet. Enimvero non notat, num etiam humiditatem tam prompte rurſus dimittat, quam eam attrahit: de quo valde dubito, adeoque præſenti inſtituto oleum vitrioli minime congruum judico.*

SCHOLION 3.

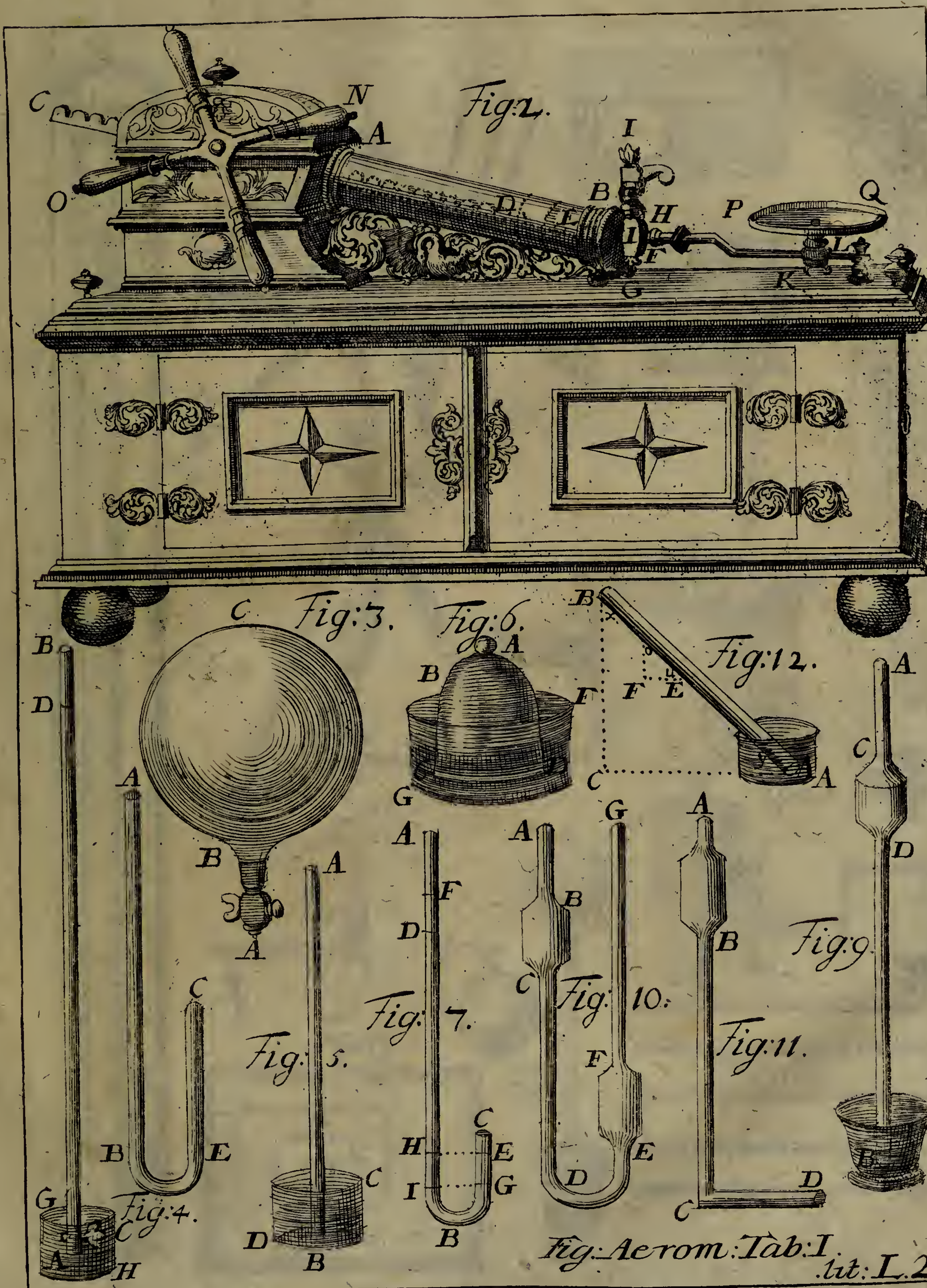
212. *Cæterum quilibet, me non monente videt, ſtructuram hygroſcopiorum multis modis variari poſſe.*

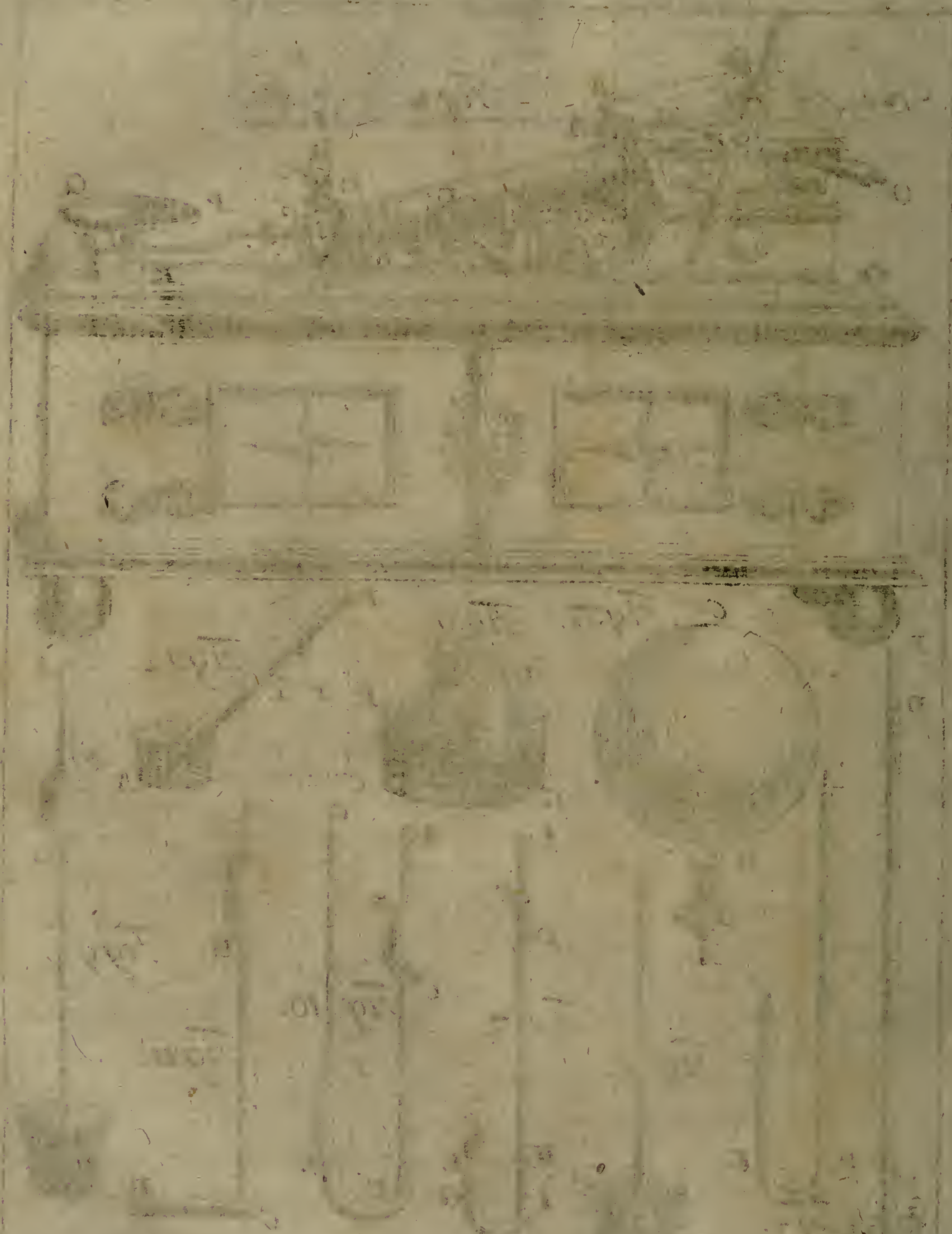
(r) in Actis Erudit. A. 1685 p. 315.

FINIS Aërometriæ.

Errata ſic corrige.

in	pag.	lin.	errat.	Corrig.
Hydroſt.	705	28	maſſæ	denſitates
in	759	ult.	a^2c^2	a^2c
Aërom.	770	14	$2b$	b


Fig:2.
Fig:3.
Fig:4.
Fig:5.
Fig:6.
Fig:7.
Fig:9.
Fig:10.
Fig:11.
Fig:12.
Fig: Aerom: Tab: I.
lit: L.2.



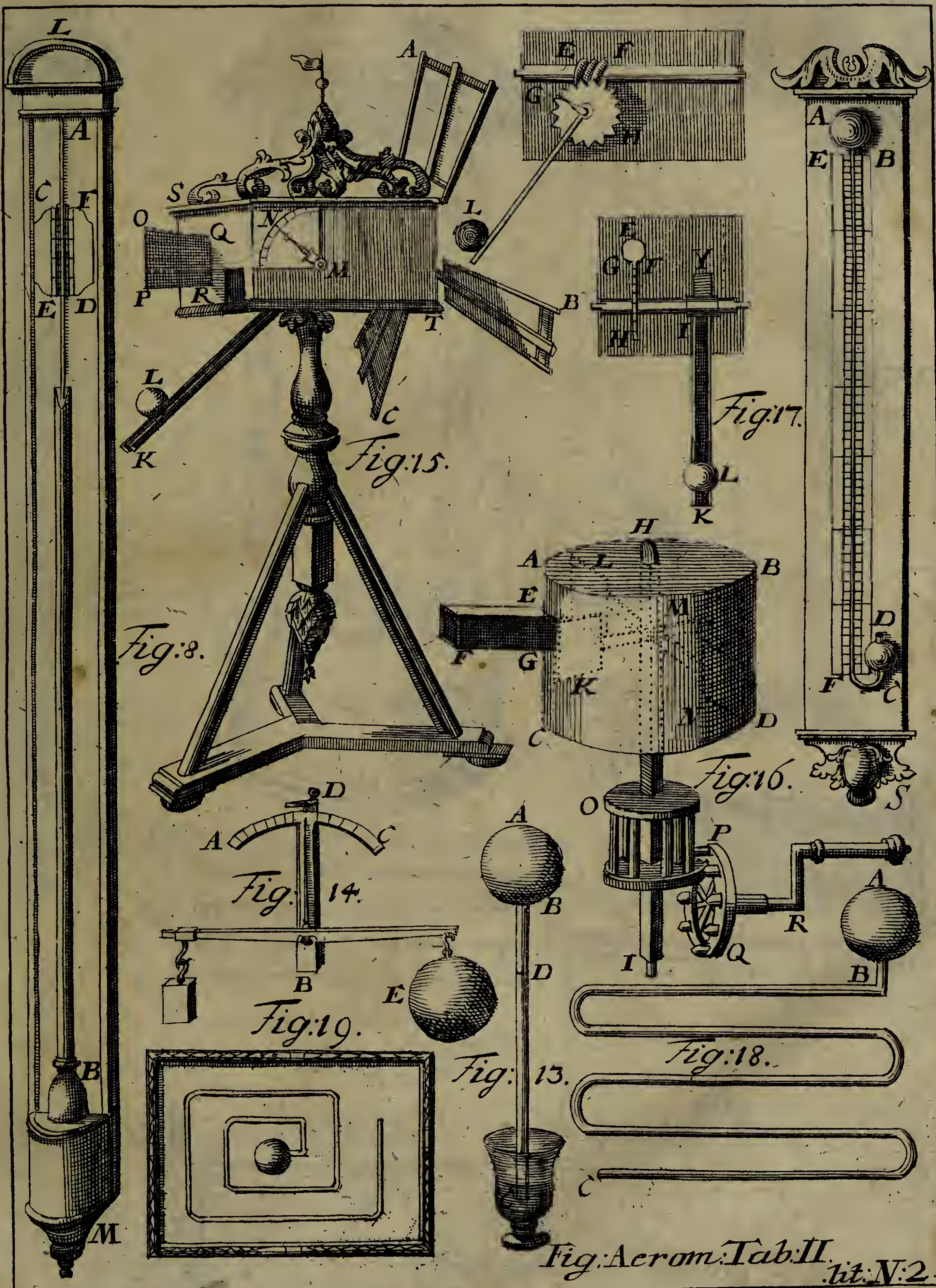


Fig:Aerom:Tab:II. lit:N:2.



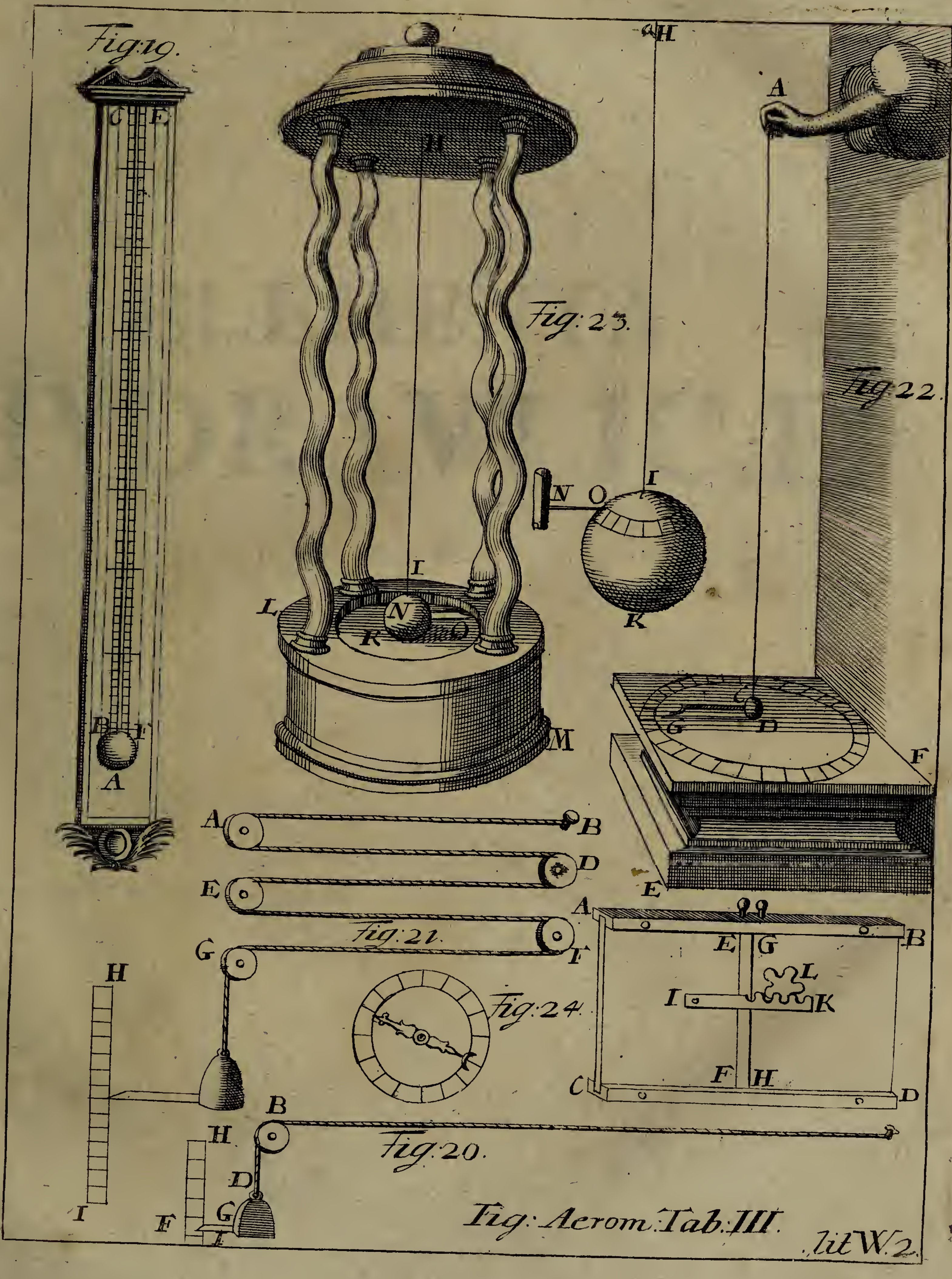


Fig: Aerom: Tab: III.

lit W. 2.



ELEMENTA
HYDRAVLICÆ.

PRÆFATIO.

IN Hydraulica non modo machinarum, quibus aqua elevatur, atque fontium ſalientium conſtructio edoceri debet; ſed explicandæ ſunt præterea leges motus corporum fluidorum. Quemadmodum vero argumentum prius ſtupenda diligentia jam olim excultum fuit, id quod vel ſoli libri ſpiritalium *Heronis* aperte loquuntur; ita diffiteri non poteſt, in altero excolendo nobis adhuc multum relictum eſſe, utut præclara jam dederint viri de Hydraulica optime meriti *Majottus, Caſtellus, Torricellius, Borellus, Guilielminus, Mariottus* & inprimis celeberrimus *Varignonius* (a). Immo ipſa machinarum hydraulicarum conſtructio Matheſeos puræ opem adhuc flagitat. Dignum vero utrumque argumentum quod indies magis magisque excolatur. Si

 enim

(a) Memoires de l' Academie Royal. des Sciences A. 1703. p. 285.

enim machinas hydraulicas fontesque ſalientes ſpectes, de Hydraulica non inepte dixeris, quod vulgo de Poëtis ingeminari ſolet, quod non minus prodeſſe quam delectare velit. Egregia ſcilicet vitæ humanæ commoda præſtat, dum varias vias oſtendit, per quas aqua ad locum datum derivari poteſt. Mirifice delectat, dum jucunda fontium ſalientium aliorumque admirandorum ſpectacula oculis objicit. Leges motus aquarum tum ad ſcientiæ naturalis, tum ad machinarum perfectionem tendunt: & ſi quando perfectam habebimus, motus fluidorum in corpore animali diſtinctius cognoſcetur, unde multa commoda in genus humanum redundabunt. Quamvis vero mihi potiſſimum propoſitum ſit, machinarum hydraulicarum conſtructionem exponere & ad cauſas ſuas revocare; non tamen leges motus fluidorum prorſus inſuper habebo, ſed eas propoſiturus ſum, quæ ad ulteriorem diſquiſitionem viam ſternunt & præ reliquis ſcitu neceſſariæ ſunt. Has meditentur inprimis, quos rerum naturalium cognitio ſolidior juvat. Nemo autem ad Hydraulicam accedat, niſi æquilibrium fluidorum ex Hydroſtatica; proprietates aëris ex Aerometria perſpexerit.

ELE-

ELEMENTORUM HYDRAULICÆ CAPUT I. DE MOTU FLUIDORUM A GRAVITATE PENDENTE.

DEFINITIO 1.

1. **H**Ydraulica eſt ſcientia motus fluidorum, præſertim aquarum.

SCHOLION.

2. *Quare cum in Hydroſtatica explicetur æquilibrium fluidorum, ex ſublato autem æquilibrio motus naſcatur; Hydraulica Hydroſtaticam ſupponit. Unde contigit, ut nonnulli, qui de Hydraulica ſcripſere, hydroſtaticam cum ea conjunxerint.*

DEFINITIO 2.

3. Per *tubum* atque *Canalem* intelligo cylindrum quemcunque AB intus cavum.

DEFINITIO 3.

4. *Lumen* eſt apertura tubi.

DEFINITIO 4.

5. *Epiſtomium* vel *clavicula* eſt inſtrumentum, quo lumen ad arbitrium obturari & aperiri poteſt.

SCHOLION.

6 *Quoniam in machinis Hydraulicis epiſtomii creberrimus eſt uſus, non inconſultum duximus, ut ejus ſtructura hic exponatur.*

PROBLEMA 1.

7. *Epiſtomium vel claviculam conſtruere.* Tab. I. Fig. 2.

RESOLUTIO.

1. Paretur ex orichalco cubus AB CD cum gemina tubi parte GH & EF, quorum altera GH cochlea inſtrui debet, ut ad arbitrium ad tubum vel vas firmari, iterumque ab eo removeri poſſit, aut ſi cochlea deſtituatur, tubo vel vaſi afferruminetur.
2. Cubus cylindrice excavetur, ut cavitati ejus immitti poſſit cylindrus ſolidus HI perforatus in K & in L matrice, in O manubrio inſtructus, ut per cavitatem cylindri trajectus mediante cochlea M in hoc ſitu firmari, & ope manubrii O huc illucque verſari poſſit.
3. Perforetur ſimiliter uterque tubulus GH & EF.

Quodſi enim cylindrum ſolidum HI ita convertas, ut cavitas ejus K foraminibus tubulorum GH & EF reſpondeat, aqua F effluere poteſt; ſi ve-

ſi vero idem cylindrus HI ſoliditatem foraminibus iisdem obvertat, nihil aquæ egredi poterit, adeoque inſtrumentum eſt epiſtomium vel clavicula (§. 5).

SCHOLION.

8. *Perfectiſſimam epiſtomii conſtructionem hic exponere libuit. In praxi enim facile apparebit ex circumſtantiis ſingularibus, ſi qua omitti poſſint. Ita e. gr. communiter omittitur cochlea M cum matrice, qua cylindrum HI intra cavitatem cubi AC firmandum eſſe diximus.*

THEOREMA I.

Tab. I. Fig. 3. 9. *Locus* A, *ad quem aqua ex loco alio* B *ſive per alveum, ſive per tubos aut canales derivanda, humilior ſeu centro Telluris propior eſſe debet hoc ipſo altero.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim aqua non fluat, niſi vi gravitatis, gravitas vero ſit niſus verſus centrum Telluris (§. 4 *Mechan.*); per alveum fluere nequit, niſi quamdiu ad centrum Telluris propius accedere poteſt. Neceſſe igitur eſt, ut locus, ad quem aqua per alveum fluere debet, centro Telluris propior ſit altero, unde derivatur. *Quod erat unum.*

Quodſi aqua per canales BC & CA derivari debet ex B in A, ita ut primum deſcendat ex B in C, deinde rurſus aſcendat ex C in A: ſit DE linea horizontalis per C ducta & BD atque AE ad eandem perpendiculares. Sit jam AE < BD; preſſio aquæ in tubo BC major eſt preſſione aquæ in tubo AC (§. 34 *Hydroſt.*). Iſta igitur prævalet, adeoque aquam AC impellit per A effluxuram. Enimvero ſi AC > BD; quamprimum aqua in tubo AE aſcendit ad altitudinem ipſi BD æqualem, alteri in tubo BC æquilibratur (§. 34 *Hydroſt*), ab ea igitur ad ulteriorem aſcenſum ſollicitari nequit (§. 62 *Mechan.*). Sed vi gravitatis deorſum nititur verſus C (§. 4 *Mechan.*), adeoque nec vi intrinſeca aſcendere poteſt. Ibi igitur ſubſiſtit, conſequenter aqua ex loco B in alium A per tubos aut canales recurvos derivari nequit, niſi A ſit humilior B. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM I.

10. Cum alveus vel tubus BC, per quem aqua fluit ex B in C, ſit planum inclinatum (§. 208 *Mechan.*); ad aquas fluentes applicari poſſunt, quæ in Mechanica cap. 6 de deſcenſu gravium in plano inclinato demonſtrata ſunt.

COROLLARIUM 2.

11. Sunt igitur velocitates aquarum per diverſos tubos fluentium eodem tempore acquiſitæ ut tuborum longitudines reciproce (§. 249 *Mechan*).

SCHO-

SCHOLION.

12. *Inſuper hic & in ſequentibus habemus reſiſtentiam, quæ oritur ex affrictu in fundo alvei & parietibus tubi* (§. 653 Mechan.).

PROBLEMA 2.

13. *Aquam ex loco uno derivare in alterum.*

RESOLUTIO.

1. Libelletur aqua (§ 624 *Mech.*), hoc eſt, inveſtigetur, quam propior centro Telluris ſit locus, ad quem aqua derivanda eſt, altero, unde derivatur.
2. Quodſi locus ille hoc humilior fuerit, non alia re opus eſt, quam ut aqua vel per canalem, vel per tubos declives ex loco excelſiore in humiliorem deducatur, prout vel magna, vel exigua ejus ſuppetit copia.
3. Ut aquam per intervalla nobis commoda viſa effundatur, extremum tubi epiſtomio muniatur (§. 5).
4. Et quia experientia teſte fontes naturales non omni tempore eandem aquæ copiam effundunt; non modo tubus capacior fieri debet, ſed & circa fontem alveus quidam muro includendus, ut aqua intra ipſum aſſurgens inferius in tubum ruentem fortius premat, ſicque per ipſum celerius fluat.
5. Si tubus vel canalis per intervalla ſufficientem aquæ copiam non præbeat, aut præbeat nimis tarde; aqua remoto epiſtomio continuo fluens intra puteum ex ſaxis exſtructum colligatur neceſſe eſt: qui tanto amplior vel profundior fieri debet, quo terminus ad quem fuerit termino a quo humilior.
6. Si denique aqua ad terminum infimum C delapſa rurſus aſcendere debet, deducenda eſt per canales inclinatos BC & CA, ita ut altitudo AE fuerit minor altitudine BD (§. 7). Tab. I. Fig. 3.

SCHOLION 1.

14. *Utimur autem in deducendis aquis tubis vel ligneis, vel plumbeis, vel argillaceis, aut canalibus lapideis. Luminis diameter in tubo ligneo eſt* 4, 5 *vel* 6 *digitorum pro quantitate aquæ effundendæ, conjunguntur autem annulo ferreo CD. Tubis plumbeis locus eſt, ſi aqua in altum elevanda ad fontes ſalientes; neque vero ſanitati conducere deprehenſa eſt, quæ per plumbeos fluit. Argillaceorum interior ſuperficies lithargyrio obducenda; immo & exterior, niſi ſumtibus parcas. Longitudo eorum eſt duorum aut unius & dimidii pedum, craſſities duorum digitorum, diameter luminis duorum aut trium. Commiſſuris pyxidatis conjunguntur, quæ calce viva oleo permixta obducuntur.* Tab. I. Fig. 4.

SCHOLION 2.

15. *In alveo, quem prope fontem conſtruxiſti, ita aptandus eſt tubus, ut aquam nec ex fundo nec ex ſuperficie hauriat, quia prope fundum turbida, gravioribus quæ in aquam incidunt eandem petentibus, ſuperficiei vero inſecta aliaque impuritates leviores innatant. Solent etiam ad*

arcendas ſordes lumini canalis primo cribrum ferreum, ſed ſtanno obductum apponere, immo ad percolendam aquam turbidam ſpongiam. Ut aqua conſervetur limpida, alveum tecto aut fornice muniri præſtat.

SCHOLION 3.

16. *Ne Aer interceptus curſum aquarum in canali intercipiat, ſed exitus ei concedi queat, utq; canalis ipſe purgari poſſit, quoties opus fuerit; hinc inde eſt perforandus & obturaculo P figuram coni truncati habente foramen obturandum.*

SCHOLION 4.

17. *Cæterum omni ſtudio in deducendis aquis vitandus eſt aquarum aſcenſus, quia aqua aſcendens majorem vim infert tubis, quam deſcendens.*

PROBLEMA 3.

18. *Fontem naturalem arte conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. In loco elevato paretur foſſa aggeribus undiquaque cincta & variis meatibus ex cruſtis lapideis excitatis hinc inde diſtincta, qui omnes in unum hient exiguo foramine inſtructum.
2. Foſſa hæc deſuper ſilicibus, calculis & ad duos treſve pedes glarea operiatur, & quicquid aquæ pluvialis aliunde derivari poteſt, cum cura eo derivetur.

Ita enim per glaream & calculos in meatus deſtillabit aqua & filtrata ab exhalationibus immixtis purgabitur, atque per orificium meatus ultimi ad radicem foveæ profluet.

SCHOLION.

19. *Si intra meatus foveæ tot aquæ non contineatur, ut perennis fluat, orificio meatus ultimi tubus cum epiſtomio aptandus.*

THEOREMA 2.

20. *Si duo tubi æquales altitudines* AB *&* CD *atque æqualia lumina* E *&* F *habuerint, fuerintque ambo conſtanter pleni; æquali tempore æquales aquæ quantitates effundent.* Tab. I. Fig. 5.

DEMONSTRATIO.

Quoniam lumina E & F æqualia ſunt & altitudines aquæ ſuper iisdem etiam æquales, *per hypoth.* aquæ luminibus proxime imminentes eadem vi premuntur (§. 42 *Hydroſt.*), adeoque æqualia volumina æqualem adhibent egrediendi conatum, conſequenter ſi aqua actu egreditur, æquali tempore æquales quantitates fluunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

21. Quoniam fundus tubi perpendicularis eadem vi premitur, qua fundus inclinati, ubi utriusque altitudo eadem fuerit, ipſique fundi inter ſe æquentur (§. 47 *Hydroſt.*); ſi tuborum utcunque inclinatorum, modo æquealtorum lumina fuerint æqualia, tubique conſtanter pleni, eodem tempore eadem aquæ quantitas effluet.

THEOREMA 3.

22. *Si duo tubi æquales altitudines* AB, *&* CD, *ſed lumina inæqualia* Tab. I. Fig. 6.

lia E *&* F *habuerint, fuerintque conſtanter pleni; quantitates aquarum effluentium eodem tempore ſunt ut lumina* E *&* F.

DEMONSTRATIO.

Concipiatur lumen majus diviſum in plura minora alteri E æqualia: per ſingulas majoris partes æquali tempore quantitates aquæ effundentur illi æquales, quæ per lumen minus effunditur (§. 20). Sunt adeo quantitates aquarum per utrumque lumen tempore æquali effuſarum ut lumen minus ad numerum partium, in quas diviſum concipitur majus, hoc eſt, ut lumen minus ad majus (§. 78 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

23. Si lumina fuerint circularia; quantitates aquæ eodem tempore ex tubis æque altis & conſtanter plenis effuſæ ſunt in ratione duplicata diametrornm luminis (§. 387 *Geom.*).

SCHOLION I.

24. *Theorema cum corollario etiam valere de tubis quomodocunque inclinatis, patet ex corol. theor.* 2. (§. 21).

SCHOLION 2.

25. *Legem hanc experimentis non exacte reſpondere autor eſt* Mariottus (a). *Obſervavit enim, ſi diameter luminis F erat diametri luminis E dupla, ex tubo minore plus quam quartam aquæ ex majore effluentis partem eodem tempore effundi, tuborum altitudine medica exiſtente. Enimvero in demonſtratione abſtrahimus ab omnibus obſtaculis accidentalibus, quæ irregularitatem inducere ſolent, qualia plura hic concurrunt. Scilicet altitudo aquæ ſuper lumine minor, quam ad latera vaſis: aqua enim in ea voluminis parte, quæ lumini reſpondet, cavitatem aſſumit, cum effluenti non extemplo alia a lateribus ſuccedere valet. Quoniam vero hoc decrementum altitudinis majus eſt in tubo majore, quam in minore, preſſura quoque ſeu exeundi conatus minor erit in majore, quam in minore* (§. 44 Hydroſt.). *Porro dum aqua ſuperior effluentis locum occupare nititur, vim, qua premit, ad deſcendendum impendit, non ad premendum. Unde denuo conatus ad exeundem minuitur. Tandem hic quoque habenda eſt reſiſtentia aeris & affrictus aquæ in ſuperficie tubi & orificio inprimis ratio. Enimvero omnia illa impedimenta ad certas leges nondum revocata: immo hactenus nequidem conſtitutum eſt, quodnam eorum in caſu quolibet dato prævaleat.* Dechales (b) *affrictus unice rationem habens, in aqua effundendenda prærogativam majoribus luminibus tribuit, quia proportionaliter minorem ſuperficiem habent, cum tamen ex modo dictis pateat,* Mariottum *prorſus contrarium expertum eſſe. Ipſe vero* Mariottus (c) *non diffitetur, dari ſubinde cauſas, quæ multas irregularitates inducant, ita ut nunc majoribus, nunc minoribus luminibus in aqua effundenda tribuenda ſit prærogativa, & aſſertum ſuum experimentis confirmat.*

THEOREMA 4.

26. *Si duorum tuborum conſtanter plenorum* AB *&* CD *lumina* E *&* F. Tab. I. Fig. 7.

Hhh hh 2

(a) Trait. du mouvement des Eaux part. 3. diſc. 1. p. 267.
(b) in Tract. de fontibus naturalibus prop. 30. f. 132 Tom. 3 Mund. Mathem.
(c) loc. cit. diſc. 2. p. 276.

& F æqualia fuerint; quantitates aquarum eodem tempore effluentium ſunt ut celeritates.

DEMONSTRATIO.

Ponamus e. gr. aquam ex tubo AB effluere ea celeritate, quæ ſit ad alteram ex tubo CD effuſæ in ratione dupla. Quia hic tantum ratio habetur motus inſtantanei per foramen; motus aquæ ut æquabilis conſiderari poteſt, adeoque celeritates erunt ut ſpatia eodem tempore percurſa (§. 28 *Mechan.*). Quodſi ergo filum aliquod aquæ in tubo AB extenderetur usque ad G; filum ex altero usque ad I: erunt longitudines EG & IF in ratione dupla ſeu celeritatum. Enimvero quantitates aquarum eodem tempore effluentium ſunt ut fila iſta ſeu cylindri EF & FI: quorum baſes E&F cum æquales ſint, *per hypoth.* altitudinum EG & FI rationem habent (§. 511 *Geom.*). Sunt adeo etiam quantitates aquarum effluentium ut celeritates (§. 156 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 5.

Tab. I. Fig. 7. 27. *Si duo tubi habuerint lumina* E *&* F *æqualia, ſed altitudines* AB *&* CD *inæquales, fuerintque conſtanter pleni, quantitas aquæ effluentis ex majore* AB *erit ad quantitatem aquæ effluentis ex minore* CD *eodem vel æquali tempore, in ratione ſubduplicata altitudinum* AB *&* CD.

DEMONSTRATIO.

Cum vires aquas per lumina E & F expellentes ſint gravitates abſolutæ aquarum luminibus imminentium; ob luminum æqualitatem *per hypoth.* altitudinum AB & CD rationem habent (§. 511 *Geom.*). Sed quia gravia tantum prementia ſunt vires mortuæ (§. 9 *Mech.*), ſi quantitates aquarum eodem tempore effluentium fuerint ut A & *a*, celeritates ut C & *c*; erunt vires ut AC ad *ac* (§. 226 *Mechan.*), conſequenter $AC : ac = AB : CD$ (§. 126 *Arithm.*). Eſt vero etiam $A : a = C : c$ (§. 26), adeoque (cum porro ſit $A : a = A : a$) $AC : ac = A^2 : a^2$ (§. 197 *Arithm.*). Quare $A^2 : a^2 = AB : CD$ (§. 156 *Arithm.*) & hinc $A : a = \sqrt{AB} : \sqrt{CD}$ (§. 104 *Analyſ. finit.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

28. Altitudines aquarum AB & CD per æqualia lumina E & F effluentium ſunt in ratione duplicata ipſarummet aquarum eodem tempore effuſarum.

COROLLARIUM 2.

29. Et quia quantitates aquarum fluentium ſunt ut velocitates (§. 26); velocitates quoque erunt in ratione ſubduplicata altitudinum.

PROBLEMA 4.

30. *Data ratione aquarum effluentium per utrumque tubum* AB *&* CD Tab. I. Fig. 7.

CD *una cum altitudine unius, invenire altitudinem alterius.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur ad data numerus quartus proportionalis (§. 272 *Arithm.*).
2. Ducatur is in ſeipſum: erit factum altitudo CD quæſita (§. 28).

SCHOLION 1.

31. *Cum ex altitudine data rariſſime radicem perfectam extrahere liceat, ut altitudo quæſita exacte inveniatur, per regulas Arithmeticæ irrationalium operandum. Sit e. gr. ratio data* 3 : 5, *altitudo data* 7, *reperietur radix altitudinis quæſitæ* $5\sqrt{7} : 3$. *Unde habetur altitudo ipſa quæſita* $\frac{25}{9} \cdot 7 = \frac{175}{9} = 19\frac{4}{9}$.

SCHOLION 2.

32. *Quodſi cui leges Algorithmi irrationalium non fuerint perſpectæ, is faciat ut* 3 *ad* 5 *ita* 7 *altitudo data ad numerum quartum proportionalem* $\frac{35}{3}$ *& porro ut* 7 *ad* $\frac{35}{3}$ *ita* $\frac{35}{3}$ *ad altitudinem quæſitam, quæ ut ante* $= \frac{5 \cdot 35}{9} = \frac{175}{9} = 19\frac{4}{9}$. *Sit enim univerſaliter* $3 : 5 = a : b$, $7 = c$; *reperietur per reſolutionem problematis altitudo quæſita* $= b^2 c : a^2$. *Sed quarta proportionalis ad* a, b *&* c *eſt* $bc : a$ *& tertia proportionalis ad* c *&* $bc : a$ *eſt ut ante* $b^2 c : a^2$.

PROBLEMA 5.

33. *Data ratione altitudinum tuborum conſtanter plenorum & per æqualia lumina aquas effundentium, una cum quantitate aquæ ex uno effuſa, invenire quantitatem aquæ eodem tempore ex altero effluentem.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur ad altitudines datas & quadratum quantitatis aquæ per lumen unum effuſæ numerus quartus proportionalis (§. 272 *Arithm.*), qui erit quadratum quantitatis aquæ per lumen alterum effluentis (§. 28).
2. Inde itaque ſi radicem quadratam extrahas (§. 248 *Arithm.*) prodibit ipſa quantitas aquæ quæſita.

E. gr. Sint altitudines tuborum ut 9, ad 25, quantitas aquæ ex uno tubo effuſa trium pollicum; erit quantitas aquæ ex altero effluens $= \sqrt{(9 \cdot 25 : 9)} = \sqrt{25} = 5$.

THEOREMA 6.

34. *Si duorum tuborum conſtanter plenorum altitudines* AB *&* CD *fuerint inæquales, lumina* E *&* F *itidem inæqualia; erunt quantitates aquarum eodem tempore effluentium in ratione compoſita ex ſimplici luminum & ſubduplicata altitudinum.* Tab. I. Fig. 7.

DEMONSTRATIO.

Sit altitudo communis duorum tuborum lumina inæqualia L & *l* habentium $= a$, quantitates aquarum eodem tempore effluentium ſint P & *q*. Porro altitudo tubi tertii $= A$, lumen $= L$, quantitas aquæ dato tempore effluentis Q: erit

$$P : q = L : l \quad (\S. 22).$$
$$Q : P = \sqrt{A} : \sqrt{a} \quad (\S. 27).$$

 Ergo

Ergo PQ : Pq = L$\sqrt{}$A : $l\sqrt{a}$ (§. 197 *Arithm.*).
Unde Q : q = L$\sqrt{}$A : $l\sqrt{a}$ (§. 172 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

35. Si Q = q; erit L$\sqrt{}$A = $l\sqrt{a}$, conſequenter L : l = $\sqrt{a}$: $\sqrt{}$A (§ 269 *Arithm.*) & $L^2 : l^2 = a : A$ (§ 239 *Arithm.*), hoc eſt, ſi quantitates aquarum ex duobus tubis conſtanter plenis & altitudines atque lumina inæqualia habentibus eodem tempore effluentes fuerint æquales; lumina ſunt reciproce ut radices altitudinum, altitudines vero in ratione reciproca quadratorum luminum.

THEOREMA 7.

36. *Si altitudines duorum tuborum conſtanter plenorum* AB *&* CD *æquales fuerint, aquæ per lumina* E *&* F *utcunque inæqualia eadem celeritate effluunt.* Tab. I. Fig. 6.

DEMONSTRATIO.

Illud per ſe patet, ſi præter altitudines etiam lumina fuerint æqualia, aquam ex utroque tubo, eadem celeritate egredi. Concipiamus itaque lumen majus diviſum in partes quotcunque, quæ ſingulæ minori lumini æquales ſint. Quoniam aqua, quæ per partem luminis movetur, non aliter movetur, ac ſi per reliquas nihil flueret, cum impetus totus pendeat a preſſione perpendiculariter imminentis; evidens eſt, eandem in ſingulis partibus lumini minori æqualibus eadem celeritate moveri, qua fertur per lumen minus. Aqua igitur per totum lumen majus eadem celeritate fluit, qua per minus. *Q. e. d.*

THEOREMA 8.

37. *Si altitudines tuborum conſtanter plenorum* AB *&* CD, *itemque lumina* E *&* F *inæqualia fuerint; celeritates aquarum effluentium ſunt in ratione ſubduplicata altitudinum.* Tab. I. Fig. 7.

DEMONSTRATIO.

Sint altitudines trium tuborum α, a & A, lumina eorundem L, l & L, velocitates aquarum effluentium u, v & c. Quia L = L; erit $u : c = \sqrt{\alpha} : \sqrt{}$A (§. 29). Eſt vero $\alpha = a$, *per hypoth.* adeoque $\sqrt{\alpha} = \sqrt{a}$. Ergo $u : c = \sqrt{a} : \sqrt{}$A (§. 157 *Arithm.*). Porro ob $\alpha = a$, *per hypoth.* etiam $u = v$ (§. 36). Ergo $v : c = \sqrt{a} : \sqrt{}$A (§. 157 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

38. Cum altitudinibus inæqualibus exiſtentibus aquarum per æqualia lumina fluentium celeritates ſimiliter ſint in ratione altitudinum ſubduplicata (§. 27), hæc vero ratio æqualis fit, ſi altitudines æquales; patet in genere celeritates aquarum ex tubis conſtanter plenis effluentium eſſe in ratione altitudinum ſubduplicata.

CO-

COROLLARIUM 2.

39. Quadrata igitur velocitatum ſunt ut altitudines (§. 239 *Arithm.*).

SCHOLION.

40. Mariottus (d) *multiplici experimento docuit, ſi ad vas ABCD applicetur tubus EF, plus aquæ per tubum æquali tempore effluere, quam per idem lumen vaſis E, tubo remoto, & motum aquæ eo magis accelerari, quo tubus EF longior. Cum altitudo vaſis AC eſſet unius pedis, tubi vitrei EF longitudo trium pedum, diameter luminis trium linearum; intervallo unius minuti effundebantur* $6\frac{1}{6}$ *ſextarii aquæ, tubo autem remoto nonniſi* 4 *circiter. Cum longitudo tubi EF eſſet* 6 *pedum, diameter luminis F unius digiti, aqua omnis intra* 37 *minuta ſecunda effluxit. Cum vero tubi dimidium FH reſcinderetur, vas integrum intra* 45''; *tubo prorſus remoto, intra* 95'' *evacuatum eſt.*

THEOREMA 9.

41. *Si duo tubi* AB *&* CD *fuerint* Tab. I. Fig. 5. *ejusdem altitudinis & lumina* E *atque* F *æqualia habuerint; tempora, quibus deplentur, ſunt in ratione baſium.*

DEMONSTRATIO.

Sit baſis tubi CD dupla baſis tubi AB. Quoniam altitudines æquales ſunt *per hyp.* quantitates aquarum in tubis contentæ baſium rationem habent (§ 511 *Geom.*), adeoque ex hypotheſi aqua in tubo CD dupla eſt aquæ in tubo AB. Concipiatur altitudo utriusque tubi in partes infinite parvas diviſa, erit cylindrulus ejusmodi altitudinis in tubo majore CD duplus cylindruli in tubo minore AB. Uterque autem in utroque tubo eadem celeritate per lumen ejicitur (§. 36) & quia lumina æqualia ſunt *per hypoth.* eædem quantitates aquæ eodem inſtanti fluunt per utrumque lumen. Ergo eodem tempore, quo cylindrulus HI effluit, nonniſi dimidium alterius LK ejicitur: ut adeo alterum dimidium expellatur, opus eſt inſtanti altero. Tempuſcula itaque, quibus cylindruli HI & LK effluunt, ſunt in ratione ſubdupla, nempe ut baſes tuborum AB & CD. Idem cum de cœteris eodem modo demonſtretur, patet tempora, quibus integri tubi evacuantur, eſſe in ratione baſium (§. 178 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 10.

42. *Vaſa cylindrica & priſmatica* ABCD *ita deplentur, ut quantitates aquarum temporibus æqualibus effluentium decreſcant ſecundum numeros impares ordine retrogrado ſumtos.* Tab. I. Fig. I.

DEMONSTRATIO.

Velocitas nempe libellæ FG deſcendentis continuo decreſcit in ratione ſubduplicata altitudinum decre-

(d) Traité du mouvement des eaux part. 3. diſc. 6. p. 269 & ſeqq.

decreſcentium (§. 38). Velocitas gravis deſcendentis creſcit in ratione ſubduplicata altitudinum creſcentium (§. 73 *Mechan.*). Talis igitur eſt motus libellæ FG ex G in B deſcendentis, ac ſi inverſa ratione ex B in G deſcenderet. Sed ſi ex B in G deſcenderet, æqualibus temporibus ſpatia creſcerent ſecundum numerorum imparium progreſſionem (§. 72). Ergo ſecundum eandem progreſſionem inverſe ſumtam altitudines libellæ FG æqualibus temporibus decreſcunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

43. Libella igitur aquæ FG eadem lege deſcendit, qua vi impreſſa per altitudinem ipſi GB æqualem aſcenderet (§. 267 *Mechan.*).

SCHOLION.

44. *Ex hoc principio multa alia de motu fluidorum demonſtrari poſſunt, quæ nunc brevitatis gratia omittimus.*

PROBLEMA 6.

45. *Vas quodcunque cylindricum dividere in partes ſingulis temporibus vacuandas, dato tempore, quo depletur totum, itemque tempore, quo depletur pars una.*

RESOLUTIO.

Sit e. gr. Vas cylindricum, cujus omnis aqua intra 12 horas effluit, dividendum in partes ſingulis horis evacuandas.

1. Fiat ut pars temporis 1 ad tempus integrum 12 ita idem tempus 12 ad numerum quartum proportionalem 144.
2. Dividatur altitudo vaſis in partes 144 æquales. Dico ultimam cedere horæ ultimæ, tres proxime ſuperiores horæ penultimæ, quinque ulteriores horæ decimæ &c. 23 denique poſtremas horæ primæ.

DEMONSTRATIO.

Cum enim tempora creſcant in ſerie numerorum naturalium 1, 2, 3. 4. 5 &c. altitudines vero, ſi numeratio ordine retrogrado fiat ab hora duodecima, creſcant in ſerie numerorum imparium 1 3. 5. 7. 9 &c. (§. 42); erunt altitudines ab hora undecima computatæ ut quadrata temporum 1. 4. 9. 16. 25 &c. (§. 70 *Analyſ. finit.*). Quadratum ergo temporis integri 144 complectitur omnes altitudinis vaſis evacuandi partes. Sed numerus tertius proportionalis ad 1 & 12 eſt quadratum ipſius 12 (§. 226 *Arithm.*), conſequenter numerus partium æqualium, in quas altitudo dividenda, ſecundum ſeriem numerorum imparium per horarum intervalla æqualia diſtribuendus (§. 42). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

46. Cum partibus ejusdem vaſis ſub-

ſubſtituere liceat vaſa minora ipſis æqualia; data altitudine vaſis intra datum temporis ſpatium deplendi, inveniri poteſt altitudo vaſis alterius intra tempus datum aliud evacuandi, faciendo nempe altitudines ut temporum quadrata.

SCHOLION.

47. *Patet ergo methodus clepſydras conſtruendi, quibus veteres uſos eſſe conſtat.*

THEOREMA II.

48. *Si aqua per tubum HE deſcendens per lumen G, cujus directio verticalis, proſiliat, ad eum altitudinem GI aſcendit, ad quam libella aquæ LM in vaſe* ABCD *conſiſtit.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam aqua per lumen G, vi gravitatis columnæ EK impellitur; ea ipſius celeritas eſt, quæ corporis vi impreſſa per altitudinem FI aſcendentis (§. 34 *Hydroſt.*). Quare cum directio luminis ſit verticalis *per hypoth.* adeoque aquæ per lumen G prorumpentis directio itidem verticalis exiſtat, nec quicquam ſit, quod eandem mutet extra tubum; aqua ſurſum feratur neceſſe eſt ad eam altitudinem GI, ad quam libella aquæ LM in vaſe conſiſtit. *Q. e. d.*

SCHOLION I.

49. *Experientia conſtat, aquam per lumen G proſilientem elevari ad altitudinem ipſa GI minorem. Conſtat præterea, lumen G eo minus eſſe debere, quo minor eſt altitudo libellæ LM in vaſe ABCD. Immo propriis experimentis didici, minus eſſe debere lumen, ſi mercurius ſalire debet, quam ut aqua ſaliat. Inde vero non concluditur theorematis falſitas; ſed tantum colligitur, ſubeſſe impedimenta quædam, quæ aſcenſui reſiſtant. In ea igitur inquirendum.*

SCHOLION 2.

50. *Plerique præcipuam reſiſtentiæ cauſam aerem allegare ſolent, per quem aqua ſaliens aſcendit. Enimvero quamvis non negem, aeris reſiſtentiæ inter impedimenta locum aliquem eſſe concedendum, quæ obſtant, quo minus ad eam præciſe altitudinem aſcendat, unde decidit; cauſis tamen aliis majorem reſiſtentiæ totalis partem tribuendam eſſe, mihi quidem ſatis probabile videtur. Aquas enim in vaſe ab aere evacuato* (§. 40 Aerom.) *ſalientes non ulteriorem terminum attingere quam in libero aere, iterato experimento didici: ut ut in hoc aqua ſaliens FI longe infra libellam aſcenſum ſiſteret. Illud autem obſervare licuit, aquam in vacuo minime in tot guttulas ramuloſque dividi, in quot in aere diſpergitur; ſed fere unitam verſus eam plagam defluere, verſus quam lumen G parumper inclinatur. Unde apparet, figuram aquæ verticaliter ſalientis magis ab aere reſiſtente immutari, quam celeritatem minui. In majoribus tamen ſaltibus, circa quos experimenta in vacuo capere non licet, aeris reſiſtentiam ſenſibiliorem eſſe puto. Ipſa enim aquæ in guttulas ramuloſque diviſio fieri nequit, niſi aliqua celeritatis parte imminuta, quemadmodum ex regulis motus abunde conſtat.*

SCHOLION 3.

51. *Cæterum hinc mirum non eſt, quod regula* Mariotti *defectum altitudinis GI a perpendiculo aquæ computandi, quam reſiſtentiæ aeris potiſſimum ſuperſtruxit* (e), *& qua defectus iſti in*ra

(e) Traité du mouvement des eaux part. 4. diſc. I. p. 304 & ſeqq.

ratione duplicata altitudinum eſſe perhibentur, non ſatis exacte experientiæ reſpondeat. Quoniam tamen ejus aliquis eſſe poteſt uſus; ideo non piget tabulam hic apponere, in qua altitudinibus aquarum ſalientium altitudines tuborum, per quos delabuntur, juxta illam aſſignantur, in pedibus quidem Pariſinis & ejus digitis ſeu partibus duodecimis.

Altitudo aquarum ſalientium.	Altitudo tuborum.		Altitudo aquarum ſalibentium.	Altitudo tuborum.	
5′	5′	1″	55′	55′	121″
10	10	4	60	60	144
15	15	9	65	65	169
20	20	16	70	70	196
25	25	25	75	75	225
30	30	36	80	80	256
35	35	49	85	85	289
40	40	64	90	90	324
45	45	81	95	95	361
50	50	100	100	100	400

SCHOLION 4.

52. *Ego quidem multum tribuo gravitati aquæ aſcendentis, quia obſervavi quod argentum vivum ad minorem altitudinem elevatur, quam aqua. Nimirum guttarum anteriorum motus ſi langueſcit, poſteriores in eas incurrentes retardantur : id quod ipſiſmet oculis ſuis videre poterit, qui aquas ſalientes attentius contemplare voluerit. Atque inde eſt, quod, ſi lumen G angulo quantolibet exiguo inclinetur, ut aqua ſaliens a perpendiculo non admodum declinare videatur, ſaltus altitudo ſtatim major evadat. Huc pertinet, quod* Torricellius (f) *a ſe obſervatum annotavit. Quando, inquit, oppoſita manu foramen G penitus occluditur, deinde retracta „aquam citiſſime manu repente aperitur : vi„debuntur primæ & præeuntes guttæ altius per„venire, quam ſit deinceps culmen I, poſtquam „aqua deorſum fluere cœperit. Addo quod diſperſionem in guttulas ipſa gravitas aquæ juvet.*

SCHOLION 5.

53. *Maximum autem impedimentum in affrictu poſitum eſt : unde lumen ſeu orificium G optime lævigatum requiritur.*

SCHOLION 6.

54. *Quamvis autem lumen non nimis ingens eſſe debeat, ut ſufficiens aquæ copia conſtanter affluere poſſit, cum alias ſaltus non modo minuatur, ſed prorſus impediatur ; idem tamen nec nimis exiguum ſit neceſſe eſt. Experimur enim, aquæ ſalientis altitudinem majorem eſſe, ſi lumen majus, quam ubi minus fuerit. Certe* Mariottus (g) *obſervavit aquam ſalientem per lumina in eadem linea horizontali ſita & in eodem tubo facta, quorum diametri erant unius, 4, 6, 10, 12 &c. linearum, notavitque altius aſcendere eam, quæ per majo-*

(f) De motu projectorum lib. 2. Oper. Geometr. p. 192.
(g) Traitè du mouvement des eaux part. 4. diſc. 1. p. 303.

majora egreditur, quam quæ per minora ejicitur.

THEOREMA 12.

Tab. I. Fig. 55. *Aqua per tubum inclinatum* AB *vel per tubum quomodocunque inflexum* CD *deſcendens per lumen* G *ad eam altitudinem* GI *aſcendit, ad quam aqua in vaſe* HK *ſubſiſtit.*

DEMONSTRATIO.

Aqua ad lumen G eadem vi impellitur, qua impellitur ad lumen P in tubo NO (§. 34 *Hydroſt.*). Sed vi impreſſa per lumen P aſcendit ad altitudinem altitudini libellæ ML æqualem (§. 48). Ergo etiam per lumen G ſaliens ad eandem altitudinem aſcendere debet. *Q. e. d.*

SCHOLION.

Tab. I. Fig. 56. *Veritatem theorematis experimento confirmaturus fieri curavi ex lamina ferrea ſtanno obducta vas HK figuram parallelepipedi habens. Ad fundum afferruminari juſſi quatuor tubos, quorum duo NO & ST ſunt ad fundum perpendiculares, ſed inæqualium diametrorum, tertius AB eſt inclinatus, quartus vero CD ex pluribus partibus diverſimode inclinatis compoſitus; omnes una ad fundum pelvis RZ aquam ſalientem excipientis afferruminati. Denique in M & L ad vas aptati ſunt tubuli inclinati, ut, ſi per canalem* a b *plus aquæ affluat, quam per lumina tuborum G ſalit, ſuperflua per eos effluat: (quo artificio quoque utendum, ſi experiri volueris, quæ in antecedentibus de motu aquarum in tubis conſtanter plenis demonſtrata ſunt). Quamdiu igitur aqua eandem libellam ML tuebatur, altitudo ſalientium per omnes tubos erat eadem, neque augebatur, unius, duorum vel trium luminibus obturatis. Quodſi vero libella ML vel deſcenderet vel obturatis tubulis in M & L aſcenderet; ſalientium quoque altitudines omnes æqualiter decreſcebant, vel augebantur.*

THEOREMA 13.

57. *Aquarum per lumen horizontale vel ad horizontem inclinatum D ſalientium longitudines* DE *&* DF, *vel* IH *&* IG, *ſunt in ratione ſubduplicata altitudinum in vaſe vel tubo* AB *&* AD. Tab. I. Fig. II.

DEMONSTRATIO.

Quoniam aqua per lumen D ejecta vi impreſſa per lineam horizontalem DF progredi nititur (§. 62 *Mechan.*), vi gravitatis autem deorſum tendit per rectas ad eam perpendiculares (§. 170 *Mechan.*), nec vis una alteram impedire poteſt, quia directiones non ſunt contrariæ; aqua a premente AB impulſa eodem tempore pervenit ad rectam IG ipſi DF parallelam, quo aqua a premente AD impulſa eandem attingit (§. 96 *Mechan.*), ſuntque rectæ IH & IG ſpatia, quæ interea vi impetus impreſſi deſcripſiſſent eædem aquæ. Sunt vero ſpatia IH & IG, quia motus per DF eſt uniformis (§. 344 *Mech.*), ut celeritates (§. 28 *Mech.*); celeritates in ratione ſubduplicata altitudinum AB & AD (§. 38): ergo longitudines quoque aquarum per lumina horizontalia vel inclinata ſalientium ſunt in ratione ſubduplicata

altitudinum (§. 156 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

58. Cum in medio non reſiſtente omne corpus vel horizontaliter, vel oblique projectum parabolam deſcribat (§. 334. 336 *Mech.*); aqua etiam per lumen horizontale, vel ad horizontem inclinatum ſaliens parabolam deſcribit.

COROLLARIUM 2.

59. Aqua igitur per plures tubos inclinatos, in eadem recta collocatos, ſaliens arcuatum opus efficit, ſub quo citra periculum madeſcendi deambulare licet.

SCHOLION 1.

60. *Jucundum admodum ſpectaculum præbent ejusmodi arcus aquei, dum radiis ſolaribus illuſtrati iridis coloribus ſuperbiunt.*

SCHOLION 2.

61. *Equidem tum aeris reſiſtentia, tum aquæ facilis diviſio impediunt, quo minus arcus ſint exacte parabolici; ſed qui ſpectaculo ad oblectandum in hortis deambulantes utuntur, parum curant, quamnam figuram opus arcuatum referat.*

CAPUT II.

DE MOTU FLUIDORUM VI AERIS CONTIGUI PRODUCENDO.

PROBLEMA 7.

62. *Conſtruere vas ad hortos irrigandos idoneum.*

RESOLUTIO.

Tab. I. Fig. 12.
1. Fiat vas cylindricum ABCD, exiguo orificio E inſtructum, ut digito appoſito claudi poſſit.
2. Fundus vaſis CD conſtet ex lamina exiguis foraminulis pertuſa.

Vel.

Fiat vas ſphæricum AB collo tenui AE inſtructum, & hemiſphærium DCB ſit ut ante foraminulis pertuſum. Tab. I. Fig. 13.

Dico, ſi utrumque vas in aquam demergas, eam per foraminula fundi intrare: ſi digito ad orificium E applicato vas extrahas, nihil aquæ effluere: ſi tandem digitum iterum removeas, aquam per foraminula inſtar roris ſtillare, adeoque ad hortos irrigandos adhiberi poſſe.

DE-

DEMONSTRATIO.

Si vas in aquam demergas, ut orificium E ultra libellam ejus extet, eo usque per foraminula fundi implebitur, donec aqua in vaſe cum ambiente in eadem libella exiſtat (§ 34 *Hydroſt.*). Aſt ſi digito ad lumen E applicato idem extrahas, cum altitudo ejus unius alteriusve pedis longitudinem non excedat, & foraminula fundi adeo exigua ſint, ut juxta aquam effluentem aëri in vas aditus denegetur; aer ambiens impediet, quo minus quid piam aquæ effluere poſſit (§.88 *Aerom.*). Si digitum removeas, aeris integra columna ab orificio E usque ad extremitatem atmoſphæræ extenſa in aquam in vaſe contentam & una cum aqua in aerem ad fundum AB gravitat. Quare cum preſſio aeris per orificium in aquam æqualis ſit reſiſtentiæ aeris ad fundum (§. 34 *Hydroſt.*); aquæ pondus hanc ſuperabit, adeoque ea per fundum vaſis rorabit. *Q. e. d.*

PROBLEMA 8.

63. *Siphonem conſtruere, hoc eſt, inſtrumentum, cujus ope liquor ex vaſe hauriri poteſt.*

RESOLUTIO.

Conſtruatur vas FE, cujus pars media ABCD figuram cylindri, extremæ autem AFB & CED figuram conorum truncatorum habeant: ſintque orificia F & E utrinque aperta nec majora, quam quæ digito appoſito commode claudi poſſunt.

Dico, ſi vas in liquorem demergas, fore ut eodem repleatur, etſi ſuperius orificium F exſtet: ſi digito ad F applicato extrahatur, fore ut per lumen E nihil effluat: ſi denique digitum removeas, fore ut totus effluat.

DEMONSTRATIO.

Eadem eſt, quæ problematis præcedentis.

Aliter.

Cum globo AB connectantur duo tubuli graciles CD & EF arbitrariæ longitudinis, quorum lumina D & F ſint aperta. Tab. I. Fig. 15.

Dico, ſi tubuli EF extremum liquori immergas & aerem ex vaſe per tubulum CD exſugas, liquorem in globum AB aſcenſurum. Quodſi jam digito ad lumen D applicato ſiphonem extrahas, fore ut nihil effluat: aſt ſi digitum removeas, fore ut totus liquor per tubulum EF ruſus exeat.

DEMONSTRATIO.

Dum enim aerem exſugis, perinde eſt, ac ſi vaſis ab aere evacuati orificium F in liquorem demergas, adeoque liquor in globi AB cavitatem aſcendere debet (§.94 *Aërom.*).

Quodſi digito ad orificium D applicato ſiphonem extrahas, liquor ex eo per lumen E effluere nequit (§. 88 *Aërom.*). Quamprimum vero digitum ab orificio D removes, cum in F tantum reſiſtat pondus atmoſphæricum, liquor autem præter vim gravitatis ab eodem pondere atmoſphærico per tubulum DC impellatur; reſiſtentia a vi majore utique vincetur adeoque liquor per F effluet. *Q. e. d.*

SCHOLION.

64. *Siphone ſecundo commode utimur ad fluida ſpecifice leviora a gravioribus, quibus innatant, ſeparanda: unde Chymicis ſubinde non contemnendum præbet uſum.*

PROBLEMA 9.

65. *Siphonem conſtruere, cujus ope totus liquor ex vaſe quolibet in aliud quodcunque educi poteſt.*

RESOLUTIO.

Fiat tubus recurvus ABC, ita ut orificio A in plano horizontali poſito altitudo minoris AB 30 pedes nunquam excedat. Ad communes uſus altitudo dimidii, aut unius vel alterius pedis ſufficit. Quodſi brachium minus AB liquori immergatur & per lumen C aër exſugatur, liquor ex vaſe tam diu per tubum BC effluet, quamdiu lumen A ſub liquore conſtituitur. Tab. I. Fig. 16.

SCHOLION I.

66. *Veritatem aſſerti experientia confirmat, nec difficulter ex demonſtratione proxime præcedente apparet, ab aere externo premente impulſum liquorem in crus minus AB aſcendere, dum aerem in ſiphone contentum exſugimus. Sed ratio motus continuati nondum manifeſta eſt, quia etiam in vacuo fluit aqua per ſiphonem. Equidem ſunt, qui contendunt, aerem ſubtiliorem in vaſe evacuato adhuc reſiduum ea vi pollere, ut ad unius alteriusve digiti altitudinem aquam elevare poſſit. Enimvero cum non minus Mercurius, quam aqua ex tubo Torricelliano in vacuo prorſus delabatur; fieri omnino nequit, ut preſſioni aeris ſubtilis aſcenſus Mercurii & aquæ in ſiphonis crure minore tribuatur. Quoniam vero altitudo ſiphonis ideo non major eſſe debere ſtatuitur, quam 31 pedum, quia aquam nonniſi ad tantam altitudinem aer evehere poteſt* (§. 19 Aerom.)*; nondum evidens eſt, utrum recte rejiciatur artificium* Heronis *ope ſiphonis per montium vertices in oppoſitam planitiem aquas deducendi nec ne. Jubet enim* Heron, *ut extremitatibus ſiphonis applicentur epiſtomia & ad nexum crurum infundibulum, per quod aqua infundi poſſit, utrique ſiphonis cruri implendo ſufficiens. Quodſi itaque aeris auxilio non eſt opus niſi ad primum aquæ in crus minus aſcenſum, nequaquam vero ad continuationem motus; fieri forte poteſt, ut aqua altius attollatur, quam a pondere atmoſphærico elevari ſolet. Vera igitur phænomeni hujus admodum ſingularis, utut notiſſimi, ratio ulteriori diſquiſitione adhuc indiget. Fluere autem ſiphonem in vacuo, ſæpius iterato experimento didici. Siphonis nempe pleni orificium inferius obturavi & cum ſub campana evacuata illud iterum aperirem, omnis ex vaſe aqua effluxit, utut nihil aeris externi admitteretur.*

SCHOLION 2.

67. *Illud quoque notatu dignum eſt, figuram ſiphonis ad arbitrium variari poſſe, modo orificium C ſit infra libellam fluidi exhauriendi. Quanto autem longiori intervallo ab ea remo-* Tab. II. Fig. 17. 18. 19.

removetur, tanto celeriore motu fluidum fertur. Et, ſi ex fluido extrahitur orificium A, fluidum omne per lumen inferius C egreditur &, quod in minore crure AB continetur, ſecum veluti trahit. Quodſi ſipho plenus ita conſtituatur, ut lumen utrumque A & C ſint in eadem linea horizontali, fluidum in utroque crure pendulum hærebit. Videntur adeo fluida in ſiphonibus unum veluti continuum formare, ita ut pars præponderans deſcendens inſtar catenæ ſecum trahat leviorem.

SCHOLION 3.

Tab. II. Fig. 20. 68. *Si vas quodpiam æquabiliter exhaurire volueris, tabulæ ligneæ AB infige alterum ſiphonis orificium C, quæ aquæ innatans & cum imminuta deſcendens id conſtanter ad eandem profunditatem demerget.*

SCHOLION 4.

Tab. II. Fig. 18. 69. *Denique notandum, fluere aquam per ſiphonem etiam interruptum, ſi nempe crura AD & EC conjungantur mediante tubo capaciore DE, aere pleno.*

PROBLEMA 10.

70. *Diabetem conſtruere, hoc eſt, vas, quod plenum liquorem omnem effundit, non plenum vero retinet.*

RESOLUTIO.

Tab. II. Fig. 21. Fundo vaſis AFGB afferruminetur ſipho inverſus CDE ea lege, ut crus longius DE ultra baſin vaſis exporrigatur, aut minimum ejus orificium ſit in baſi vaſis; crus vero minus CD eandem non prorſus attingat: altitudo denique ſiphonis minor ſit altitudine vaſis AG.

Aliter.

Fundo vaſis AFGE afferruminetur tubus DE, qui cruris majoris vicem ſuſtinet: loco autem cruris minoris imponatur tubus alius capacior DC in C apertus. Tab. II. Fig. 21.

Dico, ſi vas AFGB aqua vel alio liquore impleas, quamdiu non fuerit plenum, nihil inde effundi; quamprimum vero plenum extiterit, liquorem omnem effluere.

DEMONSTRATIO.

Dum enim aqua infunditur, in tubo DC ſeu crure minore ſiphonis ad eandem altitudinem aſcendit, ad quam in vaſe conſiſtit (§. 34 *Hydroſt.*). Quamdiu igitur vas non fuerit plenum, aqua infra orificium D tubi DE ſeu cruris longioris ſubſiſtit, conſequenter per hoc nihil ejus effluere poteſt. Quamprimum vero plenum extiterit, ultra orificium D ſubſiſtit, adeoque vi gravitatis propriæ per tubum DE deſcendit, dumque ſemel fluit per ſiphonem CDE, tamdiu fluere debet, quamdiu lumen cruris minoris C fuerit aquæ immerſum (§. 66). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

71. Quodſi vas non fuerit plenum, ſed ad orificium E ore applicato aërem ex ſiphone CDE exſugas; liquor itidem omnis ex vaſe effluet.

CO-

COROLLARIUM 2.

Tab. II. Fig. 23. 72. Hinc conſtrui poteſt poculum KL, quo bibenti illuditur. Si nempe tu bibis, poſtquam ſufficienter vinum hauſiſti, per tubum HI ulterius fluxurum flatu oris repelle & paulisper expecta, donec nihil amplius effluere ſentis. Tum poculum KL alteri porrige & jube, ut ore ad orificium I applicato liquorem exſugat. Ubi igitur hauſtu abſoluto poculum ab ore removerit, vinum adhuc fluens veſtem madidabit.

SCHOLION 1.

Tab. II. Fig. 22. 73. *Si tubus CD vitreus fuerit, aerem in ſuprema ejus parte reſiduum una cum aqua fluente per tubum DE ſucceſſive abripi obſervabis. Jucundum inprimis erit ſpectaculum, ubi aerem per tubulum vitreum fundo vaſis in E infixum magna celeritate cum aqua defluentem conſpicies. Hoc phænomenon primus obſervavit* R. P. de la Roche (h), *cumque idem repeterem, varias adhuc circumſtantias annotavi, unde uſus in praxin redundat* (i). *Expertus inter alia ſum, quod, cum diameter orificii D eſſet* 6 *linearum ſeu digiti dimidii, diameter vero inferioris E unius ſaltem lineæ, aer tubum DE per ſuperius D ingreſſus per inferius egredi non potuerit & aquæ fluxum impediverit. Hinc vero jam conſtat ratio, cur in diabetis iſtiusmodi aquæ fluxus interdum ſiſtatur, antequam omnis effluxerit, continuandus tamen aliquantiſper, ſi tubus DC elevetur, atque hinc manifeſtum mihi videtur, quod luminis tam ſuperioris D, quam inferioris E diameter eadem eſſe debeat, nec ipſe tubus luminibus capacior.*

SCHOLION 2.

74. *Quodſi altitudo tubuli DE major fuerit, altitudine vaſis AG, hoc non obſtante, aqua per eum fluit. Ut vero fluxus initium fiat, digito ad E appoſito, tubus DC attollatur, ita enim aër in tubo DE contentus dilatabitur ac e latere ejus imminuto* (§ 71 Aerom.), *aqua intra tubum DC altius aſſurgens in tubum DE ſeſe præcipitem dabit. Quodſi itaque poculi KL operculo K tubus MN afferruminetur, ubi libere volueris, non opus eſt, ut ſugas; ſed operculum attolli ſufficit.*

PROBLEMA II.

75. *Aquam per ſiphonem interruptum elevare.*

RESOLUTIO.

Tab. II. Fig. 24.

1. Duo vaſa æqualia AB & IK in eadem planitie collocentur, quorum unum AB ſit apertum, alterum vero clauſum; utrumque aqua plenum.
2. Ex vaſe tertio QR undique clauſo & ab aqua vacuo tendant duo tubi DC & SH, (quorum longitudo minor quidem, ſed non major quam 31 pedum eſſe poteſt) in vaſa AB & IK, quorum prior fundum vaſis AB fere attingit, alter SH operculo vaſis IK afferruminatur.
3. Denique vaſi IK afferruminetur tubus alius LN epiſtomio M inſtructus & tubo DC longior.

Dico, dum aqua per tubum LN deſcendit, epiſtomio M aperto, aliam ex vaſe AB in vas QR per tubum DC aſcendere debere.

DE-

(h) Vid. Diarium Trevoltienſe A. 1709 art. 86. p. 1709.
(i) In Actis Erudit. A. 1711 p. 13.

DEMONSTRATIO.

Cum enim gravitas aeris in tubo SH contenti reſpectu gravitatis aquæ tubum LN implentis fere nulla ſit, motum vero aquæ continuum per tubos LN & DC non impediat; perinde eſt ac ſi tubus DC conjungeretur cum tubo LN. Sed dum in hoc caſu, ubi tubus DC alteri LN immediate jungitur, aqua per tubum LN deſcendit, per alterum DC aſcendit (§. 66). Ergo etiam in altero caſu, ubi tubus LN alteri DC mediante tubo SH & vaſe QR jungitur, aqua per DC aſcendere debet, dum per LN deſcendit. *Q. e. d.*

SCHOLION.

76. *Qua igitur ratio fluxus continuati in ſiphone ordinario, eadem quoque aſcenſus aquæ per DC continuati in interrupto eſſe debet.*

COROLLARIUM.

Tab. I. Fig. 25. 77. Data igitur qualibet exigua caducitate, aqua ad maximam altitudinem elevabitur, ſi in eadem altitudine collocentur plura vaſa A, B, C, D &c. & in locis editioribus alia E, F, G &c. vaſaque G & D, F & C, E & B tubis P*a*, M*b*, I*c*, vaſa vero G & F, F & E, E & A tubis GN, FK, EA conjungantur, tandemque vaſis D, C & B tubi R, S, T cum epiſtomiis V afferruminentur, qui tubis GN, FK, EL longiores ſint. Epiſtomiis enim apertis, aqua fluens per tubum T elevabit aquam ex A in E; fluens per tubum S eandem attrahet ex E in F; fluens denique per tubum R eam ex F in G attollet, atque ita porro.

SCHOLION 2.

78. *Aut magnum requiritur præcipitii perpendiculum, aut ingens vaſorum apparatus, ſi ad notabilem altitudinem aqua evehenda: Equidem ſi in vaſa A, B, C, D Mercurius infunderetur, tubus C 27 digitorum reſponderet tubo AE 31 pedum* (§. 29 Aerom.); *ſed hac ratione elevatio aquæ nimis ſumtuoſa foret. Praxi adeo in altitudinibus majoribus hic aquam elevandi modus parum reſpondet.*

PROBLEMA 12.

79. *Aquam vi elaſtica aëris compreſſi movere.* Tab. II. Fig. 26.

RESOLUTIO.

Sit vas quodcunque ABCD, e cujus medio aſſurgat tubus EF fundum non prorſus contingens, ſitque apertura aliqua in G epiſtomio ad arbitrium obturanda. Quodſi jam per aperturam G ſive ope follis, ſive ſyringis, ſive antliæ pneumaticæ, ſive flatu oris vehementiore aërem intruſeris in vas CD ad medietatem AB aqua repletum, aër comprimetur in parte vaſis reliqua (§. 5 *Aërom.*) adeoque elater ejus intendetur (§. 71 *Aërom.*) Cum adeo elater externi ambientis minor ſit, ſi clauſo epiſtomio G epiſtomium F aperias; aqua ex vaſe AD per tubum DF ab aëre ſeſe expandente expelletur.

SCHOLION.

80. *Si aer ope antliæ comprimitur, non opus eſt epiſtomio G, ſed ſufficit cochlea muniri aperturam. Tubus vero FE in cochleam deſinit, ut ad antliam firmari poſſit.*

PROBLEMA 13.

81. *Vi aëris loco ſuo expulſi aquam movere.* Tab. II. Fig. 27.

RESOLUTIO.

1. Sit vas quodcunque PQ per diaphragma EH in duo receptacula diſtinctum.
2. In ſuperiori ſit catinus DB foramine in K pertuſus, quod cochlea obturari poſſit.
3. Per ejus medium tranſeat tubus AC diaphragma CE non prorſus attingens & epiſtomio I munitus.
4. Fundo catini conferruminetur tubus DEL ultra diaphragma ad fundum fere vaſis inferioris HQ protenſus, tuboque AC longior.
5. Denique diaphragmati conferruminetur alius tubus GF in vas inferius FG hians & ad catinum fere aſſurgens.

Dico, ſi receptaculum ſuperius PL aqua repleas per foramen K & illo obturato aquam etiam catino infundas, fore ut omnis ex receptaculo ſuperiore PR ejiciatur & per tubulum DL in inferius deſcendit.

DEMONSTRATIO.

Dum enim aqua per tubum DL defluit, aër in receptaculo inferiore comprimitur (§. 5 *Aërom.*), adeoque elater ejus intenditur (§. 71 *Aerom.*). Quodſi ergo epiſtomium I aperias, elater aëris incluſi fortior magis premit aquam in vaſe PR, quam externus ad A reſiſtit. Aquam igitur ex vaſe PR per tubum AC expellit. *Q.e.d.*

SCHOLION.

82. *Quodſi tubulus AB exiguo lumine fuerit inſtructus, ut aqua ex eo ſaliat; ingenioſa hæc machina ab inventore* Herone *Alexandrino* Fons Heronis *appellatur.*

PROBLEMA 14.

83. *Aquam per rarefactionem aeris expellere.* Tab. II. Fig. 28.

RESOLUTIO.

1. Sint duo vaſa ABCD & CDEF per diaphragma CD a ſe invicem ſeparata habeatque ſuperius ABCD catinum AGHB conferruminatum ejusdem cum ipſo capacitatis.
2. Ex diaphragmate CD aſcendat tubulus IK fundum catini non prorſus attingens.
3. Per fundum catini exſurgat alius tubulus LM, cujus lumen L a diaphragmate exiguo intervallo diſtet.

Dico, ſi vas CF prunis imponatur, aut faces ardentes fundo ejus EF ſupponantur, fore ut aqua ex vaſe AD per tubulum LM ejiciatur.

DE-

DEMONSTRATIO.

Dum enim aër in vaſe CEFD incaleſcit, rarefit (§. 23 *Aerom.*) ejusque elater intenditur (§. 137 *Aerom.*). Elater igitur aëris incluſi fortius premit aquam in vaſe AD contentam, quam externus ad M reſiſtit, conſequenter aqua per tubulum LM ejicitur. *Q. e. d.*

CAPUT III.
De MACHINIS QVIBVS AQVA ELEVATVR.

DEFINITIO 5.

84. *Valvula* ſeu *aſſarium* eſt obturaculum vaſis vel tubi, quod introrſum aperiri poteſt; aſt quo magis contra fundum ſeu diaphragma comprimitur, eo exactius foramen claudit.

COROLLARIUM.

85. Valvula igitur fluidum in vas vel tubum admittit, regreſſum vero impedit.

PROBLEMA 15.

86. *Valvulam ſeu aſſarium conſtruere.*

RESOLUTIO.

Tab. II. Fig. 29. Valvulæ ſimplicisſimæ C conficiuntur ex corio, habentque figuram circularem & anſula D clavis affigitur fundo vaſis aut diaphragmati, ubi ad obturandum foramen aptantur.

Fieri etiam poſſunt ex aliquot orbibus coriaceis intra duos orichalceos firmiter compreſſis AB & foraminibus circum circa pertuſis, quæ alio orbiculo orichalceo CD ſurſum deorſumque mobili teguntur. Tab. II. Fig. 30.

Parantur porro ex lamina cuprea, & corio tenui obducuntur, circa cardinem DE mobiles. Ut autem certius relabantur, elatere G inſtruuntur. Tab. II. Fig. 31.

Quemadmodum vero hactenus deſcriptæ valvulæ embolis potiſſimum conveniunt, ita in fundo vaſorum vel tuborum ſequente utendum:

1. Foramen A torno excavetur, tantiſper in conum deſinens. Tab. II. Fig. 32.

2. Eidem immittatur corpus conicum orichalceum B torno itidem elaboratum & clavo aut tigillo transverſo D impediatur, ne inverti poſſit.

Vel foramen hemiſphæricum excavetur eique globus orichalceus immittatur.

PROBLEMA 16.

87. *Syringem, hoc eſt, machinam conſtruere, ex qua aqua attracta violenter expelli poteſt.*

RESOLUTIO.

Tab. III. Fig. 33. 1. Conſtruatur cylindrus ABCD ex materia ſolida, intus cavus, inferius tubulo EF inſtructus.

2. Immittatur embolus K ex corio vel alia materia, quæ humorem facile imbibit, confectus; qui cavitatem cylindri exacte repleat, ita ut inter ipſum & cylindrum aeri vel aquæ nullus concedatur tranſitus.

Quodſi tubulo F aquæ immiſſo embolum K extrahas, in cavitatem ab aëre vacuam ea aſcendet (§. 94 *Aerom.*). Embolo igitur intruſo, per tubulum EF violenter expelletur.

COROLLARIUM 1.

88. Impetus aquæ eo major ipſaque aqua per longius ſpatium propellitur, quo major fuerit vis embolum detrudens.

COROLLARIUM 2.

89. Quare cum vis major celerius intrudat embolum, quam minor; quo celerius embolus intruditur, eo majore impetu eoque per longius ſpatium aqua propellitur.

PROBLEMA 17.

90. *Conſtruere antliam attractivam, cujus ope aqua ex loco profundo in altum evehi poteſt.*

RESOLUTIO.

1. Paretur cylindrus cavus ex materia ſolida in aqua verticaliter erigendus, cujus inferior baſis L valvula introrſum hiante inſtruatur (§. 86). Tab. III. Fig. 34.

2. Immittatur embolus EK valvula ſurſum hiante in I inſtructus.

3. Pro emboli EK faciliori extractione & depreſſione vectis FG applicetur.

DEMONSTRATIO.

Dum enim embolus EK attollitur, aqua valvulam L elevat & in cavitatem cylindri ſeu tubi AD ruit (§. 94 *Aerom.*). Quodſi ergo idem rurſus deprimatur, valvula L aquæ exitum negante (§. 85), valvula I aperitur & aqua ultra embolum aſcendit, repetita emboli agitatione per tubum MH effluxura. *Q. e. d.*

PROBLEMA 18.

91. *Conſtruere antliam, quæ per meram expulſionem aquam elevat.*

RE-

RESOLUTIO.

Tab. III. Fig. 35. 1. Cylindrus AB diaphragmate CD, ad quod valvula E aptata eſt, diviſus usque ad diaphragma aquæ immergatur.

2. Embolus F valvula G inſtructus ita immittatur & regulæ ferreæ IH circa cardinem H mobili affigatur, ut manu in K applicata commode attolli ac deprimi poſſit.

DEMONSTRATIO.

Embolo enim F depreſſo valvula G aperitur (§ 84) & aqua in cavitatem cylindri BC aſcendit (§. 34 *Hydroſt.*). Sed dum rurſus elevatur, valvula G clauditur, ut per embolum nullus ei exitus concedatur; aperitur vero valvula E (§. 84. 85), & ſic aqua vi emboli, agitatione ſæpius repetita, per tubum M expellitur. *Q. e. d.*

SCHOLION.

92. *Si quod vitium contrahit hoc antliarum genus, non commode id corrigere licet. Unde non libenter eodem utuntur, utut ad quamlibet altitudinem datam aquam elevet.*

PROBLEMA 19.

93. *Conſtruere antliam, quæ aquam attractam violenter alior ſum expellit.*

RESOLUTIO.

1. Paretur cylindrus ex orichalco ABCD in L valvula inſtructus & in aqua collocetur. Tab. III. Fig. 36.

2. Immittatur embolus K ſine valvula ex ligno viridi, quod humore imbibito non amplius intumeſcit, tornatus & corio vel ſtupa veſtitus.

3. In H afferruminetur tubus alius NH cum valvula ſurſum hiante I.

DEMONSTRATIO.

Dum enim embolus EK attollitur, aqua valvulam L aperit & in cavitatem cylindri aſcendit (§. 34 *Hydroſt.*). Sed cum rurſus deprimitur, valvula I aperitur & per tubum HN aqua expellitur. *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

94. *Ingenioſa hujus machinæ inventor fuit* Cteſibius, *qui primus de aqua antliarum ope elevanda cogitavit, plurimis inventis mechanicis & hydraulicis ſuo ævo celebris*, Vitruvio *autore* (k). *Ab eo antliæ dicuntur* machinæ Cteſibianæ.

SCHOLION 2.

95. *Ejus vires, ſublato affrictu, multiplicare ſtuduit diu multumque in theoria & praxi aquarum elevandarum verſatus* Morlandus (l). *Virga nimirum ferrea D inter trochleas B & C ſurſum deorſum movetur* (§. 674 Mechan.) *& ponderibus* E, F, G, H *onerantur, ut aquam fortius per tubum plumbeum* TV *expellat embolus* LM *ex orichalco tornatus & intra exiguum circulum coriaceum ad baſin ſuperiorem* NO *cylindri orichalcei* RN *dextre aptatum ſine omni fere frictione mobilis,* Tab. III. Fig. 37. *ad*

(k) lib. 10. c. 12. conf. lib. 9. c. 9.
(l) Elevation des Eaux c. 4. art. 1. p. 35 & ſeqq.

ad quam tollendam & duodecim annorum ſtudium, & multum argenti ſe impendiſſe fatetur laudatus inventor.

PROBLEMA 20.

96. *Aquam ope catenarum ſitulis inſtructarum elevare.*

RESOLUTIO.

Tab. III. Fig. 38.

1. Intra aquam horizontaliter collocetur cylindrus aut priſma ſexangulare MN circa axiculum ferreum mobile.
2. Eo in loco, quo aqua elevari debet, conſtituatur cylindrus aut priſma ſimile OP alteri parallelum & circa axiculum ferreum itidem mobile.
3. Situlæ S catenis connectantur, quæ utrumque cylindrum vel priſma ambiant. Alii ſitulas coriaceas funibus connexas præferunt, tum ne facile diffringantur, tum ne hieme (quod ſæpius accidit) catenis diſſilientibus fundum aquæ petant.

Quodſi cylindrum ſuperiorem OP convertas, inferior ſimiliter convolvitur & ſitulæ per aquam trajectæ aquam hauriunt ſuperius in T effundendam.

PROBLEMA 21.

97. *Roſarium conſtruere ad elevandam aquam.*

Tab. III. Fig. 39.

RESOLUTIO.

1. Tubus ligneus AB in aqua conſtituatur tantæ altitudinis, ad quam aqua elevanda.
2. Tum ſub aqua, tum in ſuperiori loco, quo aqua elevanda, collocentur ut in problemate præcedente duo cylindri GH & CD circa axiculos ferreos mobiles.
3. Ad funem, cujus extremitates inter ſe connexæ, circa cylindros GH & CD circumductum aptentur globi ex corio aliaque materia molli compacti, aut (ut minor ſit frictio) hemiſphæria circulo coriaceo tecta, qui cavitatem tubi exacte replet.

Dum enim cylindris circumvolutis globi aut hemiſphæria per tubum AB trahuntur, aquam binis interjectam una attollunt, in L effluentem.

SCHOLION.

98. *Alii utuntur priſmatibus quadratis loco tuborum & tabulis ligneis quadratis loco globulorum. Immo & in tubis nonnulli orbiculos ligneos catena connexos globulis ſubſtituunt. Cæterum hac machina uſum quoque habet in foſſis & fluminibus a fæcibus purgandis.* Tab. III. Fig. 40.

PROBLEMA 22.

99. *Aquam tympano vel rota ſitulis inſtructa elevare.*

RESOLUTIO.

Structura admodum variari ſolet pro diverſitate quantitatis aquarum elevandarum & altitudinis, ad quam evehenda. Tab. IV. Fig. 41.

Si magna aquæ quantitas ad exiguam

guam altitudinem elevari debet; tympanum conſtruitur AB in 8 cavitates diviſum, quæ aperturas habent tum in peripheria tympani C ad hauriendum aquam, tum ad tubum DE, qui axis vices ſuſtinet, ut aqua per ejus foramina E in ciſtam G effundi poſſit.

Tab. IV. Fig. 42. Si minor aquæ quantitas ad majorem altitudinem elevanda, ſitulæ ligneæ pice obductæ A ad peripheriam rotæ aptantur, quæ aquam hauriunt, dum per eam trajiciuntur, rota circumacta, & ſuperius in B effundunt.

Tab. IV. Fig. 43. Quodſi rotæ palmulas non in fronte gerant, ſpatium binis interjectum hinc inde clauditur, nonniſi foramine in palmula ſuperiori A relicto, per quod aqua hauritur, & apertura B ad latus facta, per quam rurſus effunditur.

Tab IV. Fig. 44. Sunt qui ſitulas congiales A vel (quod præſtat, ne ſcilicet tantum aquæ perdatur) capſas quadratas unico foramine inſtructas B ad latus rotæ aptant: ſunt & qui heli-

Fig. 45. cibus CD a peripheria ad centrum fere tendentibus inſtruunt: alios modos ſilentio præterimus.

PROBLEMA 23.

100. *Cochlea* Archimedis *aquam elevare*.

Tab. V. Fig. 46.

RESOLUTIO.

1. Circa cylindrum AB circumvolvitur tubus plumbeus ea lege, qua helicem in cochlea deſignare ſolemus (§. 567 *Mech.*).
2. Cylindrus inclinetur ad horizontem ſub angulo 45 circiter graduum, ſitque orificium tubi B ſub aqua demerſum.

Quodſi cochleam ita circumagas, ut orificium B contra aquam volvatur, aqua per helicem aſcendet tandemque in A effundetur.

Aliter.

1. Baſis cylindri tam ſuperior, quam inferior dividitur in 4 vel 8 partes æquales & puncta diviſionum D & E, F & G, B & L &c. connectuntur rectis DE, FG, BL &c in ſuperficie cylindri deſcriptis, in quas transfertur ex F in O, ex D in M &c. dimidium latus quadrati FN, ut adeo tota cylindri ſuperficies in areas quadratas ſit diviſa. Tab. IV. Fig. 47.
2. Anguli diagonaliter oppoſiti F & M connectantur lineis FM, MP, PQ &c. quæ filo ab uno angulo M usque ad alterum F extenſo facile deſignantur, & juxta harum ductum helice ſulcetur cylindrus, cujus altitudo unius, profunditas dimidii digiti, diametro cylindri 4 vel 6 digitorum exiſtente.
3. Ad helicem firmentur aſſerculi admodum tenues, quorum longitudo 8 circiter digitorum, & pice oblinantur. Tab. IV. Fig. 48.

4. Ba-

4. Baſibus denique circum circa affigantur aſſeres tenues & annulis ferreis muniantur, totaque ſuperficies exterior pice vel bitumine oblinatur.

SCHOLION.

101. *Hac machina exigua vi multum aquæ attolli poſſe, experientia dudum docuit: unde ad exhauriendos lacus eadem utuntur.*

COROLLARIUM.

102. Si ad ingentem altitudinem aqua elevanda, una cochlea non ſufficit; ſed quæ ab una effunditur, haurienda eſt ab altera & ita porro.

PROBLEMA 24.

103. *Aquam ex loco humiliore in excelſiorem deducere.*

RESOLUTIO.

1. Conſtruatur turris, aut aliud ædificium, prout elevatio locorum ultra libellam aquarum eo derivandarum requiſiverit.
2. Intra turrim ſeu ædificium aqua elevetur vel ope rotæ ingentis ſitulis inſtructæ (§. 90), vel ſitularum catenis connexarum (§. 96), vel roſarii (§. 97), vel cochlearum Archimedearum (§. 100), vel antliarum (§. 90. 91. 93), viribus vel animatis, vel inanimatis legitime applicatis juxta regulas c. 14 Mechanicæ (§. 589 & ſeqq.) traditas.
3. Aqua effuſa in aheno cupreo colligatur, ad cujus fundum aptati ſint tubi, per quos iterum deſcendet.
4. Ne aqua ultra latera aheni unquam aſſurgat, unus, alterve ad ſummitatem fere protendatur tubus, per quem nimia in fluvium refluat, unde hauritur.
5. Hi Tubi verticales connectantur cum aliis horizontalibus vel inclinatis intra terram defoſſis & ad eum usque locum protenſis (§. 14), in quem aqua deducenda.
6. Iis denique in locis, in quæ aqua deducitur, erigantur tubi verticales quantælibet amplitudinis, in quos hient lumina horizontalium epiſtomio munita, quod ope virgæ ferreæ aperire ac claudere licet, ut aqua ad arbitrium admitti poſſit (§. 5).

Aperto enim epiſtomio aqua in tubo verticali aſcendet (§. 34 *Hydroſt.*).

SCHOLION.

104. *Antliarum emboli agitantur ope axis curvati duplicis, ita ut unus deprimatur, dum alter attollitur. Inſeritur autem axis curvatus axi rotæ aquariæ. Cochlea* Archimedis, *Cylindri ſuperiores roſariorum & catenarum ſitulis inſtructarum inſtruuntur rotis radiatis, quibus alia dentatæ occurrunt. E. gr. Ponamus roſarium calcando moveri debere. Conſtruendum igitur erit tympanum ingens* (§. 598 Mechan.), *cujus axi una infigenda rota ſtellata, occurrens radiatæ, de qua ante diximus. Jungitur autem rota radiata verticu-*

ticularis ad conſervandum impetum. Quodſi equus eandem machinam movere deberet, axi verticali temone inſtructo (§. 599 Mechan.) *infigi deberet rota dentes in plano habens, reliquis manentibus ut ante. Quodſi homo partim trahendo, partim deprimendo aquam ope roſarii elevare teneretur, tympano ſubſtitueretur axis cum ſcytalis & rota verticulari* (§. 595 Mechan.). *Si vero motus partim trahendo, partim protrudendo fieri debeat, axi curvato ope vectis homodromi verſando* (§. 595 Mechan.) *infigenda rota radiata, quæ circumagat ſtellatam, cui communis cum alia radiata axis, alii dentatæ dentes in plano, axem cum cylindro roſarii communem habenti occurrente. Unde facile intelligitur, quid in aliis caſibus fieri debeat, modo problemata mechanica de potentiarum ad machinas applicatione fuerint perſpecta.*

CAPUT IV.
DE
FONTIBUS SALIENTIBUS.

PROBLEMA 25.

105. *Conſtruere fontes ſalientes.*

RESOLUTIO.

1. Elevetur aqua ex loco humiliore in altiorem (§. 90 & ſeqq.) & intra vas ſatis capax colligatur, ex quo per tubos applicatos rurſus deſcendat.
2. Cum tubis hiſce connectantur alii horizontales ſub terra defoſſi, per quos aqua usque ad originem fontium ſalientium deducatur.
3. Denique tubis horizontalibus jungantur alii verticales, quorum tamen altitudo ſit multo minor altitudine tuborum, per quos aqua in horizontales defluit.

Aqua per hos in altum proſiliet, quomodocunque fuerint inflexi (§. 55).

SCHOLION 1.

106. *Quodſi aqua ſaliens ad altitudinem datam aſcendere debet, quæſito ſatisfieri poteſt per ſchol. 3. theor.* 11. (§. 51).

SCHOLION 2.

107. *Quodſi deſideretur, ut tubi dato tempore datam aquæ quantitatem effundant, vel plures tubi ejusdem fontis in data ratione aquas emittant; id obtinere licebit per theor.* 3 *Cor.* (§. 23) *& per theor.* 5 (§. 27).

SCHOLION 3.

108. *Si denique aquarum ex diverſis unius fontis tubis ſalientium altitudines inæquales requirantur; quæſito potiemur per theor.* 11 (§. 48) *& theor.* 12 (§. 55): *ubi & obſervaſſe juvabit quæ ſuperius in ſcholiis theor.* 11 (§. 49 & ſeqq.) *monuimus.*

PROBLEMA 26.

109. *Fontem conſtruere, ex quo*

aqua

aqua erumpens pilam æneam projiciat, deſcenſumque parantem continuo repellat.

RESOLUTIO.

Tab V. Fig. 49. 1. Fiat globus æneus intus cavus A ex lamina tenui, ne gravitate ſua impetum impreſſum eludat.

2. Tubus, per quem aqua ſalit BC ſit ad horizontem exacte perpendicularis.

3. Aquæ ſufficiens copia ex inſigni altitudine in tubum BC deducatur.

Dico, aquam ex tubo erumpentem globum projicere in altum & deſcendentem conſtanter in altum repellere.

DEMONSTRATIO.

Cum enim tubus ſit ad horizontem exacte perpendicularis, *per hypoth.* aqua per eum prorumpens perpendiculariter aſcendit. Quoniam vero ex inſigni altitudine delapſa, *per hypoth.* magna quoque celeritate movetur (§. 73. 327 *Mechan.*), adeoque globo impetum imprimit in linea ad horizontem perpendiculari aſcendendi (§. 380 *Mech.*) ſed dum ad eam altitudinem pervenit, ad quam vi impreſſa aſcendere licet (§. 265 *Mechan.*); vi gravitatis ſuæ juxta eandem perpendicularem relabitur (§. 173 *Mechan.*). In deſcenſu igitur aqua eidem occurrit novoque impetu impreſſo, ut ante, aſcendere cogit. Quamobrem globus in aere pendulus ſurſum deorſum feretur, quamdiu aqua ex tubo ſaliens ſatis impetus ad globum repellendum habet. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

110. Cum ad globi aſcenſum deſcenſumque reciprocum figura nil conferat; corpus quodcunque alterum non nimis grave eidem ſubſtituere licet, e. gr. avem cum alis expanſis.

SCHOLION.

111. *Quoniam globus, ut ex alto rurſus deſcendens in aquam ſalientem incurrat, in eadem conſtanter linea perpendiculari aſcenſus deſcenſusque reciprocos continuare debet; hoc fontium genus amat loca ventorum libidini minime expoſita.*

PROBLEMA 27.

112. *Conſtruere fontem, quæ aquam verſus diverſas plagas projiciat.*

RESOLUTIO.

Sit tubus A B aquam advehens verticalis & ipſi infixi ſint alii horizontales DE & GH, alii ad horizontem verſus diverſas plagas inclinati OP & MN, alii denique infra horizontem verſus plagas illis inter medias reclinati, ut FL.

Quoniam aqua directionem luminis, per quod prorumpit, retinet; per lumen A ſaliens perpendiculariter aſcendet, per lumina vero L, H, N, P, E prorumpens arcus

arcus diverſæ amplitudinis (§. 58) & ad diverſas plagas tendentes deſcribet. Fons igitur aquam verſus diverſas plagas ejicit.

Aliter.

Tab. V. Fig. 51. Tubus AB, per quem aqua ſalire debet, ſit ſuperius clauſus in A, & luminis loco vel undiquaque, vel in dimidia ſuperficiei parte foraminulis exiguis pertuſus.

Quodſi tubus fuerit ad horizontem perpendicularis, aqua verſus omnes plagas per foraminula ſaliet, eruntque jactus horizontales pro altitudine lapſus (§. 57) ſatis ampli.

COROLLARIUM.

113. Quodſi ergo tubum AB ad altitudinem hominis fere aſſurgentem epiſtomio C inſtrues; eo aperto, ſpectatores veluti ab imbre improviſo madidati recedent.

SCHOLION.

114. *Probe autem tenendum eſt, luminum, per qua aqua egreditur, diametros ipſorum tuborum aquam advehentium diametris minores fieri debere, ne aeris reſiſtentia aliaque impedimenta* (§. 50 & ſeqq.) *impetum aquæ ſtatim eludant. Ipſi quoque fontes ſufficientem aquæ copiam ſuppeditare; aquæ impetu ſufficiente gaudere debent.*

PROBLEMA 28.

115. *Fontem conſtruere, ex quo aqua inſtar pluviæ proſiliat.*

RESOLUTIO.

Tubo, ex quo aqua ſalire debet, afferruminetur globus, vel corpus lenticulare ex duobus ſegmentis ſphæricis compoſitum AB, ex lamina metallica confectum, cujus ſuperior ſuperficies minimis foraminulis pertundatur. Tab. IV. Fig. 52.

Ita enim futurum, ut aqua cum impetu verſus ſuperiorem laminam AB propulſa ſub forma tenuiſſimorum filamentorum in varias guttulas mox diſpergendorum proſiliat.

PROBLEMA 29.

116. *Fontem conſtruere, ex quo aqua proſiliens ad modum lintei expanditur.*

RESOLUTIO.

Tubo AB afferruminentur duo ſegmenta ſphærica C & D, quæ fere ſe invicem tangant & mediante cochlea E ad eum ſitum facile reducuntur, ut crena ambobus interjecta vel arctior, vel latior fiat, prout uſus poſtulaverit. Tab. IV. Fig. 53.

Alii vel in tubis lumine deſtitutis, vel in corporibus ſphæricis aut lenticularibus tubo afferruminatis crenam efficiunt bene politam.

Aqua per crenam ſaliens ad modum lintei expanditur, ſi impetus fuerit ſufficiens.

PROBLEMA 30.

117. *Fontem conſtruere, quæ aquam*

ſpumeſcentem jucundo ſpectaculo ejiciat.

RESOLUTIO.

Tab. V. Fig. 54. Sit tubus AB & paulo infra lumen in ejus medio matrix DE, ut ope cochleæ globus C ita ad lumen B firmari poſſit, quo omnis fere exitus aquæ denegetur.

Aqua intra contactum globi & tubi prorumpens ſpumeſcet ac fere nivis aerem opplentis floccos æmulabitur.

PROBLEMA 31.

118. *Fontem conſtruere, ubi e variis animantium vel hominum figuris aqua erumpit.*

RESOLUTIO.

Cum aqua per tubos quomodocunque ſitos derivari poſſit & directionem luminis retineat; non alia re opus eſt, quam ut intra hominum animantiumque figuras tubi abſcondantur, quorum orificia hient per eas partes, unde aqua proſilire debet.

SCHOLION.

119. *Ex traditis hactenus principiis haud difficulter eruitur, quicquid de fontium ornatu, quo aquæ ſalienti figuras varias conciliare licet, concipi poteſt. Omnia nimirum a luminum magnitudine, figura & directione pendent.*

PROBLEMA 32.

120. *Conſtruere fonticulum ſalientem, qui ubi ſalire deſiit, clepſydræ inſtar inverti poteſt.*

RESOLUTIO.

1. Fiant duo vaſa LM & NO tanto quidem majora, quanto plus temporis aqua ſaliens conſumere debet, tantoque majori intervallo PN a ſe invicem remota, quanto major aquæ ſalientis altitudo deſideratur (§.48). Tab. V. Fig. 55.
2. Sit ABC tubus recurvus in C epiſtomio inſtructus & DEF tubus alius itidem recurvus in D epiſtomio munitus.
3. In I & K ſint tubuli alii utrinque aperti & fundos vaſorum NO & LM fere attingentes: quousque ſimiliter tubi QR & ST pertingunt.

Quodſi jam vas LM fuerit aqua plenum, aperto epiſtomio C, ea proſiliet fere ad K, & delapſa per tubulum I apertum in vas NO ruet aeremque contentum per tubum QO expellet. Ubi vero aqua omnis ex vaſe LM effluxerit, machina inverſa, ex vaſe NO ſalientem efficiet.

COROLLARIUM.

121. Si vaſa LM & NO tantam aquæ copiam contineant, quæ intra horæ ſpatium tota effluat; Clepſydram habebimus ſalientem in ſuas graduationes (§.45) legitime dividendam.

PRO-

PROBLEMA 33.

122. *Conſtruere malluvium cum fonticulo ſaliente.*

Tab. V. Fig. 56

RESOLUTIO.

1. Sit ABCD receptaculum vaſis, cui aqua infunditur.
2. Ex vaſe deſcendat tubus ab L usque ad M, ubi verſus I infle- ctitur.
3. In K applicetur epiſtomium, quo aperto aqua proſiliet fere ad L usque.
4. FG ſit catinus aquam excipiens, mox per foramina P & Q in vas quodpiam defluentem.

SCHOLION.

123. *Me non monente apparet, ſi aquæ ſalienti varias figuras inducere volueris, id fieri per artificia ſuperius expoſita* (§. 112 & ſeqq).

PROBLEMA 34.

Tab. V. Fig. 57.

124. *Flatu oris aquam ſalientem efficere.*

RESOLUTIO.

1. Sit AB ſphæra vitrea vel metallica &
2. in ea firmetur tubulus CD exiguo orificio in C inſtructus & in D infimum ſphæræ punctum fere attingens.

Dico, ſi aerem per tubulum CD exſugas & orificium C in frigidam ſtatim demergas, fore ut aqua per tubulum eundem in ſphæram aſcendat. Quodſi iteratis ſuctionibus ultra medietatem fuerit repleta & ore in C applicato aerem per tubulum infles; remoto ore aqua proſiliet.

DEMONSTRATIO.

Si enim aerem exſugis, in ſphæra AB incluſus rarior evadit externo, adeoque orificio C in aquam immerſo tantum fere aquæ aſcendere debet, quantum aeris fuerit eductum (§. 94 *Aerom.*). Quodſi vero per tubulum CD aerem infles, is per aquam ſpecifice graviorem (§. 55 *Aerom.*) aſcendet (§. 97 *Hydroſt.*), conſequenter aer incluſus comprimitur (§. 5 *Aerom.*). Saliet ergo aqua per tubulum CD (§. 79). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

125. Quodſi hanc ſphæram aquæ ebullienti immittas; aër rarefiet (§. 23 *Aërom.*), adeoque denuo aqua per tubulum CD ſalire debet.

SCHOLION.

126. *Fonticulus hic ab inventore* Herone *nomen* Pilæ Heronis *ſortitus eſt.*

PROBLEMA 35.

127. *Fonticulum conſtruere accenſis candelis ſalientem.*

RESOLUTIO. Tab. V. Fig. 58.

1. Ex lamina metallica fiant duo vaſa cylindrica AB & CD.
2. Jungantur tubis utrinque apertis

tis KL, ut aer ex ſuperiore in inferius deſcendere poſſit.

3. Tubis afferruminentur candelabra I.

4. Operculo vero baſis inferioris CF in formam catini efformato tubus FE epiſtomio G inſtructus & ad fundum fere vaſis protenſus.

5. In Q ſit foramen cochlea munitum, ut aqua in vas CD infundi poſſit.

Dico, candelis in H accenſis, aquam per tubum EF ſalire debere.

DEMONSTRATIO.

Eadem eſt, quæ problematis 14 (§. 83).

SCHOLION.

128. *Hoc eodem artificio efficies ſtatuam ad præſentiam ſolis, vel candelis accenſis, lachrymas effundentem. Neque enim alia re opus eſt, quam ut ex cavitate, in qua aer rareſit, tubulos ducas ad quasdam alias cavitates oculis vicinas & aqua repletas.*

PROBLEMA 36.

Tab. V. Fig. 59. 129. *Fontem intermittentem conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Per axem vaſis AB aſcendat tubus EF utrinque apertus, foramine in E exciſo.

2. Tubus hic afferruminetur tam vaſi ſuperiori in H, quam inferiori in E.

3. Vas ſuperius in L habeat foramen cochlea munitum, per quod aqua infundi poſſit; in baſi autem inferiore multa foraminula, per quæ deſtillare queat.

4. In vaſe inferiore ſit foramen G ita aptatum, ut aqua per eam non defluat, niſi ad altitudinem EM conſtituta.

Dico, aquam ex hoc fonte per intervalla fluere.

DEMONSTRATIO.

Cum enim foramine E aperto aeri externo per tubum EF in vas ſuperius AB aditus pateat; aeris incluſi elater æqualis eſt ponderi atmoſphærico (§. 33 *Aerom.*). Gravitas igitur aquæ in eodem vaſe contentæ ipſi juncta preſſionem majorem efficit, quam reſiſtentia ponderis atmoſphærici ad foraminula, adeoque aqua deſtillare debet. Quam primum vero aqua delapſa foramen E occludit, ut nullus amplius aer in locum aquæ delapſæ ſuccedere poſſit; perinde eſt, ac ſi vas quoddam exiguo orificio inſtructum inverteres, adeoque fluxus aquæ per foraminula ſiſtetur (§. 88 *Aerom.*). Sed dum aqua ad altitudinem EM usque aſſurgit, per foramen G in cavitatem vaſis CD deſcendit. Ea igitur defluente, foramen E rurſus aperitur aerique aditus in vas ſuperius AB denuo conceditur. Unde patet, aquam denuo per foraminula ejusdem effluere debere. Habemus

bemus adeo fontem intermittentem. *Q.e.d.*

Aliter.

Tab. V. Fig. 60. Quodſi fonticulum per intervalla ſalientem deſideres, fiant omnia ut ante, niſi quod loco foraminulorum aptandi ſint tubi recurvi PQT & RSV.

Aliter.

Tab. V. Fig. 60.

1. Sit tubus EF aquam advehens in cavitatem vaſis AB.
2. Ex hoc vaſe deſcendat ſipho GHI in minus CD lumine conveniente in L inſtructus.

Quamprimum aqua ultra ſiphonem AB deſcenderit, per ſiphonem fluet, donec vas exhauriatur, (§. 65) adeoque tamdiu per lumen L ſaliet. Quodſi igitur efficias, ut plus aquæ per lumen L ſaliat, quam per tubum EF advehitur; fontem habebis intermittentem.

SCHOLION 1.

130. *Hoc poſteriori artificio haud difficulter efficies, ut ſtatuæ aquas evomant ex improviſo in adſtantes.*

SCHOLION 2.

131. *Priori autem ſuperſtructa eſt lampas, quam in gratiam amici inventam publici deinde juris feci* (a) *& in ſequenti problemate denuo exhibeo.*

PROBLEMA 37.

132. *Lampadem conſtruere, quæ eandem quantitatem olei ellychnio conſtanter affundit, & in qua largius pabulum flammam nunquam extinguit, multo minus receptaculum ellychnii egreditur, maximo licet calore urgente.*

RESOLUTIO.

1. Fiat vaſculum cylindricum AC BD, cui oleum infundi poſſit & ipſi afferruminetur aliud minus formam parallelepipedi habens FED & roſtro FH inſtructum, pro recipiendo ellychnio. Tab. VI. Fig. 62.
2. Illud diaphragmate KL dividatur, fundo DB multo propriore, quam fornici AC.
3. Tubulus PO in P & O utrinque apertus interiori vaſculi AB parieti adhæreat, quem *tracheam* appello. Ejus oſculum ſuperius P fornicem AC propemodum attingit; inferius vero O ſuperficiem olei ad libellam HI conſtituti lambit.
4. Diaphragmati afferruminetur tubulus alius MN, utrinque ſimiliter apertus & ad eandem olei libellam HI protenſus.
5. Fundo vaſis DB afferruminetur tubulus QR, cujus oſculum ſuperius Q ultra libellam olei tantillo emineat & tranſeat per matricem cochleæ T, qua vas AB CD ad pedamentum VTX firmatur.
6. Intra hoc fiat vaſculum cavum *ab* &

(a) in Actis Erudit. A. 1711 p. 30 & ſeqq.

a b & in G foramen exiguum, per quod aeri externo in cavitatem DKLB pateat aditus.

7. Denique in fornice, fiat foramen cochlea S munitum, ut lampas (ſi quando opus fuerit) a ſordibus purgari queat.

Dico, ſi lampas a pedamento avulſa invertitur & digito ad foramen G applicato oleum per tubulum QR altero MN paulo ampliorem infunditur, fore ut oleum cavitatem GB ingreſſum per tubulum NM, vaſe in latus BC inclinato, in proprium receptaculum AL delabatur, & lampas repleta & ad pedamentum VT rurſus firmata munere ſuo, ut decet fungatur.

DEMONSTRATIO.

Quamdiu enim oleum ad libellam HI conſiſtit, ne guttula quidem una per MN effluere poteſt, vi eorum, quæ ad problema præcedens demonſtrata ſunt (§ 129). Inſenſibili autem ejus quantitate abſumta, aer per tracheam OP ingreditur & oleum per MN deſtillat. Eandem itaque quantitatem olei lampas conſtanter ellychnio affundit. *Quod erat unum.*

Quodſi lampas in locum calidum deferatur, aer ſupra oleum rareſit (§. 23 *Aerom.*), adeoque oleum per tubulum MN expellitur (§ 83): quod cum ultra libellam HI aſſurgat, per tubulum QR in vaſculum *a b* defluit, conſequenter nec flammam extinguere, nec extra receptaculum ellychnii egredi poteſt. *Quod erat ſecundum & tertium.*

SCHOLION.

133. *Ut demonſtratio ocularis evaderet, vas ABCD ex vitro fieri curavimus obſervavimusque, tracheam PO non nimis arctam eſſe debere, ſi deſideres, ut olei vel minima quantitas abſumta ſtatim refundatur. Etenim gutta olei aeri in tubulum nimis arctum aditum non concedit, niſi ejus vi per totam tubuli longitudinem in vas ACLK abripiatur. Unde ſimul colligitur, operam dandam eſſe ut orificium tracheæ ſit bene politum.*

PROBLEMA 38.

134. *Conſtruere fonticulum ſalientem, in quo avicula tantum aquæ ſorbeat, quantum ex illo profluit.*

RESOLUTIO.

1. Fiat vas AF per diaphragma ED in duas cavitates diviſum, quarum ſuperior AEPD in duas alias AB & CP per diaphragma CB ſubdividitur. Ta[b.] VI[.] Fi[g.] 6[.]
2. In Q, R & S fiant foramina cochleis munienda, ut aqua infundi & effundi poſſit, prout uſus poſtulaverit.
3. Ex vaſe AB in vas EF deſcendat tubus GH fundo illius afferruminatus, fundum vero hujus non prorſus contingens atque clavicula P inſtructus.
4. Ex vaſe EF aſſurgat tubus KI baſi illius ſuperiori afferruminatus,

tus, hujus vero baſin ſuperiorem non prorſus attingens.

5. A fundo fere vaſis CD aſcendat alius tubus LM tranſiens per fundum phialæ O aquam ſalientem excipientis, epiſtomio T inſtructus.

6. Denique per roſtrum, corpus & pedes aviculæ vaſi AB inſiſtentis ducatur ſiphon inflexus ZV.

Dico, ſi epiſtomia P & T aperias, vaſis A & B aqua repletis & roſtro aviculæ aquæ immerſo, fore ut aqua per tubulum LM ſaliat & avicula eam ſorbeat.

DEMONSTRATIO.

Dum epiſtomio P aperto aqua per tubulum GH, ex vaſe AB in vas EF deſcendit; aqua ex phiala per roſtrum avis aſcendere debet (§. 75). Dum vero per ſiphonem ZV ſemel fluit, motus continuatur, donec aqua omnis ex phiala fuerit exhauſta (§. 65). Enimvero quamdiu aqua per tubum GH deſcendit; aqua ex cavitate CP per tubum LM ſalire debet (§. 81). Habemus ergo fonticulum ſalientem & aviculam tantum aquæ ſorbentem, quantum ex illo profluit. *Q. e. d.*

SCHOLION.

135. *Eadem prorſus ſtructura eſt fontis* Kircheriani, *in quo avis tantum aquæ ſorbet, quantum a ſerpente in poculum exſpuitur. Abſconde enim tubum LM intra corpus ſerpentis & eum inflecte, ut lumen M per os hiet: nec difficulter forma fontis in Kircherianam mutabitur.*

PROBLEMA 39.

136. *Fontem conſtruere in vaſe vitreo clauſo ſalientem.*

RESOLUTIO.

1. Sit ſphæra vitrea A, cujus orificium cochlea BE munitum. Tab. VI. Fig. 64.

2. Per cochleam tranſeat tubulus DC, exiguo lumine in C, ſed ampliore in D inſtructus, cujus pars major ſit extra vitrum.

3. Eidem cochleæ afferruminetur tubulus admodum gracilis, ſed altero CD multo longior EF.

4. Sint duo vaſa IK & LM mediante tubo HN inter ſe connexa & baſi ſuperioris IK afferruminetur tubulus GH,

5. per quem ad vas inferius demittatur tubus EF.

Dico, ſi vas IK & aliquam ſphæræ A partem aqua repleas, aquam ex ſphæra per tubulum EF in vas LM deſcenſurum & per tubulum DC in ſphæram aſcenſurum, per lumen exiguum C ſaliendo.

DEMONSTRATIO.

Dum enim aqua per tubulum EF deſcendit, aer in ſphæra dilatatur (§. 36 *Aerom.*), adeoque elater ejus minuitur (§. 71 *Aerom.*). Quare cum incluſus ante dilatationem ponderi atmoſphærico æqualis

lis exiſteret (§. 33 *Aerom.*), quo aqua in vaſe IK premitur (§. 21 *Aerom.*); incluſus poſt dilatationem ad lumen C minus reſiſtit, quam externus aquam in vaſe IK premit. Aqua igitur per tubulum DC aſcendere & quia lumen C exiguum *per hypoth.*, ſalire debet (§. 48). *Q. e. d.*

SCHOLION.

137. *Ex demonſtratione apparet, aquam per tubulum DC ſalire debere, modo orificium D in aquam immergatur, orificio F extra eam conſtituto. Unde ſtructura fontis multis modis variari poteſt.*

CAPUT V.
DE VARIIS MACHINAMENTIS HYDRAULICIS.

PROBLEMA 40.

138. *Fores conſtruere, quibus apertis aqua conſpergatur ingrediens.*

RESOLUTIO.

Tab. VI. Fig. 65.

1. Ad latera valvarum juxta ſuperliminare collocentur vaſa AB & CD aqua plena, quibus
2. Tubus recurvus EFGH ita adaptetur, ut pars FG ſub limine lateat tubulis C, I, K, L per foramina liminis hiantibus.
3. In M & N tubo FG applicentur epiſtomia cum valvis P & Q ita connexa, ut iis apertis & ipſa aperiantur.

Quo facto, aqua per tubulos I, K & L proſiliet & ingredientem madidabit (§. 48).

SCHOLION.

139. *Eodem artificio riſcum conſtrues, quo aperto, facies aperientis aqua conſpergatur.*

PROBLEMA 41.

140 *Efficere, ut in horto vel crypta deambulans ſubito aquis ex terra proſilientibus conſpergatur.*

RESOLUTIO.

Tab. VI. Fig. 66.

1. Sub terra ita abſcondatur antlia AB, ut virga ferrea GE, qua depreſſa embolus movetur, paulo ultra ipſius ſuperficiem promineat.
2. Embolus F ſit valvula inſtructus & ita aptetur, ut a pede calcantis depreſſus a lamina elaſtica A rurſus attollatur.
3. Sit CD tubus aquam in cylindrum AB advehens, contra pulverem terræ ac arenæ granula probe muniendum.
4. Fundo antliæ afferruminetur tubus IK, cujus orificium M ultra

tra ſuperficiem terræ paulo promineat.

Dico, aquam per K proſilire debere, ſi pede in G inſiſtas.

DEMONSTRATIO.

Aqua nimirum per tubum CD in ſuperiorem antliæ AH partem delapſa urget valvulam E, quæ cum in partem inferiorem hiet, aperitur & aquæ illuc tranſitum concedit, in tubo LM usque ad N aſcenſuræ (§. 34 *Hydroſt.*). Quodſi jam pede calcantis embolus F deprimatur, valvula E clauſa aquæ regreſſum in ſuperiorem antliæ partem impedit (§. 84): quare per tubum LM cum impetu ejicitur. Remoto autem pede ab embolo GF, piſtillum ſitui ſuo reſtituitur. Saliet itaque aqua ex M, quoties pes calcantis admovetur embolo G. *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

141. *Cum aqua ex altitudine quadam delapſa, ad eam fere rurſus aſcendat* (§. 48); *qua tubo CD advehitur, ex vaſe intra terram defoſſo & in planitie replendo illuc derivari debet.*

SCHOLION 2.

142. *Quodſi vero aqua per tubum CD advecta ex altitudine quadam fuerit delapſa; in I aptanda valvula, cui deprimendæ ſolum aquæ pondus non ſufficiat: vel totum machinamentum alia ratione conſtrui deberet.*

PROBLEMA 42.

143. *Conſtruere machinam, quæ aquam inſigni cum impetu elevet.*

RESOLUTIO.

1. Conſtruatur antlia compreſſiva AB (§. 90). Tab. VI. Fig. 67.
2. Ex ea tranſeat tubulus CD in vas cylindricum HI, cujus ex orichalco paratæ altitudo ſit 2 pedum, diameter octo digitorum.
3. Tubus CD ſit valvula in D inſtructus, quæ in cavitatem vaſis HI hiet.
4. Denique in K afferruminetur tubus recurvus KL, mediante epiſtomio pro arbitrio claudendus & aperiendus.

Dico, hanc machinam aquam ad inſignem altitudinem elevaturam.

DEMONSTRATIO.

Embolo enim EF elevato, valvula G aperitur & aqua in antliam AB aſcendit (§. 36 *Aerom.*): quo rurſus depreſſo, illa clauditur & valvula D aperta aqua per tubum CD in vas HI ejicitur (§. 85). Quo facto, cum epiſtomium O ſit clauſum, aer in cavitate vaſis HI comprimitur (§. 17 *Aerom.*). Quodſi itaque ſufficienter fuerit compreſſus; aperto epiſtomio, aqua inſigni cum impetu per tubum KL prorumpet (§. 79). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

144. Quoniam agitatione emboli continuata, aër in eodem compreſſio-

nis gradu conſervari poteſt; hæc machina aquam continuo ejicit.

PROBLEMA 43.

145. *Hydracontiſterium, hoc eſt, machinam conſtruere, quæ aquam ad incendia reſtinguenda ad datam altitudinem & in datum locum evomat.*

RESOLUTIO.

Tab. VII. Fig. 68. 1. Fiat ciſta AB figuram parallelepipedi habens & rotis C inſtructa, ut commode ad locum incendii advehi poſſit. Sunt & qui ciſtam trahæ imponunt, firmitatis gratia, quia non tam facile damnum patitur, quam rota.

2. Intra ciſtam firmetur machina Cteſibiana cum gemino cylindro (§. 93).

3. Ad agitandos embolos applicentur vectes DE cum axe curvato, ita ut embolus alter deprimatur, dum unus attollitur.

4. Tubus, per quem aqua ejaculatur, immittatur alteri mobili GH, qui ad locum deſideratum commode dirigi poteſt.

Si enim continuo aqua in ciſtam AB infundatur & emboli nunc eleventur, nunc deprimantur; aqua per tubum GH ad locum deſideratum ejaculabitur (§. 93) Machina igitur ad reſtinguenda incendia commode utimur.

SCHOLION 1.

146. *Belgæ aliique ipſorum exemplo excitati tubo mobili GH ſubſtituunt tubum longum, flexilem, ex materia velorum vel corio factum, qui manu arreptus ad quævis loca incendio infeſtata trahitur ab homine ex conclavi uno in alterum libere deambulante, prout neceſſitas poſtulaverit. Unde apparet, hac ratione hydraconſtiterii eſſe locum, etiamſi flamma in conclavibus ædificii tantum ſæviat, nec per tectum ac feneſtras foras erumpat.*

SCHOLION 2.

147. *Non inutiliter machinæ Cteſibianæ ſubſtituere licet alteram* in probl. 42 (§. 143) *deſcriptam, quia aquam non per intervalla, ſed continuo ejaculatur* (§ 144).

PROBLEMA 44.

148. *Efficere, ut ad ſpeculum aut objectum aliud accedens aqua ex improviſo conſpergatur.* Tab. VI. Fig. 69.

RESOLUTIO.

1. Sit AB ciſta aqua plena, cujus fundo afferruminetur tubus recurvus CDEF.

2. Pars tubi intra ciſtam AB paulo infra embolum elevatum foraminibus nonnullis pertundatur.

3. Denique embolus G ita immittatur, ut ceſſante vi deprimente, per elaterium rurſus attollatur.

DEMONSTRATIO.

Aqua enim per foraminula in tubum CD defluet ac in tubo EF eousque aſcendet, donec in eadem alti-

altitudine ſubſiſtat, ad quam aqua intra ciſtam AB conſtituitur (§. 34 *Hydroſt.*). Quodſi vero embolum in H pede deprimas, aquam per F ejiciet, adeoque eadem ex improviſo conſpergeris. *Q. e. d.*

SCHOLION.

149. *Quodſi aqua ex alto delabitur, ſufficit, ut pede deprimatur valvula, quæ aqua aditum in tubum EF concedat* (§. 85).

PROBLEMA 45.

150. *Conſtruere ſpeculam, in qua ſpeculator conſtitutus ſonum ingentem cornu edat.*

RESOLUTIO.

Tab. VI. Fig. 70.

1. In ſuperiore loco ſpeculæ conſtituatur vas aqua plenum AB & in inferiore aliud aere plenum CD, contra omnem vero aeris acceſſum optime munitum.
2. Ex vaſe ſuperiori AB in inferius CD tranſeat tubus EF epiſtomio L inſtructus.
3. Ex vaſe inferiori CD aſcendat tubus HG per vas, pedem, corpus & os ſpeculatoris, cui cornu KH ſit afferruminatum.

Etenim laxato epiſtomio L, aqua ex vaſe AB per tubum EF deſcendit & ingenti celeritate aerem ex vaſe CD per tubum HG expellit, qui dum per cornu egreditur eundem ſonum parit, qui aere in cornu inflato audiretur.

SCHOLION 1.

151. *Simili artificio ſonos alios producet.* Kircherus (b) *cantum ſingularum fere avicularum notis muſicis exprimere & in cylindrum phonotacticum aquis per tubos delabentibus facile convertendum transferre docuit; unde multa excerpſit* Schottus (c); *quæ ad hoc argumentum hydraulicum perficiendum tendunt.*

SCHOLION 2.

152. *Huc referenda quoque ſunt organa hydraulica jam veteribus nota & a* Vitruvio (d) *deſcripta, a* Perraltio *in notis ſchematiſmo nitido egregie illuſtrata: de quibus, cum non amplius in uſu ſint, hic dicere non attinet.*

PROBLEMA 46.

153. *Ventum excitare ad flammam conſervandam aptum.*

RESOLUTIO.

Tab. VII. Fig. 71.

1. Ad baſin dolii ſuperiorem AB aptetur tubus CE, cujus altitudo 5 minimum aut ſex pedum, amplitudo ea, ut tota aqua continuo affluente repleatur.
2. Tubus EC hinc inde inſtruendus eſt tubulis F aut, ſi mavis, foraminulis, ut ab aqua deſcendente aer una in dolium abripiatur.
3. In baſi inferiori CG e regione luminis E ſita ſit tabula marmorea aut lapidea alia polita, in quam

(b) Muſurgiæ lib. 9. part. 5.
(c) in Magia Univerſali Naturæ & Artis part. 2. lib. 6.
(d) lib. 10. c. 13. f. m. 325.

quam aqua perpendiculariter incidat.

4. In G aptetur tubus I anguſtior eo, per quem aqua delabitur, ut delapſa ex dolio iterum effluat.

5. Denique in H ſit tubus ad eum locum protenſus, quo ventus ſpirare debet.

Dum enim aqua cum impetu in tabulam lapideam M incidit ac diſpergitur, aer ingenti impetu per tubum H expellitur. Habes ergo ventum valide ſpirantem (§. 157 *Aerom.*).

SCHOLION 1.

154. Franciſcus Tertius de Lanis (e) *autor eſt, ſe vidiſſe, hoc artificio ventum majorem fuiſſe excitatum, quam qui follibus decem aut duodecim pedibus longis efficiebatur. Hinc in fornacibus majoribus ad liquandum ferrum aliaque metalla eodem utuntur.*

SCHOLION 2.

155. *Enimvero opus non eſt, ut tubus CE ſit rotundus & vas ABCD figuram dolii habeat. Utriusque figura ad arbitrium variari, e. gr. quadrata fieri poteſt. Unde quidam loco dolii cameram ex lateribus conſtruunt. Opera tantummodo danda, ne aer ex vaſe AB CD ullibi, quam per tubum H erumpere poſſit.*

SCHOLION 3.

156. *Succedit etiam artificium, ſi nullum* Tab. VII. Fig. 72. *adſit dolium; ſed aqua per tubum quadratum AB nullis ſpiraculis inſtructum tantum delabatur, ad quem aptatus ſit tubus GH, unde ventus ſpirat. Quodſi uſus poſtulaverit, ut ventus interrumpatur, obturato orificio H, aperiatur alius I, vento exitum concedens.*

PROBLEMA 47.

157. *Duo vaſa conſtruere, quorum unum utut plenum vino, nihil tamen ejus effundit, niſi alterum fuerit aqua plenum eamque effundat: quæ* Vaſa concordiæ *vocantur.*

RESOLUTIO.

1. Sint AB & CD duo vaſa, quæ mediante tubo recurvo EFGH inter ſe communicent. Tab. VII. Fig. 73.

2. In utroque vaſe aptetur ad fundum diabetes (§. 70), ita ut orificium tubi minoris I ſit infra orificia E & H tubi recurvi EFGH.

Quodſi vas AB vino repleatur, donec lumen I ſit in libella ejus; nihil effluet (§. 70). Sed ſi vas alterum CD aqua adimpleas totum; per tubum EFGH vas alterum AG ingreditur (§. 34 *Hydroſt.*) & quantitatem liquoris ibidem auget. Quare cum jam utrinque liquor ultra orificium I aſcendat; per M omnis aqua ex vaſe CD, per L vero vinum omne ex vaſe AB effluet (§. 70). Q. e. d.

PROBLEMA 48.

158. *Vas conſtruere, quod tantum vini effundit, quantum aquæ infuderis.*

RE-

(e) in Magiſterio Naturæ ac Artis lib. 5. c. 3. artif. 25. f. 197.

RESOLUTIO.

Tab. VII. Fig. 74. 1. Fiat vas ABCD in duas cavitates per diaphragma GF diviſum & undiquaque contra acceſſum aëris probe munitum.

2. Operculo A D afferruminetur tubulus HI per cavitatem unam GB ad fundum fere vaſis CB pertingens.

3. Cavitates duæ inter ſe communicent tubo recurvo LK.

4. Denique cavitati alteri immittatur tubulus M & utraque cavitas inſtruatur foramine cochlea munito, ut, ſi opus fuerit, liquor infundi & rurſus effundi poſſit.

Quodſi enim cavitatem AF vino repleas, nihil infuſi per MN effluet (§. 34 *Hydroſt.*). Enimvero ſi per tubulum HI aquam cavitati alteri affundas; aer per tubum KL in cavitatem alteram propellitur adeoque vinum per tubum MN expellit.

PROBLEMA 49.

159. *Vas conſtruere, quod liquorem excipit, donec fuerit plenum, ſi conſtanter eum affuderis; ſed ne guttam amplius admittit, ubi ſemel ceſſaveris.*

RESOLUTIO.

1. Vas AB per diaphragma CD in duas cavitates ACD & CDB dividatur, quarum ſuperior aperta eſſe poteſt.

2. Ad diaphragma in cavitate ſuperiore AD aptetur diabetes GF: ſub diaphragmate autem in cavitatem inferiorem hiet tubulus H. Tab. VII. Fig. 75.

Quodſi aquam conſtanter affundas, ea per diabetem GF defluet in cavitatem inferiorem CD aëremque per tubulum H expellet (§. 70). Sed ſi aliquamdiu deſiſtas, aër tubum longiorem diabetæ replebit, excepta parte FE aquæ immerſa. Nihil ergo amplius per tubum iſtum in cavitatem BC defluet.

PROBLEMA 50.

160. *Vas conſtruere, ex quo per idem orificium vel aqua vel vinum fluit, prout deſideraveris, vel etiam mixtum ex aqua & vino.*

RESOLUTIO.

1. Sit vas AB per diaphragma CD in duas cavitates diviſum. Tab. VII.

2. In operculo vaſis AE fiant duo foramina F & G, per quæ aeri in utramque cavitatem aditus patet. Fig. 76.

3. In fundo fiant duo alia L & D, per quæ liquores in cavitatem IHB deſcendere poſſunt.

4. Ex tertia hac cavitate procedat tubulus M,

Quodſi

Quodſi foramen G obtures, per tubum M effluet vinum ex cavitate CI. Si foramen F obtures, fluxus vini ceſſabit, fluetque aqua ex cavitate CB per eundem tubulum M. Quodſi denique utrumque foramen F & G fuerit apertum; aqua & vinum una per tubulum M effluent.

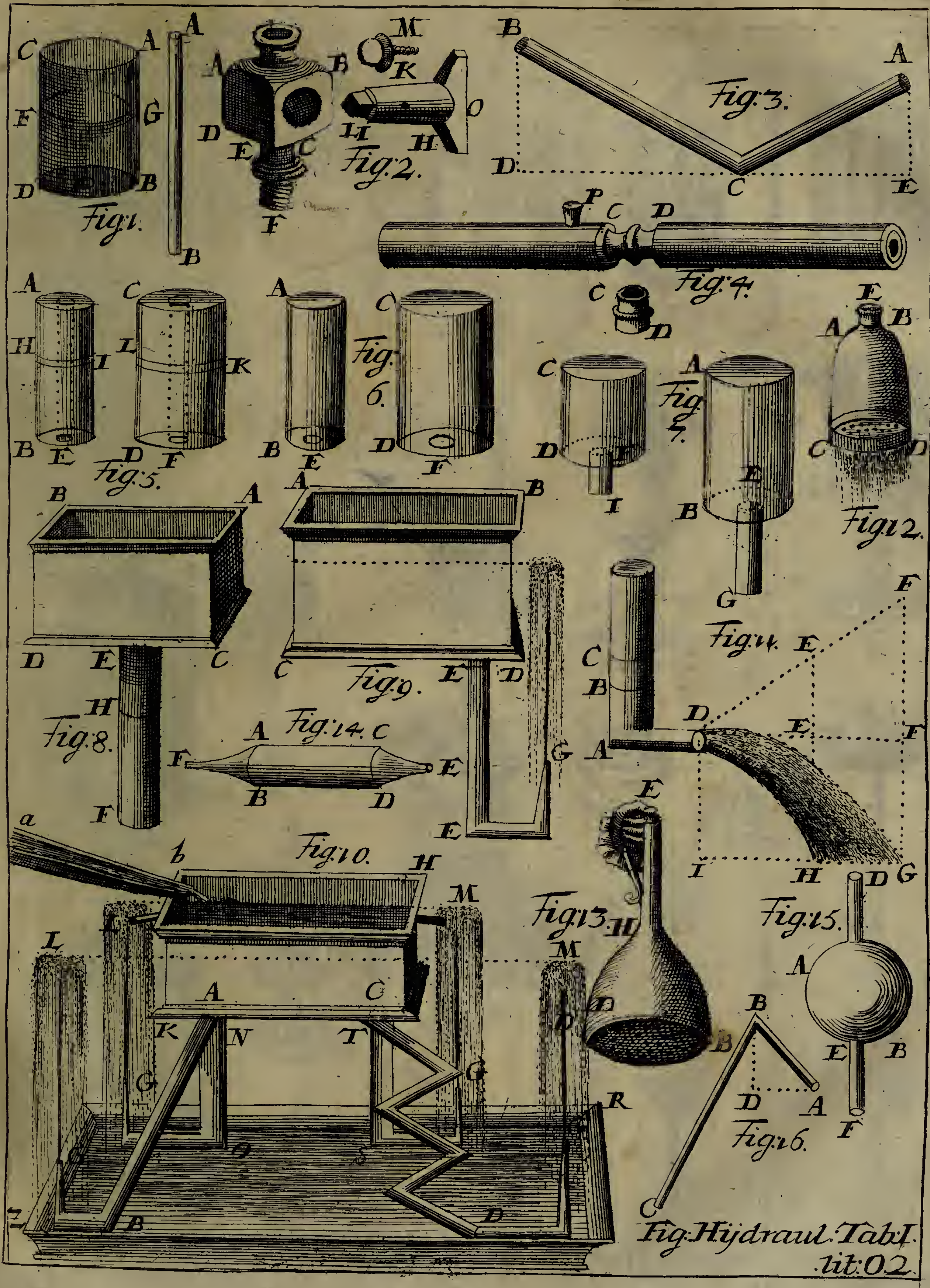
SCHOLION.

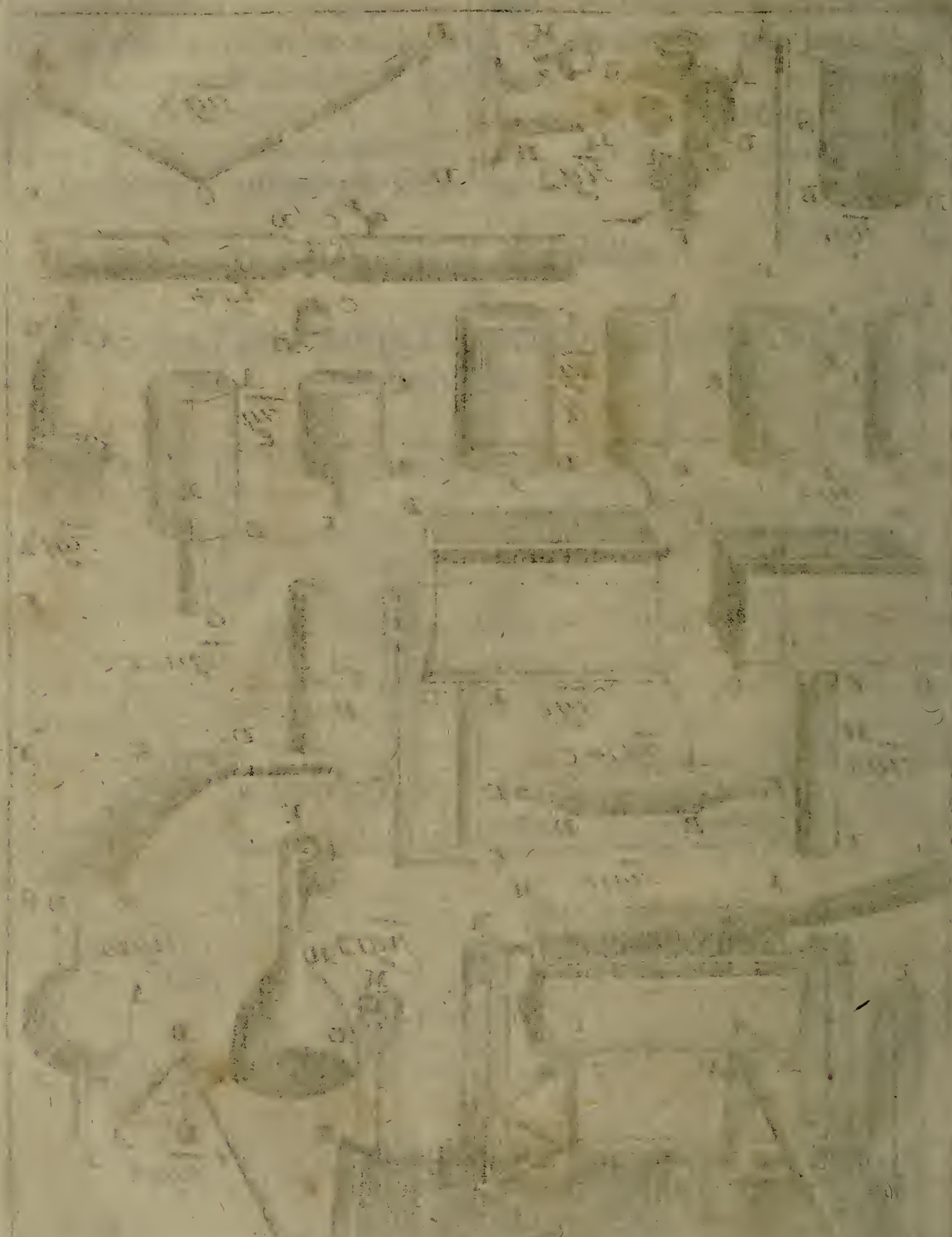
161. *Ex his principiis innumera alia derivare licet.*

FINIS Hydraulicæ & Totius Tomi primi Elementorum Matheſeos univerſæ.

Errata ſic corrige.

	pag.	lin.	Errat.	Corrig.
In Anal. finit.	299	18	64 : 3 &c.	$\frac{216}{3} - 15 - \frac{6}{3} = 72 - 17 = 55$
	337	lin. 31 32	GH EI	DH DI
in Anal. infin.	469	21 ſeq	$m - 1$	$m + 1$
in Hydr.	823	16	AB deſcenderit.	in vaſe A aſcenderit.


Fig.1.
Fig.2.
Fig.3.
Fig.4.
Fig.5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig.8.
Fig.9.
Fig.10.
Fig.11.
Fig.12.
Fig.13.
Fig.14.
Fig.15.
Fig.16.
Fig:Hydraul:Tab:I.
tit:02.



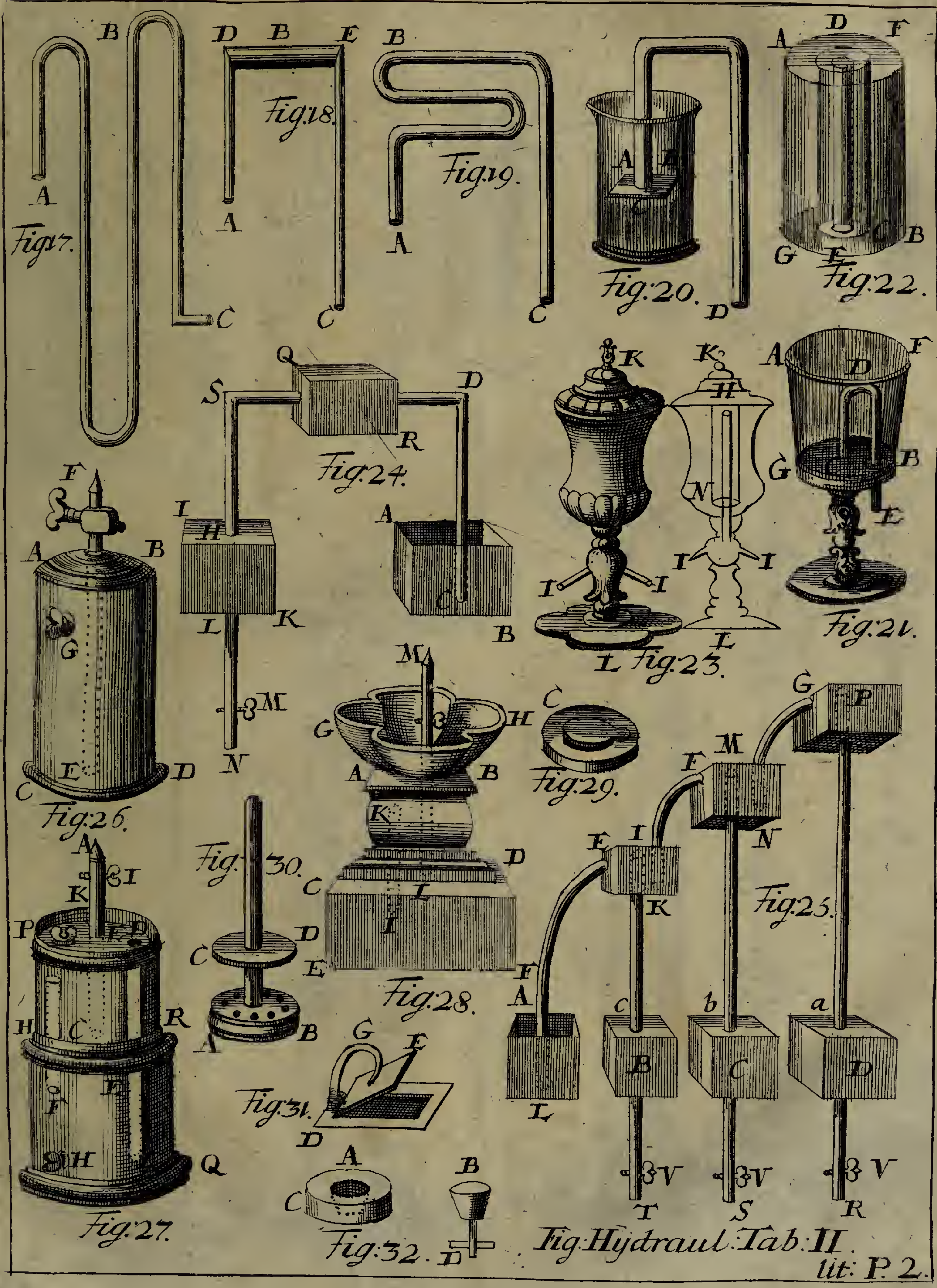


Fig: Hydraul: Tab: II.
lit: P. 2.

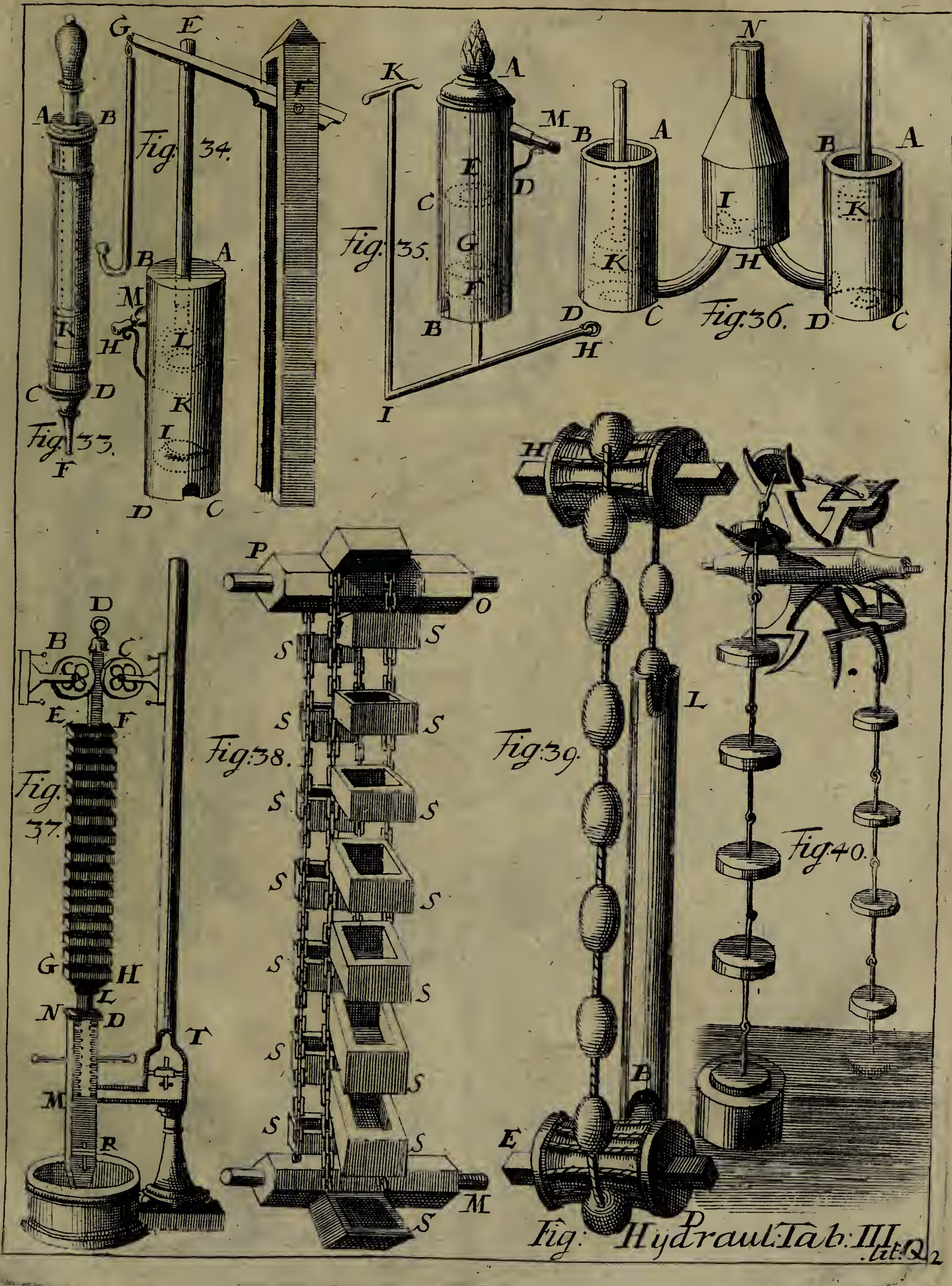


Fig: Hydraul: Tab: III.
lit. Q 2



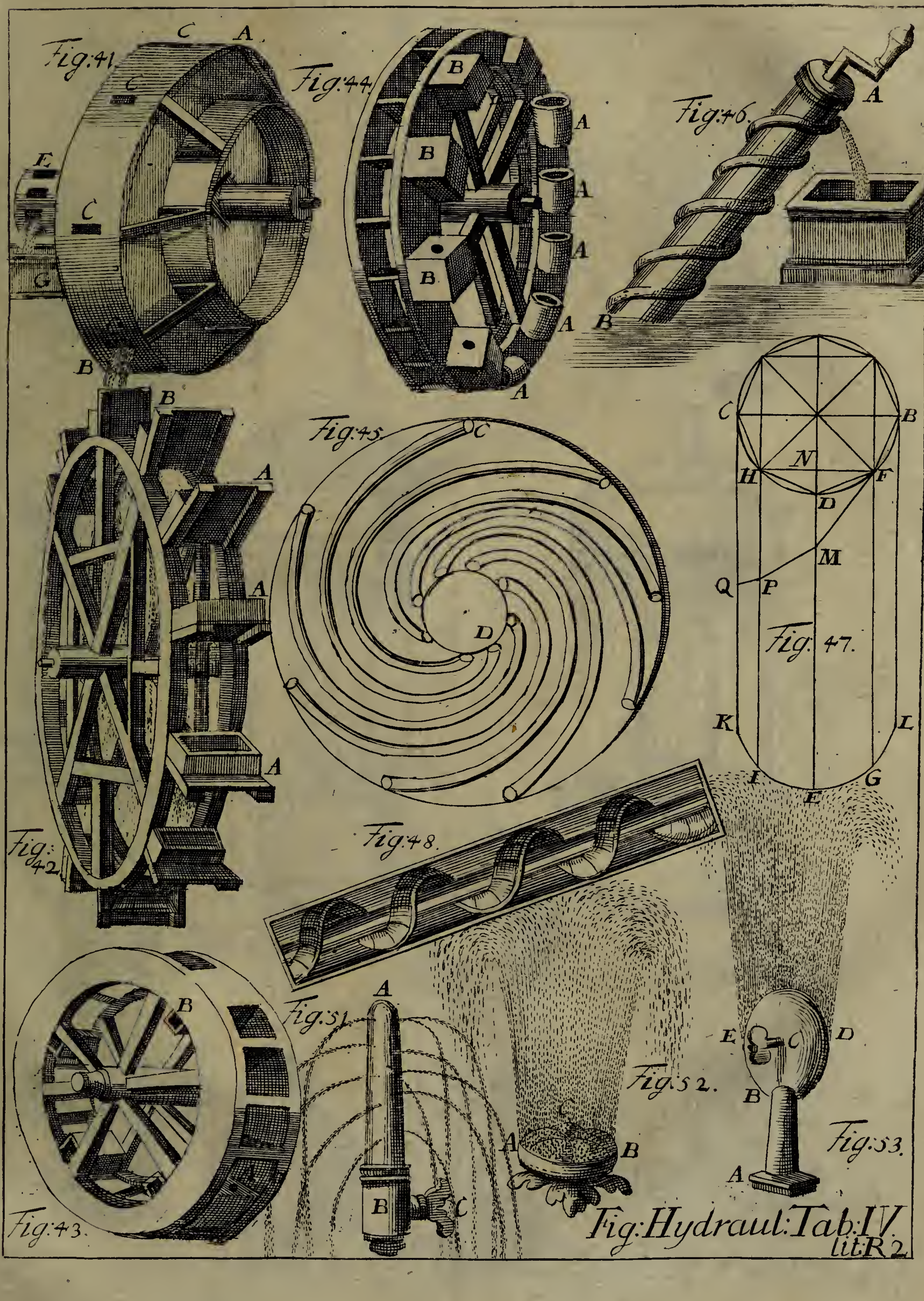


Fig:Hydraul:Tab:IV.
lit:R2.

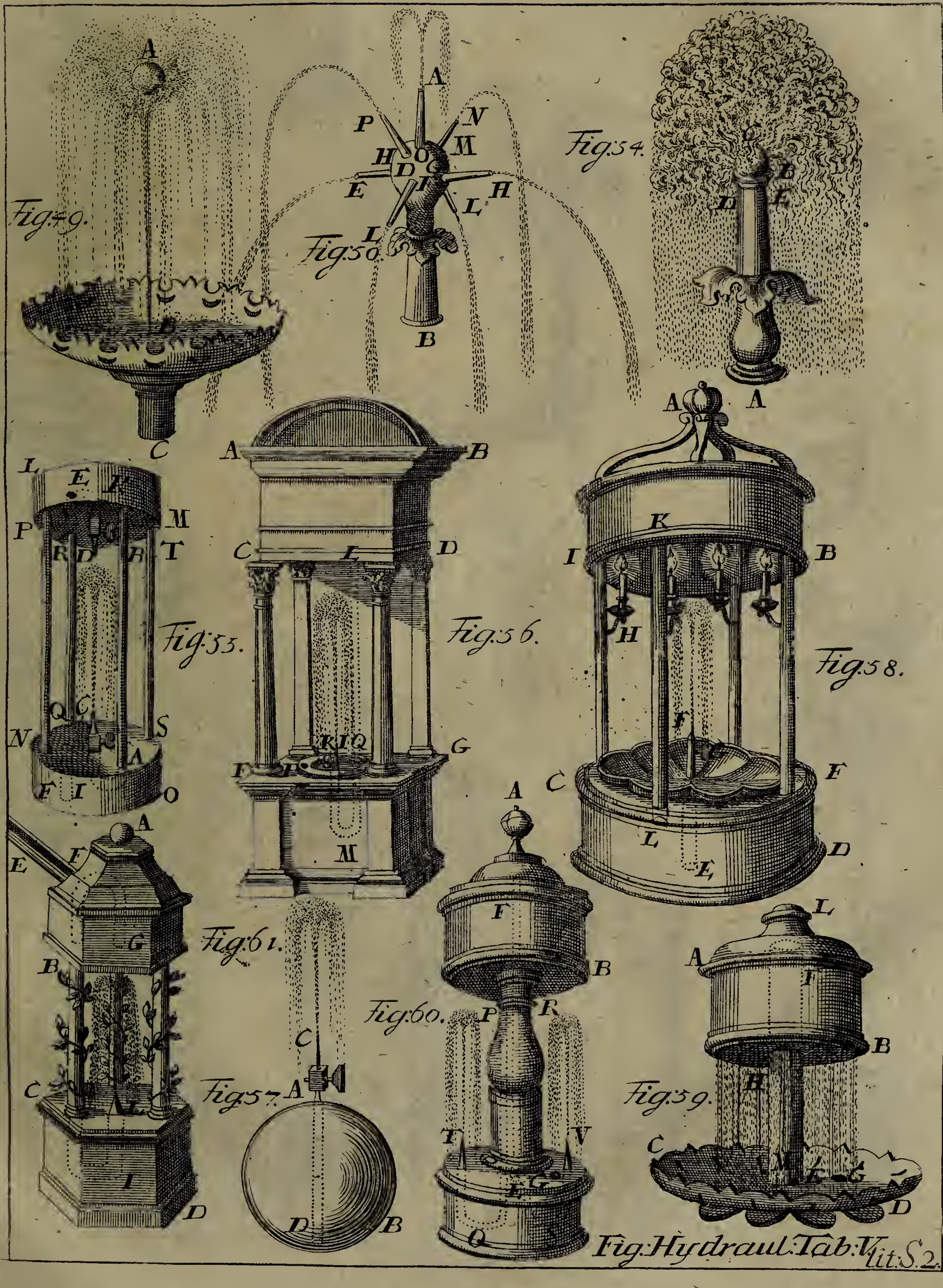


Fig: Hydraul: Tab: V. lit. S. 2.

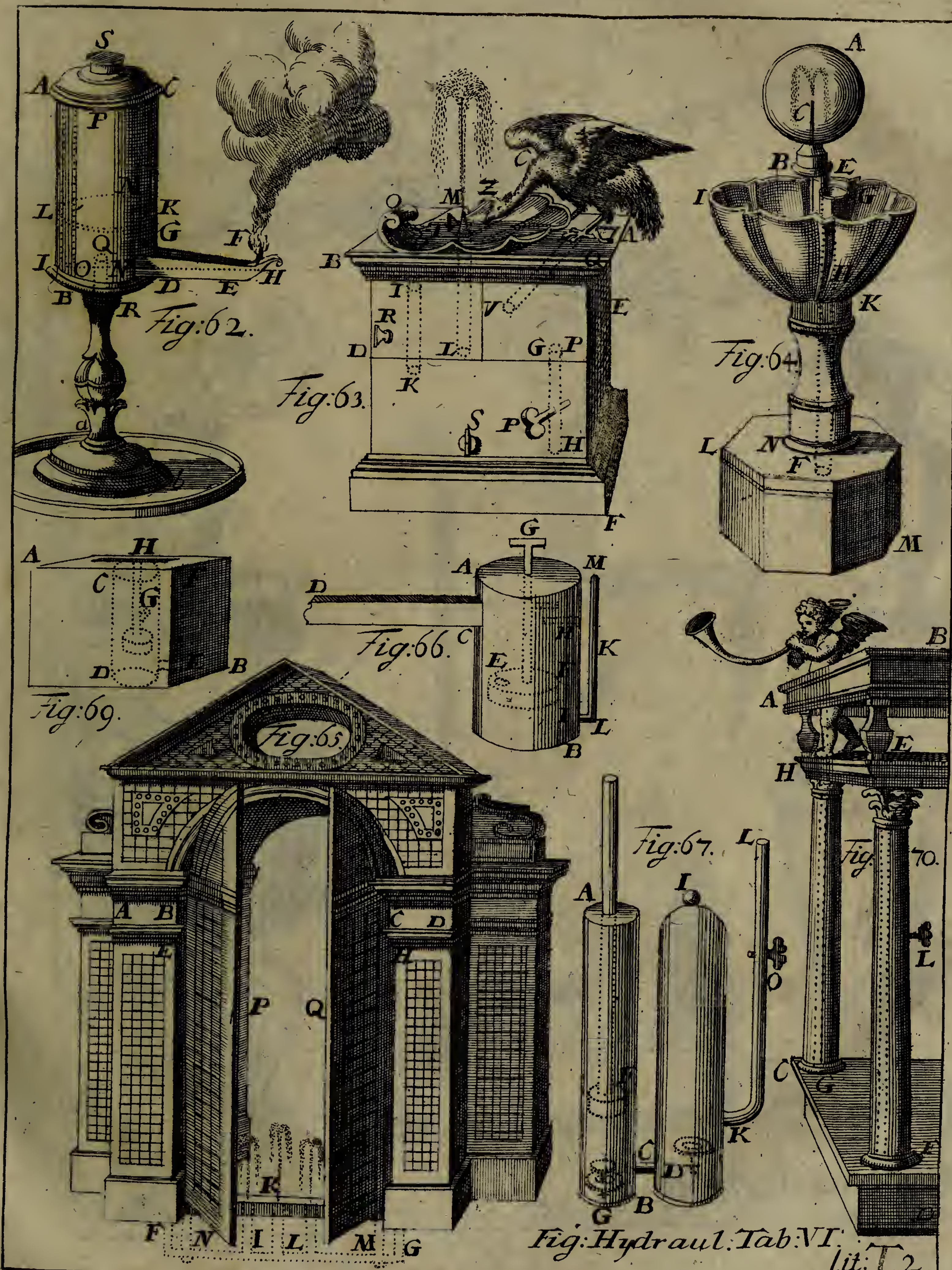


Fig:Hydraul:Tab:VI.

lit:T.2.





lit:A:3. Fig:Hydraul: Tab:VII.



INDEX
RERUM ET VERBORUM.

A.

Abacus Pythagoricus. *Conſtructio* 35. b. *uſus* 36. a.
Abſciſſa. 364. a.
Abſoluta gravitas. *Definitio* 581. a. *ratio* 705. b.
Acceleratus motus. 548. a.
Acceleratus uniformiter motus. *Definitio* 548. a. *leges* 549. & ſeqq.
Actio gravitatis *ubi minor*. 599. a.
Acuminariæ molæ *conſtructio*. 688. a.
Acutangulum triangulum. 104. b.
Adæquata notio. *Definitio* 6. *gradus*. ibid.
Additio. *Definitio* 27. a. *ſignum*, ibid. *leges in numeris integris* 31. 32. *in fractis* 64. b. *in litteris* 148 b. *in irrationalibus* 259. a.
Æquabilis motus. *Definitio*, 543. a. *leges* 543. b. & ſeqq.
Æquale. *Æqualium definitio* 22. a. *proprietates* 29. b. & ſeqq.
Æqualitatis *ſignum* 22. a.
Æquatio. *Definitio* 279. b. *natura* 343. b. *radix* 279. b. *mutationes* 347. & ſeqq. it. 352 b. *conſtructio* 317 & ſeqq. 319. 419 & ſeqq.
Æquatio cubica. *Definitio*. 280. a. *conſtructio* 419 & ſeqq. *reſolutio* 322 & ſeqq.
Æquatio exponentialis 511.
Æquatio quadratica. *Definitio* 280 a. *conſtructio* 319. *reſolutio* 281. a.
Æquatio ſimplex. *Definitio* 280. a. *conſtructio* 317. b.
Æquiangula figura. 105. b.
Æquiangulæ inter ſe figuræ. ibid.
Æquicrurum triangulum. *Definitio* 104. b. *centrum oſcillationis* 605. b. & ſeqq. *conſtructio* 121. a. *proprietates* 117. a. 130. b. *eorum ſimilitudo* 121. a.
Æquidifferentes quantitates. *Definitio* 82. a. *proprietates*. 82. b. & ſeq.
Æquidifferentia continue. 82. a.
Æquidifferentia diſcretim. ibid.
Æquilateræ inter ſe figuræ. 105. b.
Æquilatera figura 104. a.
Æquilatera hyperbola. *Definitio* 390. a. *deſcriptio* 395. a. *locus ad eandem* 409. a.
Æquilaterum triangulum. *Definitio* 104. a. *conſtructio* 120 b. *proprietates* 117. b. 130 b.
ex æquo *proportionalia*. 57. a.
Æquiponderantia. *Eorum definitio* 554. a. *leges* 956 b. & ſeqq.
Aër. *Ejus æquilibrium cum aqua* 733. a. *cum Mercurio* 734. b. *cum fluidis quibuscunque* 749 & ſeqq. *compreſſibilitas* 732 b. *compreſſio quomodo fiat* 742. *compreſſi leges* 743 & ſeqq. *atque elater* 746 b. 747. a.

747. a. 747. b. 748. 753. b. 754. a. *condenſatio* 733 b. 764 b. 765. a. *definitio* 731 a. *denſitas* 738 a. 765. b. 766. a *denſioris pondus quantum creſcat* 766. b. *exiſtentia* 732 a. *elater* 732 b. 734. 763 a. *gravitas* 733. a. *humiditas* 783. 783 a. *pondus* 741. *preſſio* 733. a. 735 a. 738 a. *primitivi ad reſiduum in vaſis, quæ evacuantur, ratio* 739 & ſeqq *rarefactio* 733. a. 763. a. 764 b. 765. a.

Aër *circumfunditur telluri* 737 b. *irruit in loca vacua* 735. a.

Aërometria. *cur & quando in matheſin relata* 729. 730. *Ejus definitio* 731. a. *utilitas* 730.

Affirmativa quantitas 247. a.

Aggregatum 27. a.

Alatæ molæ conſtructio. 692. a.

Algebra. *Ejus definitio* 279. a. *encomium* 244. 245. *uſus in Arithmetica* 279. & ſeqq. *in Geometria elementari* 316 & ſeqq. *in ſublimiori* 364 & ſeqq. *in trigonometria* 335 & ſeqq. *in vita humana* 283 & ſeq. it. 286 & ſeqq. *Signa* 245. 246 & 247.

Algebraica curva. *Definitio* 364. b. *genus* 365. b. *ſubtangens* 457. a. 460. a. *ſubnormalis* 460. b.

Algebraica reſolutio problematum 280 b. 316. 317.

Algorithmus *numerorum integrorum* p. 31 & ſeqq. *fractorum* 64 & 65. *quantitatum integrarum litteralium* 248 & ſeqq. *fractarum* 253 & ſeqq. *differentialium* 454 & ſeqq.

Altitudo *Definitio* 106 a. *proprietas* 127 a. *dimenſio* 139 & ſeqq. 238 & ſeqq.

Alternando proportionalia 53. a.

Alterna ratio 53. a.

Amplitudo *ſemitæ projectorum* 612. a. *quando maxima* 613.

Anagrammata inveniendi methodus 279 b.

Analyſis. *Ejus Definitio* 245. a. *encomium* 243. *ſtudium quomodo inſtituendum* 244. *perfectæ exemplum* 29. a.

Analyſis infinitorum 451.

Analyſis potentiarum 268 b. & ſeqq.

Analyſis rationum 321. b.

Analyſis ſitus 244.

Anatomicus ſipho 710 b.

Anemometrum. *Definitio* 772 b. *conſtructio* 773 & ſeqq.

Animata potentia. *Ejus definitio* 667 a. *ad machinas movendas applicatio* 668 & ſeqq.

Antecedens *rationis* 46. a.

Antilogarithmus 226. b.

Antlia. *Ejus conſtructiones variæ* 812. & 813.

Antlia pneumatica. *Ejus definitio* 735 b. *conſtructio* 736. *inventor* 735 b.

Angulus. *Definitio* 102. a. *crus* 102. a. *vertex* ibid. *menſura* 102. a. 110 b. *biſectio* 123 a. *triſectio* 447. b. *conſtructio* 112. a. 113. a. 122 b. *quomodo eum metiamur* 112. a. *angulorum rite menſuratorum* crite-

criterium 112. a. *æqualium indoles* 114. b. *quinam ſint æquales* 110 b. *unde diſtinguantur* 102. b. *multiplorum ſinus* 339. a. *ſecantes* 342. b. *tangentes quomodo inveniantur* 341. b. *Circa aliquod punctum conſtitutorum quantitas* 113. b.
Angulus acutus. *Definitio* 102 b. *quantitas* 111. a.
Angulus ad centrum. *Definitio* 103 b. *proprietas* 149. a.
Angulus ad peripheriam. *Definitio* 103. a. *proprietas*. 149. a. *menſura*, ibid. *quando anguli ad peripheriam æquales* ibid.
Anguli alterni. *Eorum definitio* 103. a. *quando æquales* 128. a.
Angulus contactus. *Definitio* 103. b. *proprietas* 147 b. *controverſia circa ejus quantitatem mota*. 148. a.
Anguli contigui. 102. b.
Anguli deinceps poſiti. *Definitio* 102 b. *quantitas* 111. *uſus* 111. b.
Angulus directionis 519. a.
Angulus elevationis 609. a.
Angulus extra centrum 103. b.
Anguli homologi 105. b.
Angulus incidentiæ 625. a.
Angulus in majore ſegmento *qualis* 149. b.
Angulus in minore ſegmento *qualis* 149. b.
Angulus in ſegmento 103. a.
Angulus in ſemicirculo *qualis* 149. b.
Angulorum numerus *in numeris polygonis* 301. a.
Angulus obliquus. 102. b.
Angulus obtuſus. *Definitio* 102. b. *quantitas* 111. a.
Anguli oppoſiti. *Definitio* 103. a. *proprietates* 128. a. 133. b. 134. a.
Angulus oppoſitus externus 103. a
Angulus oppoſitus internus 103. a.
Anguli polygonorum regularium quomodo inveniantur 155. a. quorumcunque ſumma quanta ſit 154. b.
Angulus rectus. *Definitio* 102. b *menſura & quantitas* 111. *Eorum ratio* ibid.
Angulus reflexionis 625. a.
Angulus ſegmenti 103. b. *anguli majoris ſegmenti menſura* 150. a. *anguli minoris ſegmenti menſura* 150. a. *proprietates* 152. b.
Anguli ſimiles. 115. b.
Angulus ſolidus. *Definitio* 183. a. *quinam anguli ſolidi æquales* 183. b. *quinam ſimiles* ibid. *unde diſtinguantur* 183. b.
Anguli verticales. *Eorum definitio* 103. a. *ratio* 113. a. *uſus* ibid.
Applicatæ *curvarum* 364. a.
Approximatio *in radicum extractione* 359.
Aquæ fluentis *vi quomodo machinæ moveantur* 677. & ſeqq.
Aquæ motus *per rarefactionem aëris productus* 810. b.
Aquæ pes cubicus *quanti ſit ponderis* 712. b.
Aquarum *deducendarum regula* 792. *modus* 793. 103. & ſeq.

Aquarum elevatio 808. b. 809. a. 812. & ſeqq. 827. b.
Aquarum fluentium leges 794 & ſeqq.
Aquarum ſalientium *altitudo* 801 & ſeqq. *cauſæ* 794. b. 808. b. 809. b. 810. a. 810 b. *arcus* 804. b.
Aqua vi aëris elaſtica mota 809. b.
Arbor molinaria 679. a.
Arcus. *Definitio* 400. b. *biſectio* 144. b. *centrum gravitatis* 562. b. *quinam æquales* 148. b. *quinam ſimiles* 110. a. b. *quomodo arcus inveniatur ex dato ſinu* 490. a. *ex ſinu verſo* 491. b.
Arcuum ſimilium ſinus 220. a.
Areæ elementum 475. a.
Arithmetica. *Definitio* 21. a. *diſcendæ methodus* 20. *uſus* 21. a.
Arithmetica binaria vel dyadica. *Definitio* 24 b. *inventor* ibid. *uſus* ibid.
Arithmetica infinitorum. *Definitio* 529. a. *inventor* 533. b. *uſus* 533 & ſeqq.
Arithmetica irrationalium 257.
Arithmetica practica 21. a.
Arithmetica rationalium 245.
Arithmetica progreſſio. *Definitio* 83. b. *proprietates* 272 b. 288. & ſeqq.
Arithmetica ſpecioſa 245. a.
Arithmetice proportionalia. *Definitio* 82. a. *quomodo inveniantur* 83. b.
Arithmeticum medium *quomodo inveniatur* 83. b.
Artificialis ſinus 226. b.
Artificialis tangens 226. b.
Aſſarium 811. a.
Aſcenſus *gravium leges* 592. a. & ſeqq. it. 595. b. & ſeqq. *leviorum in fluido ſpecifice graviori* 721. a.
Aſperum *corpus* 681. a.
Aſymptoti. *Definitio* 383. a. *quomodo inveniantur* 461. b.
Aſymptotus *conchoidis* 396. a.
Atmoſphæricum pondus. *Definitio* 734. b. *variatio* 757. a. *unde hæc cognoſcatur* 758. & ſeq.
Atmoſphæricæ columnæ *pondus quomodo determinetur*. 742.
Atramentum *in praxi geometrica adhibendum*. 107. a. b.
Aurea regula. 77. b.
Axioma. *Definitio* 9. *abuſus* 10. *Quomodo inveniatur* 9. *non indiget demonſtratione*. 10.
Axioma fundamentale *omnis philoſophiæ*. 548.
Axiomata Euclidea *qualia* 10.
Axis conjugatus. 370. b. 380. b.
Axis in peritrochio. *Definitio*. 643. *leges* 651. & ſeq.
Axis oſcillationis. 596. b.
Axis ſphæræ. 185. b.
Axis tranſverſus. 380. b.

B.

Baculi *in Geodæſia neceſſarii*. 107. a.
Barometrum. 749. a.
Baroſcopium. *Definitio* 749. a. *conſtructio*. 760. a & ſeqq.
Baſis *corporis gravis*. 574. b.
Baſis figuræ. 106. a.
Binomia radix. 68. a.
Biquadratum. 67. a.
Biquadraticalis paraboloïs. 392. b.

Biquadraticalis elliptois. 393. a.
Biſectio anguli. 123. a.
arcus 144. b.
lineæ rectæ 123.
Breviſſima via unica. 118. b.

C.

Calcando *quomodo machina moveatur.* 669. b. 670. a.
Calculus algebraicus. 248. & ſeqq.
Calculus differentialis. *Definitio.* 452. a. *leges* 453. & ſeqq. *uſus* 457 & ſeq.
Calculus differentio-differentialis. *Definitio.* 515. a. *leges* 515. & 516. *uſus* 517. & ſeqq.
Calculus exponentialis. *Definitio* 508. a. *leges* 508. b. & ſeqq. *uſus* 511. & ſeqq.
Calculus integralis. *Definitio* 474. a. *leges* 474. b. 477. b. *uſus* 475. & ſeqq.
Calculus litteralis. *Leges* 245. & ſeqq. *uſus* 260. & ſeqq.
Calculus ſitus. 244.
Calor *elaterem aëris intendit.* 763. a.
Canalis. *Definitio* 791. a. *conſtructio* 739. b. *uſus.* ibid.
Canon triangulorum naturalis. 225. a.
Catenæ ſitulis inſtructæ 814. a.
Cathetus. 104. b.
Cavi Corporis dimenſio. 202. b.
Celeritas. *Definitio* 542. a. *menſura* ibid. *valor analyticus* ibid.
Centrobaryca methodus *Guldini* 569. & ſeqq.
Centrum. *in circulo* 100. a. *in ellipſi* 372. a. *in hyperbolis* 380. b. *in ſphæra* 185. b.
Centrum gravitatis. *Definitio* 554. a. *diſtantia.* 576. b. *quando idem cum centro magnitudinis.* 956. a. *quomodo inveniatur.* 113. &. ſeqq. 560. a. 568. & ſeqq.
Centrum gravitatis *in corpore humano.* 569. a.
Centrum motus. 576. b.
Centrum oſcillationis. *Definitio* 602. a. *quomodo inveniatur* 602. & ſeqq.
Centrum percuſſionis. *Definitio.* 619. b. *Quando idem cum centro oſcillationis.* 624. a. *quando idem cum centro gravitatis.* 624. b.
Centrales vires. *Definitio* 636. a. *leges in circulo* 636. & ſeqq. *in curvis aliis* 641. & ſeqq.
Centrifugæ vires. *Definitio.* 635. a. *leges in circulo.* 636. & ſeqq.
Centripetæ vires. *Definitio* 635. a. *leges in circulo* 636. & ſeqq.
Characteriſtica ars commendatur. 26. a.
Characteriſticum triangulum *in curvis.* 457. a.
Chartariæ molæ *conſtructio.* 693. a.
Chorda. *Definitio* 100. b. earum *relationes.* 143. b. 144. a. b. 145. b. 146. a. 151. b. 167. a. *calculus* 175. b.
Circinus 109. b.
Circuli æquales. 114. a.
Circuli concentrici. 101. a.
Circuli congruentes 114. a.
Circuli eccentrici 101. a.
Circuli ſe mutuo ſecantes. 140. a.
Circuli ſe mutuo tangentes. 143. a.

Circulo circumſcriptæ figuræ. 106. b. 171. a. 174. a. 176. a. 214.

Circulo inſcriptæ figuræ. 106. a. 155. b. 156. b. 157. a. 171. a. 174. a.

Circulus. *Definitio* 100. a. *æquationes locales.* 402. a. *centrum oſcillationis* 607. b. *deſcriptio* 109. a. b. 145. a. *dimenſio* 177. b. 570. a *oſculum* 256. a. *proprietas* 119. a. *quadratura.* 176. & ſeqq. 481. *relatio.* 114. b. 172. b. 277. a. *ſubnormalis* 461. a *ſubtangens* 458. a. *ſymptomata* 143. & ſeqq. 331. b. *tangens* 147. b. 148. 150. b. 151. a. 152. b. 330. a.

Circulus ſuperioris generis. *Definitio* 392. a. *maxima applicata.* 469. b. *ſubnormalis.* 461. a. *ſubtangens* 458. a.

Ciſſois Dioclis. *Definitio.* 397. a. *æquatio* 397. b. *genus* ibid. *proprietates.* 397. a. *quadratura.* 485. *ſubnormalis* 461. a. *ſubtangens.* 459. b.

Ciſſoidalis ſolidi cubatio. 497. a.

Citationum *in Matheſi receptarum uſus.* 12. b. 13. a.

Clara notio 6.

Clavicula 791. a.

Clepſydrarum ſtructura. 800.

Cochlea. *Definitio & diviſio.* 644. a. *conſtructio.* 655. a. *virium æſtimatio.* 663.

Cochlea Archimedis. 815. b.

Cochlea foemina. 644. a.

Cochlea infinita. *Definitio.* 665. a. *virium æſtimatio.* 665. b.

Cochlea perpetua. 665. a.

Columnæ atmoſphæricæ *pondus quomodo determinetur.* 742.

Combinatio quantitatum, 304. & ſeqq.

Commenſurabilia. *Definitio* 23. b. *ratio.* 50. b. 51. a

Compoſita machina. *Definitio.* 685. a. *inventio.* 686. *uſus.* 685.

Compoſita ratio. *Definitio.* 50. a. *proprietates.* 59. b. 60.

Compoſita regula trium. 78. b.

Compoſite ſeu Componendo proportionalia. 56. a.

Compoſiti inter ſe numeri. 28. b.

Compoſitum pendulum. 596. a.

Compoſitus motus. 579. & 580.

Compoſitus numerus. 28. b.

Compreſſio. 731. a.

Compreſſio aeris *aſſerta* 732. b. *quomodo fiat.* 742. *quæ eandem conſequantur.* 743. & ſeqq. 746. b. 747. a. 753. b.

Concordiæ vaſa. 830. b.

Concentrici circuli. 101. a.

Conchilis. 395. b.

Conchois Nicomedis. *Æquatio* 396. a. *Aſymptotus.* 396. a. *deſcriptio.* 395. *punctum flexus contrarii.* 521. & ſeqq. *ſpecies.* 396. b. *ſubnormalis.* 462. b. *ſubtangens.* 462. b.

Conchois prima. 395. b.

Conchois ſecunda ibid.

Condenſatio. 731. b.

Condenſatio aeris. 733. b. 764. b. 765. a.

Confuſa notio. 6.

Congru-

Congruentia. *Definitio* 97. a. *proprietates* 113. b.
Congruentium linearum *indoles*. 114. a.
Conicæ ſectiones. 366. a.
Conjugata diameter. 364. b.
Conjugatus axis 370. b. 380. b.
Conoidis hyperbolici *centrum gravitatis*. 566. b. *cubatio*. 496. b.
Conoidis parabolici *centrum gravitatis*. 565. b. 566. a. *cubatio*. 495. b. 535. b. *ſuperficies*. 500. a.
Conſequens *rationis*. 46. a.
Conſpirantes vires. 579. a.
Conſtantes quantitates. *Definitio*. 364. b. *ſigna* ibid.
Conſtructio æquationis *ſimplicis*. 317. b. *quadraticæ*. 319. *cubicæ* 419. & ſeqq.
Continue proportionalium inventio. 76. a. 151. a. 439. b.
Contactus angulus. 103. b. 147. b. 148. a.
Contactuum differentiæ. 101. b.
Contigui anguli. 102. b.
Contraharmonica proportio. 297. & ſeq.
Convergentes lineæ. *Definitio* 104. a. *proprietas* 134. a.
Conus. *Definitio*. 185. a. *proprietates*. 185. b. 189. a. 196. a. 473. a. *centrum gravitatis*. 565. b. *centrum oſcillationis*. 608. a. *Cubatio*. 197. b. 494. b. 534. b. 570. b. 571. a. *ratio* 204. b. 205. a. 206. a. 207. *rete* 190. a. *ſimilitudo*. 204. a. *ſuperficies*. 189. a. 499. a.
Conus rectus. 185. a.
Conus ſcalenus. 185. a.
Conus ſuperioris generis. 393. b.
Conus truncatus. *Centrum gravitatis*. 507. b. *dimenſio*. 198. 199.
Corollarium. 14. b. 15. a.
Corporis humani *centrum gravitatis*. 569. a.
Corpus aſperum. 681. a.
Corpus denſum. 703. b.
Corpus durum. 619. a.
Corpus elaſticum. *Definitio*. 619. a. *motus leges*. 626. & ſeqq.
Corpus fluidum. 703. a.
Corpus geometricum. *Definitio*. 183. a. *Conſtructio*. 191. b. *cubatio*. 205. a. *ratio*. 276. b. 277. a. *retia*. 187. & ſeqq. *ſimilitudo*. 203. 206. a. *tranſmutatio*. 205. b.
Corpus molle. 619. a.
Corpus rarum. 703. b.
Corpus irregulare. *Definitio*. 428. a. *dimenſio*. 202 a.
Corpus regulare. *Definitio*. 184. a. *dimenſio*. 201. b. *eorum numerus*. 192. a. *retia*. 190. & 191.
Corpus ſolidum. 703. a.
Corpus ſpecifice gravius. 703. a.
Corpus ſpecifice levius. 703. a.
Coſecans. 220. a.
Coſinus. 220. a.
Cotangens. 220. a.
Crus anguli. 102. a.
Cubatio ſolidi. 494. a.
Cubica æquatio. 280. a.
Cubicalis paraboloïs. 392. b.
Cubica pertica. 186. b.
Cubica radix. *Definitio*. 66. b. *proprietates*. ibid. *extractio*. 72. b. 73.
Cubicus digitus. 186. b.

Cubicus numerus. *Definitio*. 66. b. *geneſis*. 71. 72. *proprietates*. 262. b.
Cubicus pes. 180. b.
Cubocubus. 67. a.
Cubocubocubus. 67. b.
Cubus. *Definitio*. 186. a. *deſcriptio*. 186. a. *dimenſio* 193. a. *proprietates*. 184. b. 193. b. *rete*. 187. b.
Cubus cubi. 67. a.
Cuneus. *Definitio*. 644. a. *vires* 666. b.
Curva. *Definitio*. 98. b. *axis*. 364. a. *diameter*. ibid. *evolutio*. 523. & ſeqq. *familia*. 365. b. *quadratura*. 475. & ſeqq. *rectificatio*. 488. & *ſeqq*. 528. b. *ſuperiorum conſtructio*. 450. b. *vertex*. 364. a.
Curva algebraica. *Definitio* 364. b. *genera* 365. b. *ſubnormalis* 460. b. *ſubtangens* 457. a. 460. a.
Curva ex evolutione deſcripta 523. a.
Curva exponentialis. *Definitio* 511. a. *ſymptomata* 511. & ſeqq.
Curva geometrica 365. a.
Curva mechanica 365. a.
Curva primi generis, ſecundi generis, tertii generis &c. 365. b.
Curva tranſcendens 365. a.
Curvedinis radius 523. a.
Curvilinea figura 100. a.
Cyclois. *Definitio* 400. a. *circulus oſculator* 527. b. *evoluta* 528. b. *quadratura* 484. *rectificatio* 493 b. *ſubtangens* 464. b.
Cyclois punctum flexus contrarii habens 518. a.
Cylindrus. *Definitio* 185. a. *centrum oſcillationis* 608. a. *dimenſio* 195. b. 494. b. 569. b. 570. a. *proprietates* 185. a. 188. b. 193. b. 332. a. *ratio* 204. b. 205. a. 206. a. *rete* 189. a. *ſimilitudo* 204. a. *ſuperficies* 188. b.
Cylindrus rectus 185. a.
Cylindrus ſcalenus 185. a.

D.

Decagoni regularis latus quomodo inveniatur 325. a.
Decempeda 99. a.
Decimalium fractionum *indoles* 77. a. *inventor* 77. a. 99. b.
Definitio. 6. 7. 8.
Definitio nominalis. 7. 8.
Definitio realis 7. 8. 9.
Deliacum problema 442. b.
Demonſtratio. *Definitio* 12. *indoles* 13. 14. *quomodo faciliteteur*. 120. a.
Denominatio *in Algebra* 245. b.
Denominator fractionis 27. a.
Denominator rationis. 273. b.
Denſitas aeris. 738. a. 765. b. 766. a.
Denſitatum regulæ. 704. &. ſeqq.
Denſum Corpus. 703. b.
Dentium in rotis optima figura 684. b.
Deſcenſus gravium. 549. a. 550. b. 551. & ſeqq. *per arcus circuli*. 589. b. *per ſemicycloidem*. 590. a. 290. a. *per planum inclinatum*. 581. &. ſeqq. *in fluido ſpecifice leviori*. 719. a. *quantus intra minutum ſecundum*. 609.
Deprimendo *quomodo machina moveatur*. 667. a. 668. b.
Diabetes, *Conſtructio*. 807. *uſus*. 808. a.

Diago-

Diagonalis. 106. a.
Diagonalium calculus 234. b.
Diameter circuli. *Definitio* 100. b. *proprietates* 109. b. 145. b. 151. a. *ejus ad peripheriam ratio* 177.
Diameter conjugata. 364. b.
Diameter curvæ, 364. a.
Diameter gravitatis. 554. b.
Diameter ſphæræ 185. b.
Diameter transverſa. 364. a.
Differentiale. *Definitio* 453. a. *ſignum* 453. b. *gradus* 515. a. *algorithmus* 454. & ſeqq.
Differentiale logarithmi 504. a.
Differentiales *in logarithmorum doctrina* 226. b.
Differentialis calculus. *Definitio* 452. a. *leges* 454 & ſeqq. *uſus* 457 & ſeqq.
Differentialium differentiatio 515. b. & ſeqq.
Differentiatio quantitatum 454. & ſeqq.
Differentiatio quantitatum exponentialium 508. a.
Differentiatio quantitatum logarithmicarum 504. a.
Differentio-differentialis calculus. *Definitio* 515. a. *leges* 515 & ſeqq. *uſus* 517 & ſeqq.
Digitus 99. a.
Digitus cubicus 186. b. 193. b.
Digitus quadratus 106. b. 166. a.
Dignitas. *Definitio* 67. a. *exponens* 67. a. *gradus* 67. a. *proprietates* 68. *ſigna* 67. b. *ſuperiorum uſus* 68 a.
ad Dignitatem evehere *quantitatem* 67. b.
ex Dignitate *radicem extrahere* 67. b.
Dilatatio. 731. b.
Directe impingere 619. a.
Directionis angulus 579. a.
Directionis linea 542. b. 572.
in Directum *jacere* 103. a.
Diſſimilia. 21. b.
Diſtantia. *Definitio* 98. a. *dimenſio* 119. 120. 137 & ſeqq. 234 & ſeqq.
Diſtantia puncti a linea vel plano. 125. a.
Diſtincta notio 6.
Diverſæ rationes. 50. 57 & ſeqq.
Diviſim vel dividendo proportionalia 56. b.
Dividendus 28. a.
Diviſio. *Definitio* 28. a. *leges* 39 b. & ſeqq. *probatio* 44. a. *ſymptomata* 57. b. 58 a. 59. a.
Diviſio irrationalium 299. b.
Diviſio per lamellas *Neperi* 41. b.
Diviſio potentiarum litteralium 256. a.
Diviſio quantitatum litteralium 252. b.
Diviſio ſine abaco Pythagorico 42. a.
Diviſor 28. a.
Divergentes lineæ. *Definitio* 104. a. *proprietates* 133. b
Dodecaëdrum. *Definitio* 168. a. *latus* 334. *rete* 190. b.
Doliorum ſtereometria 207 & ſeqq.
Dupla ratio 48. a.
Dupla ſeſquialtera ratio 48. b.
Dupla ſuperbipartiens tertias ratio 48. b.
Duplicata ratio 50. a. 59. b.

Durum corpus 619. a.

E.

Eccentrici circuli 105. a.
Eclipſis Lunæ 9.
Effectuum ratio 543. a.
Efficientes 27. b.
Elaſticum corpus 619. a.
Elater aëris. *Definitio* 731. b. *exiſtentia* 732. *magnitudo* 734. a. b. *non mutati ſignum* 732.
Elater aëris *compreſſi* 746. b. & ſeqq. 754. *calidi* 763. a. *frigidi* ibid. *incluſi* 734. b. *rarefacti* 763. b.
Elateris quantitas 625. b.
Elatere aeris quomodo aqua moveatur 809. b.
Elatere quomodo machina moveatur 671. a.
Elementum areæ 475. a.
Elevando movere 667. b.
Elevatio aquarum 808. b. 809. a. 812 & ſeqq. 827. b.
Elevationis angulus 609. a.
Ellipſis. *Definitio.* 370. b. *deſcriptio* 374. a. 394 b. 416. b. 417. a. *oſculum* 526. a. *quadratura* 483. a. *ſubnormalis* 375. a. *ſubtangens* 375. a. 458. *ſymptomata* 371 & ſeqq. *cur Apolloniana dicatur* 393. a. *quomodo ex cono ſecetur* 390. b. *locus ad eandem* 406. & ſeqq.
Ellipſes infinitæ. *Definitio* 393. a. *geneſis* 394. *ſubnormalis* 461. a. *ſubtangens* 458. I.
Elliptoides. *Definitio* 393. a. *ſubtangens* 458. I.
Elliptois cubicalis, biquadraticalis, ſurdeſolidalis &c. 393. a.
Eodem modo *quænam* determinari *dicantur* 106. b.
Epicyclois. 400. b.
Epicyclois ſuperior ibid.
Epicyclois inferior ibid.
Epiſtomium. *Definitio* 791. a. *conſtructio* 791. b.
Euclides *demonſtrator egregius* 10. *cur axiomata ſua non demonſtraverit* ibid.
Evoluta *Definitio* 523. a. *æquationem inveniendi modus.* 524. b. *radius.* 523. a.
Evolutio curvarum. 523 & ſeqq.
Experientia. 10. a. b.
Exponens. 84. b.
Exponens rationis. *Definitio* 47. b. *indoles* 47. b. 49. a.
Exponens rationis commenſurabilium 51. a.
Exponens rationis irrationalis. 51. a.
Exponentialis æquatio. 511. a.
Exponentialis quantitatis *definitio* 308. a. *conſtructio.* 510. b.
Exponentialis quantitatis *differentiatio* 508. a. 509. b. *integratio* 509.
Exponentialis calculus 508 & ſeqq.
Exponentialis curva. *Definitio* 511. *conſtructio.* 510. b.
Extractio radicis. *Definitio* 67. b. *regulæ* 350. & ſeqq. 355 & ſeqq. *ſignum* 75. *probatio* 74. a.
Extractio radicis cubicæ. 74. a.
Extractio radicis ex æquatione quadratica. 281. a.

Extractio radicis ex ſerie infinita 362 & ſeqq.
Extractionis radicis cubicæ & quadratæ probatio. 74.

F.

Factores. 27. b.
Factum. ibid.
Familia curvarum 365. b.
Figura. *Definitio* 100. a. *altitudo* 127. a. *baſis* 106. a. *latus* 100. a. *menſura* 106. b. *vertex* 106. a.
Figura æquilatera 104. a.
Figura circulo circumſcripta. *Definitio* 106. b. *conſtructio* 156. a. 214. *proprietates* 171. a. 174. a 176. a.
Figura circulo inſcripta. *Definitio* 106. a. *conſtructio* 154. a. 155. b. 156. b. 157. b.
Figura curvilinea 100. a.
Figuræ æquiangulæ inter ſe 105. b.
Figuræ æquilateræ inter ſe 105. b.
Figuræ congruentes 116. a.
Figura irregularis. *Definitio* 105. b. *deſcriptio* 157. b. 158. a. *dimenſio* 170. b. *diviſio* 181. b. *proprietates* 154. b. 155. a.
Figuræ ſimiles 115. b. 172. a.
Figura mixtilinea 100. a.
Figura multilatera 105. b.
Figura plana 100. a.
Figura polygona 105. b.
Figura quadrilatera 105. a.
Figura quadrilatera obliquangula. 105. a.
rectangula, ibid.
Figura rectilinea. *Definitio* 100. a. *dimenſio* 170. b. *diviſio* 281. a.
Figura regularis. *Definitio* 105. b. *deſcriptio* 156. b. 214. *dimenſio* 171. b. *proprietates* 171. a. *ratio.* 172, b. 173. a.
Flexus contrarii punctum. *Definitio* 517. a. *quomodo inveniatur* ibid. 510. a.
Fluidum. *Definitio.* 703. a. *fluidorum æquilibrium* 706 & ſeqq *denſitas* 713. b. *gradus bonitatis ac puritatis* 713. a. *gravitas abſoluta* 713. 714. *gravitas ſpecifica* 708. a. 713. b. *motus ob aëris preſſionem* 768 & ſeqq. *pondus* 712. b. *præponderatio* 707. b. *preſſio* 708. b. & ſeq. 710. b. 714. b. 715. a. *ratio gravitatis ſpecificæ ad gravitatem ſolidorum.* 715. a.
Fluminis ſectio. 677. a.
Fluxiones. 453. b.
Focus. 367. a.
Fons Heronis. 810.
Fontis naturalis conſtructio. 794. a.
Fontium intermittentium conſtructiones 822 & ſeqq.
Fontium ſalientium *conſtructiones* 817. 820. 821. 824. b. 825. b. *ornatus* 818 & ſeqq.
Fractio, numerus fractus. *Definitio* 24. a. *Eorum algorithmus vulgaris* 64. b. 65. *& ſpecioſus ſeu litteralis* 253 & ſeqq. *denominator* 27. a. *indoles* 46. b. 47. b. *identitas* 62 b. *logarithmus* 88. b. 89. a. *numerator* 27. a. *proprietates* 61. a. 62. a. *quantitas* 62. a. *reductio ad eandem denominationem* 64. 282. a.

282. a. *ad minores terminos* 64.a. *ſcriptio* 27. a.
Fractionum decimalium indoles 77. a. *inventor*. 77. a. 99. b.
Fractionum infinitarum ſummationes 529 & ſeqq.
Fractio ſpuria. 61. b.
Frictio. *Definitio* 681. a. *cauſæ* 681 & ſeqq. *remedia* 682. b. 683 b. 684. a. b. 685. a.
Frumentariarum molarum conſtructiones. 688. b. & ſeqq.

G.

Geometria. *Definitio* 97. a. *uſus* 95 96. *eam tractandi ratio* 96. 113. 120. a.
Geometria ſublimior 364. a.
Geometrica curva. 368. a.
Geometrica menſula 138. a.
Geometrica progreſſio *Definitio* 83. a. *proprietates* 275. b & ſeqq. 293 & ſeqq.
Geometricæ ſcalæ *conſtructio* 136. b. *uſus* 137. a.
Geometrice proportionalia. *Definitio* 82. a. *inventio* 76. *proprietates*. 291 & ſeqq.
Geometricum oſculum. 523. a.
Geometricus locus. 401. a.
Goniometricum inſtrumentum 112. b.
Gradus. 100. b.
Gravia heterogenea. 555. a.
Gravia homogenea 555. a.
Gravitas. *Definitio*. 541. a. *actio ubi minor* 599. a. *centrum* 554. a. 956. a. 113 & ſeqq. 560. a. 568 & ſeqq. 576. b. *diameter* 554. b *planum* 555. a. *ratio* 705. a. 706. a. *ubique locorum non eadem* 549. a. *maſſæ proportionalis* 55 b & ſeqq.
Gravitas abſoluta. 581. a.
Gravitas aëris. 733. a.
Gravitas reſpectiva. *Definitio* 58. *ratio ad abſolutam ſuper plano inclinato* 581.
Gravitates ſolidorum quomodo determinentur. 726.
Gravitatio. 541. a.
Gravitatio ſpecifice graviorum in fluido leviori 711 & ſeqq.
Gravitatio ſpecifice leviorum in fluido graviori. 720. a.
Gravitatio ſuper plano inclinato 581 & ſeqq.
Gravitatis ſpecificæ fluidorum ratio quomodo inveniatur. 708. a. 713. a.
Gravitatis ſpecificæ ſolidorum ratio quomodo inveniatur 715.
Gravitatum ſpecificarum ratio. 705. 706. a. 708. b. 712. a. 713. a. 715. b. 720. b. 721.
Gravium *aſcenſus liber* 592 & ſeqq. *per plana inclinata* 595. b. & ſeqq. *baſis* 574. b. *deſcenſus liber* 549. a. 550. b. & ſeqq. 555 b *intra minutum ſecundum* 609. b. *per arcus circuli* 589. b. *per cycloidem* 590. a. 598. a. *in fluido ſpecifice leviori* 719. *in plano inclinato* 581 & ſeqq *gravitatio in fluidis ſpecifice gravioribus*. 720. a. *gravitatio in fluidis ſpecifice levioribus* 711 & ſeqq. *linea directionis* 572.

H.

Harmonica proportio. *Definitio* 295 b. *ſymptomata* 296 & ſeqq.
Helix Archimedea. 399. b.
Hemiſphærii centrum gravitatis. 566. b.
Heptagonum 105. b.
Heptagonus numerus 300. b.
Heterodromus vectis. 643. b.
Heterogenea gravia. 555. a.
Heterogenei inter ſe numeri 23. b.
Hexaëdri latus quomodo inveniatur 333. a.
Hexagonum. *Definitio* 105. b. *latus* 157. a.
Hexagonus numerus. 300. b.
Homodromus vectis. 643. b.
Homogenea gravia. 555. a.
Homogenei inter ſe numeri 23. b.
Homologi anguli. 105. b.
Homologa latera. 105. b.
Horarius pes. *Definitio* 602. b. *quantitas* 608.
Horizontalis linea apparens 572. a.
vera 571 a. 570.
Horizontale planum 573. a.
Horizontalis projectio 330. a.
Horologii oſcillatorii conſtructio 695.
Humiditas aëris 782 783. a.
Hydracontiſterii conſtructio 818.
Hydraulica. *Definitio* 791. a. *Status præſens* 789. *utilitas* 790.
Hydraulica machinamenta varia 826 & ſeqq.
Hydraulica vaſa 830 b. & ſeqq.
Hydroſtatica. *Definitio* 703. a. *utilitas* 702.
Hygrometrum. 776. a.
Hygroſcopium. *Definitio* 776. a. *conſtructio multiplex* 783 & ſeqq.
Hyperbola. *Definitio*. 380. b. *æquationes locales* 409 & ſeqq. *aſymptoti* 462. a. *circulus oſculator* 527 b. *deſcriptio* 382. b. *potentia* 383. a. *proprietates & ſymptomata* 381 & ſeqq. *quadratura* 480. b. *ſectio ex cono* 391. a. *ſubnormalis* 385. b. *ſubtangens* 385. a. 459. a.
Hyberbola æquilatera. *Definitio* 390. a. *æquationes locales* 409. a. *deſcriptio* 395. a.
Hyperbola Apolloniana. 393. b.
Hyperbolæ infinitæ. 393. b. 394. b.
Hyperbola intra aſymptotos. *Æquationes locales*. 411. & ſeqq. *proprietates & ſymptomata*. 383. &. ſeqq. *quadratura* 480. b. *ſubnormalis*, 461. a. *ſubtangens*. 459. b.
Hyperbolici Conoidis *centrum gravitatis*. 566. b. *cubatio*. 496. b.
Hyperbolici ſolidi cubatio. 498. b.
Hyperboloides. *Definitio*. 393. b. *quadratura*, 480. a. *ſubnormalis*. 461. a *ſubtangens*. 459. a.
Hypomochlium. 643. b.
Hypotheuuſa. 104. b.
Hypotheſis. 12. a.

I.

Ichnographiæ arearum *quomodo fiant*. 158. & ſeqq.
Icoſaëdrum. *Definitio*. 186. a. *latus* 334. b. 335. *rete*. 190. b.
Ictus perpendicularis ad obliquum ratio. 625. a.

Ictus in conflictu corporum quantitas, 629. a.
Immerſio ſolidorum in fluido graviori. 721. 722.
Impar numerus. *Definitio*. 28. a. *proprietates*. 261. a.
Impetus. *Definitio*. 542. b. *pars in conflictu amiſſa*. 623. b. *valor analyticus*. 542. b.
Iſoſceles triangulum. 104. b.
Inadæquata notio. 6.
Inæquale. 22. a.
Inanimata potentia. 667. a.
Incidentiæ angulus. 625. a.
Inclinatio plani ad planum. 186. a.
Inclinata ſimiliter plana. 591.
Inclinatum planum. 581. a.
Incommenſurabilia. *Definitio*. 23. b. *exiſtentia*. 175. b. *proprietates*. 51.
Indeterminata problemata. 280. b. 307. 413. & ſeqq.
Indirecte impingere *quid ſit*. 619. b.
Infinitarum fractionum ſummationes. 529. & ſeqq.
Infinite parvum. 452.
Infinite ſima. 452. a.
Infinitorum analyſis. 452.
Infinitorum Arithmetica. 529. & ſeqq.
Inſiſtere *quando dicatur Angulus*. 102. a.
Integer numerus. 24. a.
Integralis calculus. *Definitio* 474. a. leges. 474. a. *leges*. 474. b. 477. b. *uſus*. 475. & ſeqq.
Inveniendi regulæ generales. 44. 45. *quomodo eruantur*. 21. a.
Inverſa ratio. 52. a.
Invertendo proportionalia. 52 a.
Irrationales numeri. *Definitio*. 24. b. 9. *additio*. 259. a. *diviſio*. 259. b. *expreſſio per lineas*. 449. b. *multiplicatio*. 259. b. *reductiones*. 257. 258. *ſubtractio*. 259. a.
Irregularis figura. *Definitio*. 105. b. *deſcriptio*. 157. b. 158. a. *dimenſio* 170. b. *diviſio*. 181. b. *proprietates*. 154. b. 155. a.
Irregulare corpus. *Definitio*. 184. a. *dimenſio* 202. a.
Irrigatorii vaſis conſtructio. 804.
Iumentariæ molæ conſtructio. 691.

L.

Lamellæ Neperianæ. *Conſtructio*. 37. b. *uſus*. 38. a. 41. b.
Lampadis novæ conſtructio. 823. b.
Lapſus. *Definitio*. 572 a. *leges*. 574. & ſeqq.
Latera homologa. 105. b.
Latus *figuræ*. 100. a.
numeri polygoni. 301. a.
potentiæ. 67. a.
Latus educere *ex numero polygono*. 301. *ex potentia*. 67. b.
Latus rectum. 366. b.
Latus tranſverſum. 380. b.
Leges motus *æquabilis*. 543. b. & ſeqq.
compoſiti rectilinei. 579. & ſeqq.
corporum elaſticorum ex percuſſione. 626. & ſeqq.
corporum non elaſticorum ex percuſſione. 620. & ſeqq.
gravi-

gravium aſcendentium libere. 6.
gravium aſcendentium in plano inclinato. 592. & ſeqq.
gravium deſcendentium libere. 550. b. & ſeqq.
gravium deſcendentium in plano inclinato. 581. b & ſeqq.
pendulorum. 597. & ſqq.
projectorum. 620. & ſeqq.
uniformiter accelerati. 549. & ſeqq.
uniformiter retardati. 548. a.
Libella *Definitio.* 672. *conſtructio.* 672. & ſeqq. *rectificatio* 675. a. *uſus.* 676.
Libellandi ars. 672. b.
Libellatio aquarum. 676.
Libra. *Conſtructio.* 649. & ſeqq. *examen.* 650. b. *leges.* 648. & ſeqq.
Libræ doloſæ *uſus.* 650. b.
Lignorum ſtruis dimenſio. 167. b.
Linea. *Definitio.* 97. b. *menſura.* 99. a. 108. a. *proprietates, termini, uſus.* 98. a.
Linea *curva.* 98. b.
Linea directionis. 542. b.
gravium. 572.
Linea horizontalis apparens. 572. a.
vera. 571. a.
Linea normalis. 103. b.
Linea obliqua. 104. a.
Linea perpendicularis. *Definitio.* 103. b. *deſcriptio.* 123. b. 124 125. b. 129. b. *proprietates.* 124. b. 125. a. 126. 127. b.
Linea projectionis 610. & ſeqq.
Linea recta *Definitio.* 98. *biſectio.* 123. *deſcriptio.* 107. a. *dimenſio.* 107. b. 108. *diviſio in partes æquales.* 136. a. *proprietates.* 98. b. 118. b. *ſectiones.* 320. b. & ſeqq. 442. b. 472. *ſegmentorum proprietates.* 263. & ſeqq. *ſe mutuo ſecantium proprietates.* 30. a. 133. b.
Linea ſecantium. 399. a.
Linea ſinuum. 398. b.
Linea Tangentium. 399. a.
Lineæ congruentes. 114. a.
Lineæ convergentes. *Definitio.* 104. a. *proprietas.* 246. b.
Lineæ divergentes. *Definitio.* 104. a. *proprietas.* 246. b.
Lineæ parallelæ. *Definitio.* 104. a. *deſcriptio.* 131. b. *proprietates.* 127. 128. 130. b. 131. 133. a.
Linea, *pars digiti.* 99. a.
Linearum proportionalium inventio. 151. 135. b.
Linearum reciprocarum inventio. 322.
Litteralis calculus. *Definitio.* 19. *leges.* 245. *uſus.* 260. & ſeqq.
Locus geometricus. 401. a.
Locus ad circulum. 402. a.
Locus ad ellipſin. 406. & ſeqq.
Locus ad hyperbolam æquilateram 409. a.
Locus ad hyperbolam intra aſymptotos. 411. & ſeqq.
Locus ad hyperbolam ſcalenam. 409. & ſeqq.
Locus ad parabolam. 402. & ſeqq.
Locus ad rectam. 401. & ſeqq.

Locus planus. 401. a.
Locus primi ordinis. 401. a.
Locus quadratici ordinis &c. 401. a.
Locus ſolidus. 401. a.
Logarithmica. *Definitio* 388. a. *proprietates.* ibid. *quadratura.* 485. b.
Logarithmici canonis conditores. 87. b.
Logarithmus. *Definitio.* 83. b. *inventio.* 85. & ſeqq. 595. & ſeq. *inventor.* 85. a. *proprietates.* 84. & 85. *uſus in regula trium.* 91. *in trigonometria* 227. & ſeqq.
Logarithmus fractionis *quomodo inveniatur.* 88. b. 89. a.
ſecantis 226. a.
ſinus. 225. b.
tangentis. 226. a.
Logarithmo reſpondens numerus *quomodo inveniatur.* 89. b. 90. & 91. a.
Logiſtica linea. *Definitio,* 398. a. *proprietates* ibid. *quadratura.* 485. b. *ſubtangens.* 465. a.
Logiſtici ſolidi cubatio. 497. b.
Logiſtica ſpiralis. *Definitio.* 398 b.
Lumen *in tubis.* 791. a.
Lunula Hippocratis. *Centrum gravitatis,* 564. a. *quadratura.* 484. a.

M.

Machina. *Definitio.* 642. a. *inventio.* 686. *motus ab aqua fluente.* 677. & ſeqq. *a brutis.* 670. *ab elatere.* 671. b. *ab hominibus.* 668. & 669. *a ponderibus.* 670. b. *a vento productus.* 680. *reſiſtentia.* 681. &. ſeqq.
Machina ad pondus ingens elevandum. 687. a.
Machina compoſita. 685.
Machinæ aquam elevantes. 811. & ſeqq. 827. b.
Machinæ hydraulicæ. 826. &. ſeqq.
Magnitudinis centrum. 555. a.
Major ratio. 50. a.
Majus. *Definitio.* 22. b. *proprietates & ſymptomata.* 29. b. 30. *ſignum.* 22. b.
Majus nihilo, 247. a.
Manuariæ molæ conſtructio. 690.
Manometrum. 767. b.
Manoſcopium. *Definitio,* 767. a. *conſtructio.* 767.
Maſſa. *Definitio.* 541. a. *bonitas quomodo determinanda.* 718 *menſura* 556. a. *ratio.* 705. b.
Matheſis univerſalis. 19 20.
Mathematici *ſtudii fructus a quibus percipiantur.* 15 b.
Maximi determinatio. 468. b.
Mechanica. *Definitio.* 541. a. *utilitas.* 545. 546.
Mechanica curva. 365. a.
Mechanicæ philoſophiæ indoles. 642. a.
Mediarum continue proportionalium inventio. 439.
Medii arithmetici inventio. 83. b.
Menſula Geometrica. 138. a.
Menſura. *Definitio.* 98. b. *diverſitas.* 99. a. *diverſarum reductio.* 109. a. *diviſio decimalis.* 99. b.
Menſura Anguli. 110. b.
celeritatis. 542. a.

figuræ

figuræ. 106. b.
linearum. 99. a. 103. a.
maſſæ. 556. a.
numeri. 28. b.
ſolidi. 180. b.
Menſura communis numerorum. 28. b.
Menſura communis maxima numerorum. *Definitio.* 28. b. *quomodo inveniatur.* 62. b. 63.
Menſura maxima numeri. 28. b.
Meſologarithmus. 226. b.
Methodus de maximis & minimis. 468. & ſeqq.
Methodus Fluxionum. 453. b.
Methodus Guldini. 569. & ſeqq.
Methodus Mathematica. *Definitio.* 5. *forma* ibid. *cur ita dicatur?* 15. b. *ab objectionibus vindicatur.* 16.
Methodus tangentium inverſa. *Definitio.* 500. a. *exempla.* 501. & ſeqq.
Metiri *quid ſignificet in Arithmetica.* 28. a *quid in Geometria.* 98. b.
Minimi determinatio. 468. b.
Minor ratio. 50. a.
Minoritatis ſignum. 22. b.
Minus. *Definitio.* 22. b. *proprietates.* 29. b. 30. *ſignum.* 22. b.
Minus nihilo. 247. a.
Minutum primum, ſecundum, tertium &c. 100. b.
Miſcibilium pondera in mixto *quomodo ſigillatim determinentur.* 717. & ſeqq.
Mixtilinea figura. 100. a.
Molæ acuminariæ conſtructio. 688. a.
Molæ alata conſtructio. 692. a.
Molæ chartariæ conſtructio. 693. a.
Molæ jumentariæ conſtructio. 691.
Molæ manuariæ conſtructio. 690.
Molæ oleariæ conſtructio. 692. a.
Molæ pulverariæ conſtructio. 693.
Molæ ferrariæ conſtructio. 694.
Molarum frumentariarum conſtructiones. 688. b. &. ſeqq.
Mola trituratoria. 693. b.
Moles. 541. b.
Molinaria arbor. 679. a.
Molle Corpus. 619. a.
Momentum. 557. a.
Motus. *Definitio.* 541. a. 76. b. *quantitas integri.* 542. b. *quantitas momentanea.* 542. b. *quomodo producatur calcando.* 669. b. 70. a *deprimendo.* 667. a. 668. b. *elevando.* 667. b. *trahendo.* 667. b. 668. 599. a. *trudendo.* 667. a. 668. a. 669. a. *verſando.* 667. b. 668. a.
Motus acceleratus. 548. a.
Motus æquabilis. *Definitio.* 543. a. *leges.* 543. b. & ſeqq.
Motus compoſitus. *Definitio.* 579. a. *leges.* 579. & ſeqq.
Motus corporum elaſticorum leges. 626. & ſeqq.
Motus corporum non elaſticorum leges 620. & ſeqq.
Motus corporum ex percuſſione. 620. & ſeqq.
Motus corporum oblique impingentium. 634. b.
Motus fluidorum.
Motus mixtus. 681. b.
Motus pendulorum 597 & ſeqq.

Motus projectorum. 620. & ſeqq.
Motus retardatus. 548. a.
Motus ſimplex. 579. a.
Motus uniformiter acceleratus. *Definitio.* 548. a. *leges.* 549. &. ſeqq.
Motus uniformiter retardatus. *Definitio.* 548. a. leges. 553. b. & ſeq.
Multilatera figura. 105. b.
Multinomina radix. 68. a.
Multiplex. 48. a.
Multiplex ſubſuperpartiens. 48. b.
Multiplex ſuperpartiens. 48. b.
Multiplex ſuperparticulare 48. b.
Multiplicata ratio. 50. b.
Multiplicandus. 27. b.
Multiplicatio. *Definitio.* 27. b. *leges numeroſæ* 36. *leges litteralis* 252. b. *probatio* 43. b. *ſymptomata.* 58. a. 59. a.
Multiplicatio per lamellas Neperi. 37. b.
Multiplicatio ſine abaco Pythagorico. 38. b.
Multiplicator. 27. b.
Multitudo. 21. b.
Multum. ibid.

N.

Negativa quantitas. 247. a.
Nihilo majus. 247. a.
Nihilo minus. ibid.
Norma. *Definitio.* 124. a. *examen.* 149. b.
Normalis linea. 103. b. *Notæ numericæ.* 25. a. 26. a.
Notio. 6. a.
Notio adæquata. 6. b.
Notio clara. 6. a.
Notio confuſa. ibid.
Notio diſtincta. ibid.
Notio inadæquata. 7. a.
Notio obſcura. 6. a.
Numerandi leges. 24. & 25.
Numerator fractionis. 27. a.
Numerica problemata. 281 & ſeqq.
Numeri compoſiti inter ſe. 28. b.
Numeri heterogenei inter ſe. 23. b.
Numeri homogenei inter ſe. 23. b.
Numeri primi inter ſe. 28. b. 75. a.
Numerus. *Definitio.* 22. b. *enunciatio.* 26. *menſura* 28. b. *nomina.* 25.
Numerus compoſitus. 28. b.
Numerus cubicus. *Definitio.* 66. b. *geneſis.* 71 & 72. *proprietates.* 262. b.
Numerus determinatus. 22. a.
Numerus fractus. 24. a.
Numerus heptagonus. 300. b.
Numerus hexagonus. ibid.
Numerus impar. *Definitio.* 28. a. *proprietates.* 261. a.
Numerus integer. 24. a. 47. b.
Numerus par. *Definitio.* 28. a. *proprietates.* 260 & 261.
Numerus pentagonus. 300. b.
Numerus perfectus. 315. b. & ſeqq.
Numerus primus in ſe. 28. b.
Numerus polygonus. *Definitio.* 300. b. *inventio* 301. *ſummatio* 301 & ſeqq.
Numerus pyramidalis primi ordinis, &c. *Definitio* 303. a. *eorum ſummatio.* 303.
Numerus pyramidalis pentagonus primi ordinis. 303. a.
Numerus pyramidalis triangularis primi ordinis. 303. a.

Nume-

Numerus quadratus. *Definitio*. 66.a. *geneſis* 68. b. & 69. *proprietates*. 262. 308. & ſeqq.
Numerus rationalis. 24. a.
Numerus rationalis fractus. 24. a.
Numerus rationalis integer. ibid.
Numerus rationalis mixtus. 24. a.
Numerus ſurdus. 175. a.
Numerus triangularis. 300. b.

O.

Obliqua linea. 104. a.
Obliquangulum triangulum. 104. b.
Obliqua projectio. 609. b.
Obliquus angulus. 102. b.
Oblongum. *Definitio*. 105. a. *proprietates*. 127. a.
Obtuſangulum triangulum. *Definitio*. 104. b. *proprietates*. 126. b. 129. a.
Obtuſus angulus. *Definitio*. 102. b. *quantitas*. 111. a.
Octaëdrum. *Definitio*. 186. a. *latus* 333. b. *rete*. 190. b.
Octogonum. *Definitio*. 105. b. *latus*. 324. b.
Octogonus numerus. 300. b.
Oleariæ molæ conſtructio. 692. a.
Opponi *quænam dicantur* 104. a.
Oppoſiti anguli. 103. a.
Oppoſitus externus angulus. 103. a.
Oppoſitus internus angulus. ibid.
Ordinata ratio. 57. a.
Ordinatim applicata. 364 a.
Oſcillatio. *Definitio*. 596. a. *axis* 596. b. *centrum*. 602. & ſeqq. *tempus*. 599. b.
Oſcillationes penduli iſochronæ. 597. b.
Oſcillatio penduli inter ſemicycloides ſuſpenſi 597. b. 598.
Oſculari *quid ſignificet in Geometria* 523. a.
Oſculum geometricum. *Definitio* 523. a. *inventor*. 523. a. *radius*. ibid. *quomodo determinetur* 523. b.

P.

Parabola. *Definitio*. 366. b. *centrum gravitatis* 561. a. *centrum oſcillationis* 601. b. *circulus oſculator*. 525. a. *deſcriptio* 367. a. 368. a. *evoluta*. 525. *quadratura* 476. a. 534. *rectificatio* 488. a. *ſectio ex cono* 398. b. *ſubnormalis* 461. a. *ſubtangens*. 457. b. *ſymptomata*. 366 & ſeqq.
Parabola Apolloniana. 392. b.
Parabolæ ſecundi generis rectificatio. 489. a.
Parabolæ ſuperiorum generum. 392. b.
Parabolæ truncatæ centrum gravitatis. 564. b.
Parabola quadratica. 392. b.
Parabolici Conoidis *centrum gravitatis* 565. b. *cubatio*. 535. *ſuperficiei complanatio* 500. a.
Parabolici ſegmenti quadratura. 476. b. & ſeqq.
Parabolici ſolidi cubatio. 498. b.
Paraboloides. *Definitio*. 392. b. *geneſis*. 393. b. *centrum gravitatis*. 561. a. 562. a. *centrum oſcillationis* 607. a. *circuli oſculatores* 526. a. *quadratura*. 476. b. *rectificatio*. 489. b. *ſubnormalis*. 461. a. *ſubtangens*. 458. a.

Paraboloïs b'quadraticalis. 392. b.
cubicalis. ibid.
ſurdeſolidalis. ibid.
Parallelæ lineæ. *Definitio*. 104. a. *deſcriptio* 131. b. & ſeqq. *proprietates*. 127. 128. 130. b. 131. 133. a.
Parallelepipedum. *Definitio*. 184. b. *centrum gravitatis*. 564. b. *deſcriptio* 186. a. *dimenſio*. 194. a. 569. b. *proprietates*. 184 b. 193. b. 194. b. *ratio*. 204. b. 205. a. 207. a. *rete* 188. a *ſimilitudo*. 206. a.
Parallelismus, *inſtrumentum*. 132. b. 133. a.
Parallelogrammum. *Definitio*. 105. a. *biſectio*. 280. b. *centrum gravitatis*. 564. b. *dimenſio*. 569. b. *diviſio in partes æquales*. 280. b. *proprietates*. 152. a. 167. b. 168. b. 170. 533. a. *ſimilitudo* 170.
Parameter. 366. b.
Parameter diametri. 370. b.
Par numerus. *Definitio*. 28. a. *proprietates*. 260. 261.
Pars 21. b.
Pars aliquanta. 23. b.
aliquota. ibid.
Partium ſimilium ſymptomata. 52.
Pendulum. *Definitio*. 596. a *motus* 597 & ſeqq. *intra cycloïdes ſuſpenſi longitudo*. 600 b. *oſcillationes iſochronæ*. 597. b.
Pendulum compoſitum. 596. a.
Pendulum ſimplex. ibid.
Pentagonum. *Definitio*. 105. b. *regularis latus*. 326. a. 331. b.
Pentagonus numerus, 300. b.
Percuſſionis centrum. *Definitio* 619. b. *quando idem cum centro gravitatis* 624. b. *quando cum centro oſcillationis* 624. a.
Perfecti numeri *quomodo inveniantur*. 315. b. & ſeqq.
Perimeter 100. a.
Peripheria. *Definitio*. 100. a. *diviſio*. 100. b. 101. a. *ratio*. 173. b. *ſimilitudo* 109. b.
Peritrochium. 643. b.
Permutatio quantitatum. 277. b. & ſeq.
Perpendicularis linea. *Definitio*. 103. b. *deſcriptio* 123. b. 124. 125. b 129. b. *proprietates* 124. b. 125. a. 126. 127. b.
Pertica cubica. 186. b. 193. b.
Pertica quadrata. 106. a. 166. a.
Perturbata ratio. 57. a.
Pes. 99. a.
Pes cubicus. 186. b. 193. b.
Pes cubicus aëris *quanti ponderis* 741.
Pes cubicus aquæ *quanti ponderis* 712. b.
Pes horarius. *Definitio*. 602. b. *inventio* 608. a. *quantitas* 608. b.
Pes quadratus. 106. b. 166. a.
Plana figura. 100. a.
Plana ſimiliter inclinata. 591.
Planum. 100. a.
Planum horizontale. 573. a.
inclinatum. 581. a.
Poculi ludicri conſtructio. 808. a.
Polus in Conchoide. 395. b.
Polygona figura. 105. b.
Polygonorum regularium *anguli* 154. b. 155. a. *deſcriptio* 155. b. 156. b. 157. a. 233. 234. 330. b. *dimenſio* 170. b. 171. b.

171. b. *proprietates*. 174. a.
Polygonus numerus. *Definitio* 300. b. *inventio* 301. *ſummatio*. 301. & ſeqq.
Polyſpaſtum. 661. a. 662. a.
Pondus. *Definitio*. 643. a. *inter vires ſuſtentantes in data ratione diſtributio*. 578. b. *in fluido amiſſi quantitas*. 711. a. *principium motus in machinis*. 670. b. *potentiæ moventis adminiculum*. 671. a.
Poſitiva quantitas. 247. a.
Poſſibile abſolute *quodnam ens ſit*. 11. b.
Poſtulatum 9. b.
Potentia. *Definitio*. 67. a. *analyſis*. 268. b. & ſeq. *diviſio*. 256. a. *geneſis*. 264 & ſeqq. *latus*. 67. a. *ſigna*. 67. b. *multiplicatio*. 256. a. *ſummatio*. 298. & ſeqq. *ſymptomata*. 68. *unciæ*. 265. a.
Potentia. 641. a.
Potentia animata. 667.
Potentia hyperbolæ. 383. a.
Potentia inanimata. 667. a.
Potentia movens. 642. b.
Potentia ſuſtentans. 642. b.
Poteſtas. 67. a.
Practica Italica. 80. b. & ſeqq.
Præponderatio fluidorum. 707. b.
  ſolidorum. 558. b. & ſeqq.
Preſſio aeris. 733. a. 735. a. 738. a.
Primi inter ſe numeri. 28. b.
Primum minutum. 110. b.
Primus in ſe numerus. 28. a.
Priſma. *Definitio* 184. a. *deſcriptio*. 187. a. *dimenſio*. 194. b. 569. b. *proprietates*. 184. a. 193. b. 197. a. *ratio*. 204. b. 205. a. *rete*. 188. a. *ſimilitudo*. 206. a.
Privativa quantitas. 247. a.
Probationis indoles. 34 a.
Problema. *Definitio*. 14. b. *algebraica ſolutio*. 316. 317. 280. b.
Problema Deliacum. 442. b.
Problemata indeterminata. 307. 413. & ſeqq.
Procellarum cauſæ. 772. b.
Productum. 27. b.
Progreſſio arithmetica. *Definitio*. 83. b. *proprietates & ſymptomata*. 272. b. 288. & ſeqq.
Progreſſio geometrica. *Definitio*. 83. a. *proprietates & ſymptomata*. 275. b. & ſeqq. 293. & ſeq.
Projectio horizontalis. 330. a.
  obliqua 609. b.
  perpendicularis. 609. a.
Projectionis linea. 610. & ſeqq.
Projectorum motus leges. 620. & ſeqq.
  ſemita. 611. b.
Proportio. *Definitio*. 49. b. *proprietates*. 75. 76. 291. & ſeq. *regulæ*. 76. & ſeqq. *ſimilitudo*. 591. b.
Proportio continua. 49. b.
  contra harmonica. 297. b. & ſeq.
  diſcreta. 50. a.
  harmonica. 295. b. & ſeqq.
  per turbata. 57. a.
Proportionalia geometrice 491. a.
  alternando. 53. a.
  compoſite ſeu componendo. 56. a.

contraharmonice. 297.
dividendo 56. b.
ex æquo 57. a.
harmonice. 290.
invertendo. 52. a.
ordinate. 57. a.
perturbate. 57. a.
Proportionalitas. 50. a.
Proportionalium linearum inventio. 135. b. 151.
Proportionalium numerorum inventio. 76.
Propoſitio. 11. b.
Propoſitiones affirmativæ. 12.
negativæ. ibid.
per ſe notæ. 10.
Pulverariæ molæ conſtructio. 693.
Pythagoricum theorema. 175. a.
Pyramidales numeri. *Definitio.* 303. a. *genera.* 303. a. *ſummatio.* ibid.
Pyramidales pentagoni numeri. 303. a.
Pyramidales triangulares numeri. 303. a.
Pyramidis truncatæ centrum gravitatis. 567. b.
Pyramis. *Definitio.* 185. b. *centrum gravitatis.* 565. b. *deſcriptio.* 187. a. *dimenſio.* 197. b. 534. b. *proprietates.* 185. b. 186. a. 196. a. *ratio.* 204. b. 205. a. *rete.* 189. b. *ſpecies.* 185. b. *ſimilitudo.* 206. a.
Punctum. 97. b.
Punctum flexus contrarii. 517. a. 520. a.
regreſſus. 517. a.

Q.

Quadrata radix. *Definitio.* 66. a. *extractio.* 70. a. 71. b. *proprietates.* 66. a.
Quadraticæ æquationis conſtructio. 319.
Quadrati quadrati quadratum. 67. a.
Quadratocubus. 67. a.
Quadratocubocubus. 67. b.
Quadratoquadratocubus. 67. a.
Quadratoquadratum. 67. a.
Quadratrix. 502. b.
Quadratrix Dinoſtratis. *Geneſis.* 399. a. *ſubtangens.* 465. b.
Quadratrix Tſchirnhuſiana. 399. b.
Quadratum. *Definitio.* 105. a. *conſtructio.* 153. a. *dimenſio.* 165. a. *proprietates.* 127. a. 152. a. 175. a. *ratio.* 166. b. *reciprocorum inventio.* 327. b. 328.
Quadratum cubi. 67. a.
Quadratum ſurdeſolidi. 67. a.
Quadraturæ curvarum. 478. & ſeqq.
Quadratus numerus. *Definitio.* 66. a. *geneſis.* 68. b. 69. *proprietates & ſymptomata.* 261. 308. & ſeqq.
Quadrilatera figura. 105. a.
Quadrilatera rectangula figura ibid.
Quadrilatera obliquangula figura. ibid.
Quadrilaterum circulo inſcriptum. 156. b. 318. b.
Quadruplicata ratio. 50. b.
Quies. 541. a.
Quotus. 28. a. 50. b.
Quantitas. 22. a. 23. 24.
Quantitas affirmativa. 247. a.

con-

conſtans. 364. b.
negativa. 247. a.
nihilo minor. 247. a.
variabilis. 364. b.
Quantitas motus integri 542. b.
Quantitas motus momentanea. 542. b.
Quantitatum combinatio. 304 & ſeqq.
in partes diviſarum ſymptomata. 263 & ſeqq.
permutatio. 277. b & ſeq.
ſigna. 26 b. 245. a.
variatio. 306.

R.

Radius *circuli.* 100. b.
Radius curvedinis. 523. a.
evolutæ. ibid.
oſculi. ibid.
Radix æquationis. *Definitio.* 279. b. *extractio.* 281. a. 355 & ſeqq. *limites* 333 & ſeqq. *mutationes.* 344 & ſeqq.
Radix binomina. 68. a.
Radix cubica. *Definitio.* 66. b. *extractio.* 72. 73. *ſymptomata.* 66. b
Radix falſa. 280. a.
imaginaria. ibid.
multinomia. 68. a.
perfecta quando non detur. 74. a. 75. b.
Radix quadrata. *Definitio.* 66. a. *extractio.* 70. a. 71. b. 171. b. *ſymptomata.* 66. a.
Radix trinomia. 68. a.
vera. 280. a.
Rarefactio. 731. b.
Rarefactio aëris. 733. a. 764. b. 765. a.
Rarum corpus. 703. b.
Ratio. *Definitio.* 46. a. *analyſis.* 321. b. *antecedens.* 46. *conſequens.* 46. *denominator.* 273. b. *exponens.* 47. b. *indoles.* 46. *ſymptomata.* 276 & ſeqq. *termini.* 46.
Ratio alterna. 57. a.
æqualitatis. 46. b.
compoſita. 50. a. 59. b. 60.
diverſa. 50. a. 57 & ſeqq.
dupla 48. a.
dupla ſeſquialtera 48. b.
dupla ſuperbipartiens tertias. 48. b.
duplicata. 50. a. 59. b.
eadem. 49. a. 51 & ſeqq.
ex æquo. 57. a.
inæqualitatis. 46. b.
inverſa. 52. a.
irrationalis. 47.
major. 50. a.
majoris inæqualitatis 47. a.
minor 50. a.
minoris inæqualitatis. 47. a.
multiplex. 48. a.
multiplex ſuperparticularis 48. b.
multiplex ſuperpartiens. 48. b.
multiplicata. 50. b.
ordinata. 57. a.
perturbata. 57. a.
quadruplicata. 50. b.
rationalis. 47. a.
rationum. 50. a.
ſeſquialtera. 48. a.
ſubdupla. 48. a.

ſub.

ſubdupla ſubſeſquialtera. 48. b.
ſubdupla ſubſupertripartiens tertias. 48. b.
ſubmultiplex. 48. b.
ſubmultiplex ſubſuperparticularis. 48. b.
ſubmultiplex ſubſuperpartiens. 48. b.
ſubſeſquialtera. 48. b.
ſubſeſquitertia. 48. b.
ſubſuperbipartiens tertias. 48. a.
ſubſuperparticularis. 48. a.
ſubſuperpartiens. 48. a.
ſubtripla. 48. a.
ſubtripla ſubſeſquiquarta. 48 b.
ſubtripla ſubſuperquadripartiens ſeptimas. 49. a.
ſuperbipartiens tertias. 48. a.
ſuperparticularis. 48. a.
ſuperpartiens. 48. a.
ſuperquadripartiens ſeptimas. 48. a.
ſupertripartiens quartas. 48. a.
tripla. 48. a.
tripla ſeſquiquarta. 48. b.
tripla ſuperquadripartiens ſeptimas. 48. b.
triplicata. 50. b. 59. b.
Rationalis numerus. 24. a.
Rationalis numerus fractus. ibid.
integer. ibid.
mixtus. ibid.
Rationalium arithmetica. 245.
Recta linea. *Definitio.* 98. a. *deſcriptio.* 106. 107. a. *dimenſio.* 107. b. 108. *oſcillationis centrum.* 605. a. *ſectio.* 417. b. 418.
Rectangulum. *Definitio.* 105. a. *centrum oſcillationis* 605. b. 607. b. *conſtructio.* 153. b. *dimenſio* 166. b. *proprietates.* 152. a. *ratio* 167. a.
Rectangulum triangulum. *Definitio.* 104. b. *proprietates.* 127. a. 129. a. 151. b. 174. b. 319. b. 320. a. 326. b. & ſeqq.
Rectificatio curvarum. 488. a.
Rectificabiles curvæ. 489. 528. b.
Rectilinea figura. 100. a.
Rectus angulus. *Definitio.* 102. b. *menſura.* 111. a. *quantitas.* ibid. *ratio.* ibid.
Reductiones fractionum. 64.
irrationalium. 257. 258.
Reflexionis angulus. 625. a.
Regula, *in Conchoide* 395. b. *inſtrumentum.* 107. a.
Regula aurea 77. b.
de quinque 78. b.
trium compoſita. 78. b.
directa, vulgo *detri* 76. b & ſeqq.
inverſa. 78.
ſocietatis. 79. b.
Regulæ proportionum. 76 & ſeqq.
Regulæ trium compendia. 80. b. & ſeqq.
Regulare corpus. *Definitio.* 184. a. *numerus.* 192. a. *dimenſio.* 201. b.
Regulares figuræ. *Definitio.* 105. b. *deſcriptio.* 156. b. 214. *dimenſio* 171. b. *proprietates.* 155. b. 171. a. *ratio.* 172. b. 173. a.

Reſi-

Reſiſtentia in machinis. 681. & ſeqq.
Reſiſtendi vis. 542. b.
Reſolutio problematis. 14. b.
Reſolutio problematis algebraica. 280. b. 316. 317.
Retardatus motus. 548. a.
Rhomboides. *Definitio.* 105. a. *conſtructio.* 154. a. *dimenſio.* 168. a. *proprietates.* 152. a.
Rhombus. *Definitio.* 105. a. *conſtructio.* 153. b. *dimenſio.* 168. a. *proprietates.* 152. a. 329. b.
Roſarii conſtructio. 814.
Rota dentata. *Conſtructio.* 696. b. *motus.* 655 & ſeqq. *vires.* 653. b. & ſeqq.
Rota directa. *Definitio.* 672. a. *conſtructio.* 678. a. *motus* 677. b.
Rota radiata 696. b.
Rota retrograda. *Definitio.* 672. a. *motus.* 678. b.
Rota ſitulis inſtructa. 814. b.

S.

Sagitta. 364. a.
Salis in aqua ſalſa contenti quantitas *quomodo exploretur.* 723.
Scalæ geometricæ conſtructio. 136. 137.
Scalenum triangulum. 104. b.
Scholion. 15. b.
Scytala. 643. b.
Secans. *Definitio.* 219. b. *inventio.* 225. a. *proprietates.* 146. b. 151. b. 152. b.
Secans anguli multipli *quomodo inveniatur* 342. b.
Secans complementi. 220. a.
Secantium chordarum proprietates. 167. a.
Secantium circulorum proprietates. 102. a.
Secantium linea. 399. a.
Secantium logarithmi quomodo inveniantur. 226. a.
Secare *quid ſignificet.* 101. b.
Sectio fluminis. 677. a.
Sectiones conicæ. 366. a.
Sector circuli. *Definitio.* 101. b. *centrum gravitatis.* 563. a. *centrum oſcillationis.* 608. a. *quadratura.* 178. b. *ratio.* 173. b. *ſimilitudo.* 110.
Secundum (ſc. minutum). 100. b.
Segmenti angulus. 103. b.
Segmentum circuli. *Definitio.* 104. a. *centrum gravitatis.* 563. b. *quadratura.* 179 & ſeq.
Segmentum majus. 101. b.
minus. 101. b.
Segmentum ſphæræ. *Centrum gravitatis.* 566. b. *cubatio.*
Segmentum ſphæroidis elliptici. *Centrum gravitatis.* 567. a. *cubatio.* 146. a.
Semicirculorum interſectio. 121. b.
Semicirculus, inſtrumentum. 112. a.
Semidiameter. 100. b.
Semiordinata. 364. a.
Semiparabolæ. 392. b.
Series infinitæ per diviſionem. 254 & ſeqq.

per extractionem radicis 268. b. & ſeqq.
per ſeriem præſuppoſitam 362. b. & ſeqq.
Serrariæ molæ conſtructio. 694.
Seſquialtera ratio. 48. a.
Signa *quænam optima* 49. b.
ſcientifica. ibid.
Signa algebraica. 245. 246. 247.
Signa potentiarum 67. b.
Signa quantitatum 26. 245. a.
conſtantium. 364. b.
variabilium. ibid.
Signum æqualitatis. 22. a.
additionis. 27. a.
diviſionis 28. b.
differentialium 453. b.
majoritatis 22. b.
minoritatis 22. b.
multiplicationis 27. b.
proportionis. 49. b.
radicale 75. b.
ſimilitudinis 23. a.
ſubtractionis 27. b.
ſummationis. 474. a.
Simile. 22. b.
Similes anguli plani. 110. 115. b.
ſolidi. 183. b.
coni. 204. a. 206. a.
cylindri. 204. a. 206. a.
figuræ. 115. a. 172. a.
partes. 52.
Similia triangula. 117. a. 121. a. 122. b. 134. b. 170. a. 328. b.
Similitudinis principium ab autore in Geometriam introductum. 96.
Simplex æquatio. 280. a. 317. b.
Sinus. *Definitio.* 219. a. *inventio.* 220. b & ſeqq. 319. a. 492. b. *logarithmus.* 225. b.
Sinus arcuum ſimilium. 220. a.
artificialis. 226. b.
complementi. 220. a.
rectus. 219. a.
totus. 219. a. 220. b.
verſus. 219. a.
Sinuum linea. 398. a.
Sipho. 805. & ſeqq.
Sipho anatomicus. 805. & ſeqq.
interruptus. 808. b.
Situm eundem quænam habeant. 97. a.
Situs analyſis. 244.
Situs calculus. ibid.
Societatis regula. 79. b.
Solidi anguli *quinam æquales.* 183. b.
unde diſtinguantur. 183. b.
Solidi ciſſoidalis cubatio 497. a.
Solidi logiſtici cubatio. 497. b.
Solidum. *Definitio.* 183. a. *cubatio.* 494. a. *menſura.* 186. b.
Solidum corpus. *Definitio.* 703. a. *immerſio in fluido graviori.* 721. a. *in fluido leviori* 711. 4. *ſpecifica gravitas quomodo determinetur.* 715.
Soni ingentis per artificium hydraulicum excitatio. 829. a. 830. a.
Spatium. 542. a.
Specifica gravitas fluidorum. 708. a. 713. b.

Spe-

Specificarum gravitatum ratio, 705. 706. a. 708. b. 712. a. 713. a. 715. b. 720. b. 721.
Specifice gravioris in fluido leviori *deſcenſus* 719. a. *gravitatio*. 711 & ſeqq.
Specifice levioris in fluido graviori gravitatio. 720. a.
Sphæra. *Definitio*. 185. b. *axis* 185. b. *centrum* 185. b. *centrum gravitatis*. 566. b. *centrum oſcillationis*. 608. a. *cubatio*. 201. 495. a. *diameter*. 185. b. *proprietates*. 185. b. 199. b. 200. 204. b. *ratio*. 206. b. *ſuperficiei complanatio*. 499. b.
Sphæroidis elliptici centrum gravitatis. 567. b.
cubatio 496. a.
Spiralis Archimedea. *Definitio*. 399. b. *ſubtangens*. 463 b. *quadratura*. 486. a.
Spiralis logiſtica. 398. b.
Spiralis parabolicæ punctum flexus contrarii. 522. a.
Spiralis prima, ſecunda &c. 399. b.
Spiralium infinitarum quadratura. 486. a.
ſubtangens. 463. b.
Stateræ conſtructio. 647. b.
Statica. *Definitio*. 541. a. *utilitas*. 545. 546.
Subdupla ratio. 48. a.
Submultiplex ratio. ibid.
Submultiplex ſubſuperparticularis ratio. 48. b.
Submultiplex ſubſuperpartiens ratio. 48. b.
Subnormalis. 369. a.
Subſeſquialtera ratio. 48. a.
Subſuper particularis ratio. ibid.
Subſuper partiens ratio. ibid.
Subtangens. 369. a.
Subtractio. *Definitio* 27. a. *leges in numeris* 34 & ſeqq. *in litteris*. 149. a. *probatio*. 35. b. *ſignum*. 27. b.
Subtripla ratio. 48. a.
Summa. 27. a.
Superficies. 99. a.
Superficierum ex rotatione genitarum complanatio. 499. a.
Superinceſſus radens. 681. a.
volvens. 681. a.
Superparticularis ratio. 48. a.
Superpartiens ratio. 48. a.
Surdeſolidum. 67. a.
Surdeſolidum ſecundum, tertium &c. ibid.
Surdus numerus. *Definitio* 24. b *exiſtentia* 175. a.
Syllogiſmorum in Matheſi uſus. 13. b. b. 14. a.
Syringis conſtructio. 812. a.

T.

Tangens. *Definitio*. 219. b. *inventio* 225. a. 492. b. 341. *logarithmus* 226. a. *proprietates*. 167. a.

Tangens artificialis. 226. b.
Tangens complementi. 220. a.
Tangentium linea. 399. a.
Tangentium methodus. 457 & ſeqq.
Tangentium methodus inverſa. 500. a.
Tangere quid ſignificet. 101. b.
Terminorum uſus. 26. b. 49. a.
Teleſcopii inventio fortuita. 8.
Tempus. 542. a
Tertium (ſc. minutum). 100. b.
Tetraëdrum. *Definitio.* 186. a. *latus.* 332. b. *rete.* 190. a.
Theorema. 11.
Theorema Pythagoricum. 175. a.
Thermometrum. 776. a.
Thermoſcopium. *Definitio* 776. a. *conſtructio* 776 & ſeqq.
Thermoſcopium Florentinum. *Conſtructio.* 777. b. 778. a. *diviſio.* 779 & ſeqq. *uſus.* 778. b.
Théſis. 12. a.
Totum. *Definitio.* 21. b. *proprietates.* 29. a. *in partes diviſi ſymptomata.* 282. b. 263 & ſeqq.
Trahendo quomodo machina moveatur. 667. b. 599. a. 668.
Tranſcendens curva. 365. a.
Transportatorium inſtrumentum. 112. b
Transportatorium inſtrumentum rectilineum. 231. 232.
Transverſus axis. 380. b.
Trapezium. *Definitio.* 105. a. *dimenſio.* 170. b.
Triangula æqualia. 116. 121. a. 130.
ſimilia. 117. a. 122. b. 134. b. 170. a. 328. b.
Triangulares numeri. 300. b.
Triangulorum canon naturalis. 225.
Triangulum. *Definitio.* 104. a. *centrum gravitatis.* 560. a. *conſtructio.* 116. b. 122. a. 134. b. *dimenſio.* 169 b. *diviſio.* 280. b. *proprietates.* 117. b. 118. a. 228. b. 129. 135. a. 145. b. 146. a. 168. a. 168. b. 169. a. 227. a. 533. a. *ſolutio trigonometrica.* 227 & ſeqq. *ſymptomata.* 336 & ſeqq.
Triangulum acutangulum. 104. b.
Triangulum æquicrurum. *Definitio.* 104. b. *centrum oſcillationis.* 605. b. & ſeqq. *conſtructio* 121. a. *proprietates.* 117. a. 130. b. *ſimilitudo.* 121. a.
Triangulum æquilaterum. *Definitio.* 104. a. *conſtructio.* 120. b. *proprietates.* 117. b. 130. b.
Triangulum characteriſticum. 457. a.
iſoſceles. 104. b.
ſcalenum. ibid.
Triangulum rectangulum. *Definitio.* 104. b. *proprietates.* 126. a. 127. a. 129. a. 174. b.
Trigoni regularis latus quomodo inveniatur. 324. a.
Trigonometria. *Definitio.* 219. *uſus.* 217. 231 & ſeqq.
Tripla ratio. 48.
Triſectio anguli. 447. b.
Trituratoria mola. 693. b.
Trochlea. *Definitio.* 644. a. *vires.* 660 & ſeqq. *uſus.* 661. b.
Trochois. 400 a.
Trudendo quomodo machina moveatur. 667. a. 668. a. 669. a.

Tubus. *Definitio.* 791. a. *Conſtructio.* 793. b.
Tubus Torricellianus. 749 & ſeqq.
Tympanum aquarium. 814. b.

V.

Valvula. *Definitio.* 811. a. *conſtructio.* 811.
Variatio quantitatum. 305 & ſeqq.
Vaſa concordiæ. 830. b.
Vaſa hydraulica. 830. b & ſeqq.
Vaſa metallica aquæ ſupernatantia. 724. a.
Vas irrigatorium. 804.
Vectis. *Definitio.* 643. a. *vires* 644. b & ſeqq.
Vectis heterodromus. 643. b.
homodromus. ibid.
Velocitas. *Definitio.* 542. a. *menſura.* ibid.
Ventus. *Definitio.* 768. a. *cauſæ.* 774. 775. *excitatio artificialis.* 775. 776. 819. b. *principium motus machinarum.* 680.
Verſando quomodo machina moveatur. 667. b. 668. a.
Vertex anguli. 102. a.
curvæ. 364. a.
figuræ. 106. a.
Verticales anguli. 103. a. 113. a.
Vires ad corpus ſuſtentandum requiſitæ. 577. a.
Vires conſpirantes. 579. a.
Vires quando æquales. 584. a.
Virgulæ pithometricæ conſtructio. 207 & ſeq. 211. 212.
Vis. 541. b.
Vis centralis. 636. & ſeqq.
centrifuga. 635. a.
centripeta. 635. b.
mortua. 541. b.
reſiſtendi. 542. b.
viva. 541. b.
Vis mortuæ æſtimatio. 584. b.
vivæ æſtimatio. 594 & ſeq.
Volumen. 541. b.
Unciæ potentiarum. 265. a. 304. a.
Unitas. 21.
Unum. 21. a.

Z.

Zenſus. 67. b.
Zenſicubus. ibid.
Zenſizenſus. ibid.
Zenſi zenzenſus ibid.
Zenſurdeſolidus. ibid.

Index alter,

Oſtendens paragraphos, in quibus definitiones & propoſitiones Elementorum *Euclidis* continentur.

Notes velim, Ar. deſignare Arithmeticam, An. Analyſin finitorum, G. Geometriam.

Elementi I.

Definit.	1	G.§.5.8
	2	11
	3	10
	4	16
	5	26
	6	27
	7	34
	8	52
	9	52
	10	61
		75
		76
	11	62
	12	62
	14	30
	15	35
	16	35
	17	37
	18	131
	19	32
		100
	20	83
	21	93
	22	100
	23	84
	24	85
	25	86
	26	87
	27	88
	28	89
	29	94
	30	96
	31	95

Definit.	32	G.§.97
	33	99
	34	78
		79
	35	98
	36	107
Poſtul.	1	18
	2	19
	3	127
Axiom.	1	Ar.§.79
		81
	2	80
	3	83
	4	82
	5	84
	6	169
	7	169
	8	160
		162
	9	78
	10	G.235
	11	48
	12	139
	13	247
	14	17
Propoſi.	1	G.§.187
	4	169
	5	174
	6	238
	7	191
	8	193
	9	198
	10	199

Propoſit.	11	G.§.201
	12	205
	13	141
	14	141
	15	150
	16	177
	19	178
	20	179
	21	285
	22	194
	23	197
	26	236
	27	240
	28	240
	29	222
	30	221
	31	243
	32	224
		225
	33	242
	34	320
	35	366
	36	366
	37	367
	38	367
	41	368
	46	320
	47	394
	48	394

Ele-

Elementi II.
Propoſit. 1 G. §.417
2 74
3 An. 73
4 Ar. 240
5 An. 74
7 76
8 76
9 75
10 75
11 222
Elementi III.
Definit. 1 G.159
2 45
3 45
4 214
5 43
6 74
7 67
8 54
9 44
Propoſit. 1 G. 280
3 276
4 317
5 273
6 272
7 288
8 287
9 164
10 192
14 283
15 284
286
16 289
290
17 An.253
18 G. 293
19 294
20 298
21 300
22 156
25 300
26 300
27 300
Propoſit.28 G. 274
29 274
30 278
31 302
303
304
307
32 308
35 363
36 361
37 361
Elementi IV.
Definit. 3 G. 112
4 113
Propoſi. 11 336
An. 241
12 G. 537
15 309
Elementi V.
Definit. 1 Ar. §. 9
2 133
3 117
4 145
5 30
6 139
7 145
8 147
9 145
10 148
12 164
13 160
14 181
15 183
16 183
17 184
185
18 184
19 185
Propoſi. 4 Ar.176
5 179
6 157
7 157
8 187
189
Propoſi. 9 Ar.169
10 188
190
11 156
12 178
15 170
16 164
17 183
18 181
19 179
22 184
23 185
24 168
Elementi VI.
Definit. 1 G. 166
3 An. 222
4 G. 216
5 Ar. 148
Propoſi. 1 G. 327
2 253
3 254
4 252
5 196
6 173
8 314
9 259
10 260
11 257
12 256
13 312
16 360
17 359
18 341
342
19 385
20 385
23 358
371
30 222
33 299
Elementi VII.
Definit. 1 Ar. 3
4
2 10

Def-

Definit. 3 Ar. 28
4 28
5 133
6 64
65
11 67
12 71
13 68
14 72
15 59
62
18 225
19 227
20 145
22 An. 212
23 Ar. 66
24 24
26 148
27 201
Axioma. 7 194
9 196
Propoſi. 2 210
12 178
13 164
16 191
18 268
270
19 267
270
20 185
Elementi VIII.
Propoſi. 11 Ar. 238
12 238
13 239
Elementi IX.
Propoſi. 21 An. 66
67
22 66
23 66
Propoſi. 24 63
25 64
26 65
27 64
28 64
29 65
Elementi X.
Definit. 1 Ar. 29
2 29
6 35
7 39
Propoſi. 3 212
5 152
6 149
7 152
8 149
Elementi XI.
Definit. 1 G. 421
6 448
9 503
11 422
12 444
13 429
14 442
15 442
16 442
17 442
18 440
19 440
20 441
21 438
23 439
24 507
25 432
433
26 447
27 447
28 447
29 447
Definit. 30 G. 435
Propoſi. 21 427
28 476
29 474
30 474
31 474
32 511
33 516
34 518
Elementi XII.
Propoſi. 1 G. 386
2 386
5 511
6 511
7 482
8 516
9 518
10 486
11 511
12 516
14 511
15 518
16 206
Elementi XIII.
Propoſi. 8 An. 256
9 237
10 241
12 232
13 261
14 267
15 264
16 G. 273
17 270
18 263
266
269
272
273

FINIS.

A. M. D. G.